数理解析研究所講究録
第 232 巻 1975 年 44-54

調和空間上の Royden algebra

広島大理　前田文之

序. Riemann面 R において，その上の C^1 函数 f で，有界かつ Dirichlet 積分 $D[f]$ が有限なものの全体は algebra をなす．ノルム

$$\|f\| = D[f]^{1/2} + \sup|f|$$

によるその完備化が，R上の Royden algebra と呼ばれているものである。これは H.L. Royden により 1951 年に導入され([8])，開 Riemann 面の分類問題，その他に応用されて来た。(例えば [9, Chap III] を参照。) この algebra は，例えば Riemann 多様体のように Dirichlet 積分の概念が考えられるところでは同様に定義される(例えば [2])。

一方，Riemann 面上のポテンシャル論，さらにもっと一般に可微分多様体上の2階楕円型偏微分作用素に対するポテンシャル論を含む形で公理論的に扱ったのが調和空間の理論であるが，その一般論では，基底空間は単に局所コンパクト

な位相空間でしかないので，函数の微分の概念がなく，従って Dirichlet 積分を普通の方法で定義することが出来ない。しかし，あるポテンシャル論的な函数族の algebra としての性質に着目することによって，調和空間の構造から Dirichlet 積分に相当するものを定義し，その定義によって調和空間上にも Royden algebra が構成され得ることを示すのが今回の目的である。

§1. 調和空間と Green 函数.

こゝでは，M. Brelot の調和空間（[1]）を考える．すなわち，基底空間 Ω は連結，局所連結，局所コンパクトな Hausdorff 空間で，Ω の各開集合 ω ($\neq\phi$) に，その上の「調和函数」の族として，ω 上の実数値連続函数からなる線型空間 $\mathcal{H}(\omega)$ が与えられ，$\mathfrak{H}=\{\mathcal{H}(\omega)\}_\omega$ が次の公理 1〜3 をみたしているとする：

公理 1. $\mathfrak{H}$ は Ω 上の sheaf である。

公理 2. $\mathfrak{H}$ に関する正則領域の全体は Ω の開集合の基底をなす。

こゝで，領域 ω が $\mathfrak{H}$ に関して正則であるとは，ω は相対コンパクト，$\partial\omega\neq\phi$ で，$\partial\omega$ 上の任意の連続函数 φ に対し，$\overline{\omega}$ 上の連続函数 H^ω_φ で，$H^\omega_\varphi|\partial\omega=\varphi$，$H^\omega_\varphi|\omega\in\mathcal{H}(\omega)$

をみたすものが一意的に定まり，しかも $\varphi \geqq 0$ ならば $H_\varphi^\omega \geqq 0$ となることをいう。

公理3（Harnackの原理）．ω が領域のとき，$\mathcal{H}(\omega)$ 内の単調非減少列 $\{u_n\}$ が ω 内の1点で有界ならば，$u = \lim u_n$ は $\mathcal{H}(\omega)$ に属す。

Ω の開集合 ω_0 上の連続函数 v に対し，$\overline{\omega} \subset \omega_0$ なる任意の正則領域 ω をとると ω 上 $v \geqq H_v^\omega$ が成り立つとき，v は ω_0 で優調和であるという．また ω_0 上の非負優調和函数 v で，$u \in \mathcal{H}(\omega_0)$，$u \leqq v$ なら $u \leqq 0$，をみたすものを ω_0 上のポテンシャルという。v が ω_0 上の非負優調和函数ならば，$v = u + p$（$u \in \mathcal{H}(\omega_0)$，$p$ は ω_0 上のポテンシャル）と一意的に分解される（Riesz分解）。

Ω 内の領域で，その上に正の（ゼロでない）ポテンシャルが存在するものを，P-領域と呼ぶことにする．われわれは次の公理を追加しておく：

公理4（Hervé [3]）．各P-領域 ω および各 $y \in \omega$ に対し，もし p_1, p_2 が ω 上の正のポテンシャルで，$\omega - \{y\}$ において調和なら，$p_1 = \lambda p_2$（λ：定数）となる．

ω をP-領域とするとき，次の(G1)～(G3)をみたす $\omega \times \omega$

上の函数 $G(x,y)$ を ω 上の Green 函数と呼ぶ。

(G1)　$0 < G(x,y) \leqq +\infty$　$(\forall x, y \in \omega)$.

