数理解析研究所講究録
第 233 巻 1975 年 40-42

Some open questions about fusion

Chicago Univ. G. Glauberman.
北大・理　吉田知行
(訳)

G: finite group, $S \in Syl_p G$ とする. G のいくつかの p-local subgroup H_i が, $H_i \supseteq S$, H_i: p-constrained, $O_{p'}(H_i)=1$ を満たすとき, H_i の間にはどのような関係があるだろう? 例えば, $p \geq 5$ で H_i が p-solvable なら, すべての H_i は $N_G ZJ(S)$ に含まれる.

$p=2$ で G は $3'$-group, $|G|$ = even, $S \in Syl_2 G$ とする. このとき, Thompson の結果によって, S は strongly closed abelian subgroup A を持つ.

1) Thompson の結果を使わないで, これを証明できるか?

2) そのような A で S において characteristic なものはあるだろうか?

この問題は結局次に還元される.

S を与え, A を上の条件を満たすある候補とする. H を S を Sylow 2-subgroup として含む, 2-constrained

3'-group としたとき $A \lhd H$ が言えるか?

さらに H を solvable group に制限したときはどうか。

H が 3'-group でない場合はもちろん成立しない。例えば $H = S_4$ とすれば $1 \neq A$ char S について $A \ntriangleleft H$。また $H = GL(3,2)$ をとれば S は 1 以外に strongly closed abelian subgroup を持たない。

$p =$ odd とする。$G = Qd(p) = p^2 \rtimes SL(2,p)$ とおく。($p=2$ について $Qd(2) \simeq S_4$)。このとき $|S| = p^3$。この G に対し，S のどの nontrivial characteristic subgroup も G において normal にならない。

さて，H が p-constrained group で $O_{p'}(H) = 1$，$S \in Syl_p H$ とする。もし H が $Qd(p)$ を involve しなければ，$ZJ(S) \lhd H$。しかし，一般に H が $Qd(p)$ を involve すれば，$ZJ(S) \ntriangleleft H$ である。H が $Qd(p)$ を involve し，$ZJ(S) \ntriangleleft H$ と仮定。

Thompson の question.

1) $x \in S - O_p(H)$ で，すべての chief factor U/V ($U \subseteq O_p(H)$) に対し $[U, x, x] \subseteq V$ となるものが存在するか?

2) $H/O_p(H) \simeq SL(2, p^n)$ の場合はどうか。

最後に Finite Simple Group (Higman-Powell) の p.48-50

について少し付け加える。

Q.16.2 (a) Sylow 2-group を極大 subgroup として含む G については B. Baumann, unpublished がある。

(b) generalized quaternion group を direct factor に持つ Sylow 2-group を含む G については、J. Alg. 28, 133-173.

Q.16.5. $p \geq 5$ については Thompson, Quadratic pair によって報告された。

Q.16.8. Transfer results は $H^1(G, Z_p) \simeq H^1(N_G K(S), Z_p)$ $(p \geq 5)$ を与える。

G が simple なら $H^2(G, Z_p) \simeq \Omega_1 O_p M(G)$ である。

PSL, PSU を除いて $|M(G)| \leq 48$ を証明せよ。

$p \geq 5$ について $O_p M(G)$ が cyclic であることを証明せよ。

(吉田記)