数理解析研究所講究録
第 232 巻 1975 年 26-30

Function space における Local maximum modulus principle

九大 理　平下幸雄
早大 教育　和田淳蔵

Function algebra に関する Rossi [6] の Local maximum modulus principle はよく知られている. その後, この principle は Banach algebra においても考えられている ([1]). ここでは function space において, もっとくわしく言えば function system $\mathcal{F}$ において Local maximum modulus principle を考察する. Rossi の principle における Shilov 境界と同じ役割をなす LMM($\mathcal{F}$)-boundary の存在を示すと共に, LMM($\mathcal{F}$)-boundary の性質および Rossi の principle との関係について述べる.

§1. LMM($\mathcal{F}$)-boundary.

X をコンパクト Hausdorff 空間とし, X の部分集合の上で定義された有界な複素値連続関数からなる1つの族を $\mathcal{F}$ とする. $\mathcal{F} \ni f$ に対して f の定義域を $D(f)$ で表わす.

$\mathfrak{F}$がXの上の function system であるとは、つぎの条件をみたすときとする。

(1) $f, g \in \mathfrak{F}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ なら $D(f) \cap D(g)$ で定義された $\alpha f + \beta g$ は $\mathfrak{F}$ に属する.

(2) $\mathfrak{F}_X = \{ f \in \mathfrak{F} : D(f) = X \}$ はXの点を分離し、定数関数を含む.

いま$\mathfrak{F}$をXの上の function system とする. $X \supset E$ が LMM($\mathfrak{F}$)-principle をみたすとは、$U \cap E = \phi$ となるXの開集合 U と $D(f) \supset \bar{U}$ となる $f \in \mathfrak{F}$ に対して $\|f\|_{\dot{U}} = \|f\|_U$ となることとする。ここで $\dot{U}$ は U の topological boundary, $\|f\|_\phi = 0$ とする. もし LMM($\mathfrak{F}$)-principle をみたすXの閉集合の中で最小のもの F_0 が存在するとき、それを LMM($\mathfrak{F}$)-boundary と呼び $F_0 = LMM(\mathfrak{F})$ とかくことにする.

定理 1.1 任意のXの上の function system $\mathfrak{F}$ に対して、LMM($\mathfrak{F}$)-boundary が存在する.

証明は Bear [2] の証明に似ているが、多少複雑である.

§2. LMM($\mathfrak{F}$)-Boundary と Shilov Boundary

C(X) の線型部分空間AがXの上の function space であるとは、AがXの点を分離し、定数関数を含むときにいう.

AをXの上のfunction spaceとする．S（$\subset X$）の上で定義された関数fが（A－）holomorphicであるとは，$\forall x \in S$に対して，Xにおけるxの近傍Vが存在してfはAの関数によって$S \cap V$の上で一様に近似されることをいう．Sの上のholomorphic function全体を$\mathcal{H}_A(S)$で表わす．またSの上でAの関数によって一様近似できる関数全体を$\mathcal{H}'_A(S)$で表わす．

AをXの上のfunction spaceとするとき，つぎの3つはXの上のfunction systemとなる．

(I) $\mathcal{F}(A) = A$.

(II) $\mathcal{F}(\mathcal{H}'_A) = \bigcup_{S \subset X} \mathcal{H}'_A(S)$

(III) $\mathcal{F}(\mathcal{H}_A) = \bigcup_{S \subset X} \mathcal{H}_A(S)$

つぎが証明できる．

定理 2.1　$\partial_A \subset LMM(\mathcal{F}(A)) = LMM(\mathcal{F}(\mathcal{H}'_A)) \subset LMM(\mathcal{F}(\mathcal{H}_A))$

ここで∂_AはAのShilov境界である．

Rickart [5] のcorollary 2.3と類似の結果がつぎのように得られる．

定理 2.2　Xの開集合Uが$U \cap LMM(\mathcal{F}(\mathcal{H})) = \phi$をみたすとき，任意の$h \in \mathcal{H}_A(U)$に対して$\dot{U} \ni \delta$が存在して，$\delta$の任意の開近傍$V$に対して$\|h\|_U = \|h\|_{U \cap V}$となる．

§3. Singular point

A を X の上の function space とし、$\phi: X \to A^*$ を X から dual space A^* (weak*-topology をもった) への canonical mapping とする：すなわち $x \in X$ に対して $\phi(x) \in A^*$ は $\langle \phi(x), f \rangle = f(x)$ $(x \in X,\ f \in A)$ をみたす. ここで X と $\phi(X)$ は同一視することができる. $S \subset X$ に対して $\phi(S)^\wedge$ は $\phi(S)$ の closed convex hull を表わす. $\phi(X)^\wedge$ は state space $\{L \in A^* : L(1) = 1 = \|L\|\}$ に等しい. ここで $\phi(S)^\wedge$ の代りに $\hat{S}$ とかく (cf. [4]).

定義. $X \ni x$ が singular であるとは、x のある開近傍 V に対して $x \in \mathrm{ex}\,\hat{V}$ となることであるとする. ここで $\mathrm{ex}\,\hat{V}$ は $\hat{V}$ の extreme point 全体を表わす. Singular point 全体の集合を S_A で表わす.

定理 3.1　$LMM(\mathfrak{F}(A))$ は S_A の closure $\overline{S_A}$ に等しい.

一般には $\partial_A \subset \overline{S_A}$ であるが、$\overline{S_A} = \partial_A$ のとき、つぎが成り立つ.

定理 3.2　$\overline{S_A} = \partial_A$ なら $\partial_A = LMM(\mathfrak{F}(H_A))$.

$X \ni x_0$ が (*) をみたすとは、x_0 の開近傍 W が存在して、$W \supset U$ となる任意の x_0 の開近傍に対して $f \in A$ が存在して $U \supset \{x \in W ; f(x) = \|f\|_W\}$ となることをいう.

定理 3.3　A を function space とする. そのとき S_A の任

差の点は（＊）をみたす.

Rossi の principle はつぎのように書ける.

定理 3.4 A を maximal ideal space M_A の上の function algebra とする. そのとき $\overline{S_A} = \partial_A$ である.

参考文献

[1] G. R. Allan : An extension of Rossi's local maximum modulus principle, J. London Math. Soc., 3 (1971) 39 − 43.

[2] H. S. Bear : The Silov boundary for a linear space of continuous functions, Amer. Math. Monthly 68, (1961) 483 − 485.

[3] G. M. Leibowitz : Lectures on Complex Function Algebras, Scott, Foresman and Company 1970.

[4] R. R. Phelps : Lectures on Choquet's Theorem, Van Nostrand, Princeton 1966.

[5] C. E. Rickart : Analytic phenomena in general function algebras, Pacific J. Math. 18 (1966) 361-377.

[6] H. Rossi : The local maximum modulus principle, Ann. of Math., 72 (1960) 1 − 11.

[7]. Y. Hirashita and J. Wada : The local maximum modulus principle for function spaces (to appear).