(G2)　$y \in \omega$ を固定すると，x の函数として $G(x,y)$ は ω 上のポテンシャルで $\omega - \{y\}$ において調和。

(G3)　$x \in \omega$ を固定すると，y の函数として $G(x,y)$ は $\omega - \{x\}$ 上連続。

各 P-領域 ω にその上の Green 函数 $G_\omega(x,y)$ が対応していて，$\mathcal{G} = \{G_\omega(x,y)\}_{\omega:\text{P-領域}}$ が次の条件をみたしているとき，$\mathcal{G}$ を Green 函数の consistent な系，と呼ぶ:

(G4)　ω, ω' が P-領域で $\omega' \subset \omega$ なら，各 $y \in \omega'$ に対し，$h_y \in \mathcal{H}(\omega')$ があって，すべての $x \in \omega'$ に対し

$$G_\omega(x,y) = G_{\omega'}(x,y) + h_y(x)$$

が成り立つ。

公理1〜4をみたす調和空間に対して，Green函数の consistent な系は常に存在する。(もちろん一意的ではない。) 特に，$G_\omega(x,y)$ がすべて対称：$G_\omega(x,y) = G_\omega(y,x)$ で $\mathcal{G} = \{G_\omega(x,y)\}$ が consistent な系になるようにとれるとき，調和空間 $(\Omega, \mathcal{H})$ は自己共役であるという。このとき，このような $\mathcal{G}$ は各成分の定数倍を無視すれば一意的に定まる。

§2. Algebra $\mathcal{B}(\Omega)$.

以下，$(\Omega, \mathcal{H})$ は公理 1〜4 をみたす調和空間とする．相対コンパクトな領域 ω で，$\overline{\omega}$ がある P-領域に含まれているものを PC-領域と呼ぶことにする．

定義　Ω 上の連続函数 f で，各 PC-領域 ω に対し，ω 上の非負有界連続優調和函数 v_1, v_2 があって，$f|\omega = v_1 - v_2$ と表わせるものの全体を $\mathcal{B}(\Omega)$ で表わす．

$\mathcal{B}(\Omega)$ は明らかに線型空間をなす。さらに，

定理 1.　$1 \in \mathcal{B}(\Omega)$ ならば，$\mathcal{B}(\Omega)$ は algebra をなす。

この定理は自明ではないが，証明は省略する。（自己共役な場合については [6] 参照。一般の場合も同様に証明される。）

さて，Dirichlet 積分の定義をするためには，$\mathcal{B}(\Omega)$ が algebra であってほしいので，次の公理も仮定する：

公理 5.　$1 \in \mathcal{B}(\Omega)$，すなわち，定数函数 1 は局所的に連続優調和函数の差として表わせる．

1 が優調和（従って特に $1 \in \mathcal{H}(\Omega)$）ならば，この公理は自明に成り立つ．

以下，Green 函数の consistent な系 $\mathcal{G} = \{G_\omega(x, y)\}$ を

1つ固定して議論する。

ω が P-領域で，μ が ω 上の非負測度のとき

$$U_\omega^\mu(x) = \int_\omega G_\omega(x,y)\,d\mu(y)$$

は $\not\equiv +\infty$ ならば ω 上のポテンシャルであり，逆に ω 上のポテンシャル p に対し，ω 上の非負測度 μ が一意的に定まって $p = U_\omega^\mu$ と表わせる（[3]）。従って，v が ω 上の非負優調和函数ならば，Riesz 分解により，v に対し ω 上の非負測度 μ が一意的に定まって，$v = U_\omega^\mu + u$ $(u \in \mathcal{H}(\omega))$ と表わされる。この μ を σ_v と表わすことにする。ω 上の signed measure ν に対しても，$U_\omega^{|\nu|}$ が各点で有限ならば，$U_\omega^\nu(x) = \int_\omega G_\omega(x,y)\,d\nu(y)$ が意味をもつ。上のことから，任意の $f \in B(\Omega)$ に対し，Ω 上の signed measure σ_f が一意的に定まって，各 PC-領域 ω に対し

$$f|\omega = U_\omega^{\sigma_f} + u_\omega, \quad u_\omega \in \mathcal{H}(\omega)$$

と表わされることが分る。この σ_f を（$\mathcal{G}$ に関する）f の付随測度と呼ぶ。$f \in B(\Omega)$ が ω_0 上優調和ということと，$\sigma_f|\omega_0 \geq 0$ とは同値である。

§3. Gradient 測度・Dirichlet 積分

$B(\Omega)$ が algebra であるので，$f, g \in B(\Omega)$ に対し，次の signed measure が定義出来る：

$$\delta_{[f,g]} = \frac{1}{2}\{f\sigma_g + g\sigma_f - \sigma_{fg} - fg\sigma_1\}.$$

(ただし，函数 φ と測度 ν に対し，$\varphi\nu$ は $d(\varphi\nu)=\varphi d\nu$ で定義される測度を表わす。)

これを f, g の相互 gradient 測度と呼ぶことにする。また

$$\delta_f \equiv \delta_{[f,f]}$$

を f の gradient 測度と呼ぶ。ユークリッド空間上の普通の調和函数の作る調和空間の場合には

$$\delta_{[f,g]} = \langle \mathrm{grad} f, \mathrm{grad} g \rangle dx$$

である ([4], [6])。定義から明らかに，$(f, g) \mapsto \delta_{[f,g]}$ は双線形，$\delta_{[f,g]} = \delta_{[g,f]}$ で，$f = \mathrm{const.}$ ならば任意の $g \in \mathcal{B}(\Omega)$ に対し，$\delta_{[f,g]} = 0$ となる。

定理2. すべての $f \in \mathcal{B}(\Omega)$ に対し，δ_f は正測度。

$1 \in \mathcal{H}(\Omega)$，すなわち，$\sigma_1 = 0$，の場合，この定理は

$$(*) \qquad 2f\sigma_f - \sigma_{f^2} \geqq 0$$

を意味している。f は局所的に $f = v_1 - v_2$ (v_1, v_2 は優調和) の形に書けるが，$\beta \leqq f \leqq \alpha$ なら，$v = 2\alpha v_1 - 2\beta v_2 - f^2$ がまた優調和になることに着目すると (*) が証明出来る。一般の場合は，与えられた調和構造 $\mathcal{H}$ の B. Walsh [10] の意味

の perturbation $\mathfrak{H} = \{\mathcal{H}(\omega)\}$ で，$1 \in \mathcal{H}(\Omega)$ となるものを構成し，$\sigma_1 = 0$ の場合に帰着させて証明する．

定理2により，Ω 上の任意の Borel 集合 A に対し

$$D_A[f] = \delta_f(A) \qquad (f \in \mathcal{B}(\Omega))$$

が常に意味をもつ。これを f の A 上の Dirichlet 積分と定義することにする。また，$f, g \in \mathcal{B}(\Omega)$ に対し，$\delta_f(A) < \infty$, $\delta_g(A) < \infty$ ならば

$$D_A[f, g] = \delta_{[f,g]}(A)$$

が確定する．これを f, g の相互 Dirichlet 積分と定義する。

§4. Royden algebra

$\mathcal{B}(\Omega)$ の函数に対し Dirichlet 積分の定義は出来たが，これが函数の積に関して，古典的な場合と同様の性質をもつであろうか。これについては，今のところ $(\Omega, \mathfrak{H})$ が自己共役な場合についてしか確かめていないが，一般の場合でも同じ結果が得られるものと予想している．一応以下では $(\Omega, \mathfrak{H})$ は自己共役であると仮定し，$\mathfrak{G} = \{G_\omega(x, y)\}$ は対称な Green 函数の consistent な系であるとする。このとき次の定理が証明出来る（[7]; 証明はかなり厄介）：

定理3. $f, g, \varphi \in \mathcal{B}(\Omega)$ ならば

$$\delta_{[fg,\varphi]} = f\,\delta_{[g,\varphi]} + g\,\delta_{[f,\varphi]}.$$

従って，

$$\delta_{fg} = f^2\delta_g + 2fg\,\delta_{[f,g]} + g^2\delta_f .$$

この定理により，函数族

$$\mathcal{B}_D(\Omega) = \{ f \in \mathcal{B}(\Omega);\ f \text{ は } \Omega \text{ 上有界，} D_\Omega[f] < \infty \}$$

が algebra をなすことがわかる。Royden に従って，ノルム

$$\|f\| = D_\Omega[f]^{1/2} + \sup_\Omega |f|$$

を考えると，$\mathcal{B}_D(\Omega)$ は normed algebra になる。このノルムによる $\mathcal{B}_D(\Omega)$ の完備化 $\mathcal{R}(\Omega)$ が，$(\Omega, \mathcal{H})$ に対する Royden algebra である。$\mathcal{R}(\Omega)$ は上のノルムによって Banach algebra になり，$\mathcal{R}(\Omega)$ に属す函数に対しても，$\delta_{[f,g]}$，δ_f が定義出来て，定理2，定理3 が成立する。

また，台がコンパクトな $\mathcal{B}(\Omega)$ の函数の列 $\{f_n\}$ の BD-極限 f（すなわち，$\{f_n\}$ は一様有界で，f_n は f に広義一様収束し，$D_\Omega[f_n - f] \to 0$）の全体 $\mathcal{R}_0(\Omega)$ は $\mathcal{R}(\Omega)$ の閉イデアルになる。これが Royden の potential subalgebra と呼ばれるものである（[9]）。

このようにして，Riemann 面上の議論（[8] および [9, Chap III] 等）が調和空間上でも可能となる。例えば次のようなこともいえる：

定理4. $\mathcal{R}(\Omega)$ の極大イデアル空間 Ω^* は Ω のコンパクト化（Royden コンパクト化）である。

$\Delta = \Omega^* - \Omega$ が Ω の Royden 境界である。$\mathcal{R}(\Omega)$ の各函数は Ω^* 上の連続函数に延長される。このとき

$$\Gamma = \{p \in \Delta ;\ \text{すべての } f \in \mathcal{R}_0(\Omega) \text{ に対し, } f(p) = 0\}$$

が Ω の Royden の調和境界と呼ばれるものである。
Riemann 面の場合と同様に，次の Royden の定理も成立つ：

定理5. 次の3つの命題は同値：
(a) $1 \in \mathcal{R}_0(\Omega)$ (b) $\mathcal{R}_0(\Omega) = \mathcal{R}(\Omega)$ (c) $\Gamma = \phi$.

文　献

[1] M. Brelot, Lectures on potential theory, Tata Inst. F.R., Bombay, 1960 (reissued 1967).

[2] M. Glasner and M. Nakai, Riemannian manifolds with discontinuous metrics and the Dirichlet integral, Nagoya Math. J. 46 (1972), 1-48.

[3] R.-M. Hervé, Recherches axiomatiques sur la théorie des fonctions surharmoniques et du potentiel, Ann. Inst. Fourier 12 (1962), 415-571.

[4] 前田文之，自己共役調和空間における Dirichlet 積分とエネルギー，数学 26(1974), 159-163.

[5] F-Y. Maeda, Energy of functions on a self-adjoint harmonic space I and II, Hiroshima Math. J. 2 (1972), 313-337 and 3 (1973), 37-60.

[6] ------, Dirichlet integrals of functions on a self-adjoint harmonic space, Ibid. 4 (1974), 685-742.

[7] ------, Dirichlet integral of product of functions on a self-adjoint harmonic space, Ibid. 5 (1975), to appear.

[8] H.L. Royden, On the ideal boundary of a Riemann surface, Contributions to the theory of Riemann surfaces, 107-109, Princeton, 1953.

[9] L. Sario and M. Nakai, Classification theory of Riemann surfaces, Springer, Berlin, 1970.

[10] B. Walsh, Perturbation of harmonic structures and an index-zero theorem, Ann. Inst. Fourier 20,1 (1970), 317-359.