数理解析研究所講究録
第234巻 1975年 4-39

4

2次元任意物体を過ぎるおそい流れ

東大 生研　成瀬文雄

§1. 序

円柱への写像関数が既知である2次元物体を考え，このような物体のまわりのおそい流れを、つぎの(i)～(iv)のばあいについて研究し、物体に働く力の式を導く。ただし(i)、(iii)、(iv)のばあい、基礎方程式はNavier-Stokes方程式またはそれに類する方程式で、2次元の定常運動を考え、(ii)のばあいは基礎方程式にStokes方程式をとり、2次元の定常運動に限らない。

(i) 一様流中におかれたとき

非圧縮のNavier-Stokes方程式を基礎方程式として、ℰりつなぎ法(the method of matched asymptotic expansion)でとく。展開のパラメータをε(εのorderは$1/|\log Re|$、ReはReynolds数)とするとき，$O(\varepsilon^3)$まで正しい結果を導く。

(ii) 壁効果

1枚の無限平板でしきられた空間の中で、または2枚の平

行無限平板の間の真中の位置で、物体が任意の方向に動いているばあいを、Stokes方程式を基礎方程式として調べる。物体の大きさを示す特性的長さをℓ、壁から物体までの距離をdとし、$\ell/d \ll 1$を仮定、$O(\ell/d)$または$O(\ell^2/d^2)$を省略して物体に働く力の式を導く。

(iii) 成層流体中での運動

密度が鉛直下方にわずか線型的に増加しているような流体中を物体が斜めの方向に動くときを調べる。成層流体に対する基礎方程式をBoussinesq近似をし、$R_e \ll 1$, $R_i \ll 1/R_e$ (R_i: Richardson数)のばあいをきりつなぎ法でとき、物体に働く力として$O(\varepsilon^2)$まで正しい式を導く。

(iv) 電磁流体中での運動

一様な磁場をもつ電気伝導性流体中を物体が磁場に斜めの方向に動くときの流れの様子を調べる。R_mを磁気レイノルズ数、Mを Hartmann数とするとき、$R_e \ll 1$、$R_m \ll 1$、$M \ll 1$であるがR_m/R_e, M/R_eは任意の価をとり得るとして、きりつなぎ法で解析し、$O(\varepsilon^2)$まで正しい式を導く。

§2 一様流中におかれたとき

物体が無限空間中を一定の速度で運動するとき、または一様流中に固定されたときを考える。物体に固定した座標系をとり、無次元化された位置座標、速度、圧力を

$$\bar{\mathbb{r}} = \mathbb{r}^*/l , \quad \bar{\mathbb{q}} = \mathbb{q}^*/U , \quad \bar{p} = l p^*/\mu U \tag{2.1}$$

とする。ただし l は特性的な長さ、U は物体の速度、μ は粘性率である。このときNavier-Stokes方程式および境界条件は

$$\Delta \bar{\mathbb{q}} - \nabla \bar{p} = R_e \bar{\mathbb{q}} \cdot \nabla \bar{\mathbb{q}} , \quad \nabla \cdot \bar{\mathbb{q}} = 0 \tag{2.2}$$

$$\bar{r} = f(\theta) : \quad \bar{\mathbb{q}} = 0 \tag{2.3}$$

$$\bar{r} \to \infty : \quad \bar{\mathbb{q}} \to \mathbb{i} , \quad \bar{p} \to \bar{p}_\infty \tag{2.4}$$

である。ここで $\bar{r} = f(\theta)$ は物体の形を表わし、$\mathbb{i}$ は一様流の方向を表わす。また $R_e = \rho U l/\mu$ である。

(i) きりつなぎ法による展開

S. kaplun etc.[1),2)]が円柱のまわりの流れをといたときと同じように、全領域を $\bar{r} \sim O(1)$ で表わされる内部領域と $\bar{r} \sim O(1/R_e)$ で表わされる外部領域とに分け、内部変数 $\mathbb{R}(X, Y, Z)$ および外部変数 $\mathbb{r}(x, y, z)$ を

$$\mathbb{R} = \bar{\mathbb{r}} , \quad \mathbb{r} = R_e \bar{\mathbb{r}} \tag{2.5}$$

のようにとる。また X, Y, Z および x, y, z は直角座標系で、流れの面は X, Y － または x, y－面にとり、X の方向または x の方向を $\mathbb{i}$ の方向と一致させてある。つぎに外部および内部展開を、ε (order は $1/|\log R_e|$) でつぎのように展開する。

外部展開：

$$\left.\begin{aligned} \bar{\mathbb{q}} &= \mathbb{i} + \varepsilon \mathbb{q}_1(\mathbb{r}) + \varepsilon^2 \mathbb{q}_2(\mathbb{r}) + \cdots\cdots + \varepsilon^n \mathbb{q}_n(\mathbb{r}) + \cdots \\ \bar{p} &= \bar{p}_\infty + R_e(\varepsilon p_1(\mathbb{r}) + \varepsilon^2 p_2(\mathbb{r}) + \cdots\cdots + \varepsilon^n p_n(\mathbb{r}) + \cdots) \end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

内部展開：

$$\left.\begin{aligned} \bar{q} &= \varepsilon Q_1(\mathbb{R}) + \varepsilon^2 Q_2(\mathbb{R}) + \cdots\cdots + \varepsilon^n Q_n(\mathbb{R}) + \cdots \\ \bar{p} - \bar{p}_\infty &= \varepsilon P_1(\mathbb{R}) + \varepsilon^2 P_2(\mathbb{R}) + \cdots\cdots + \varepsilon^n P_n(\mathbb{R}) + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (2.7)$$

(ii) 内部展開

内部展開 (2.7) を (2.2)，(2.3) に代入して、

$$\Delta Q_n - \nabla P_n = 0 \quad , \quad \nabla \cdot Q_n = 0 \qquad (2.8)$$

$$R = f(\theta) \ : \ Q_n = 0 \qquad (2.9)$$

が得られる。(2.8) は Stokes 方程式であるから、(2.9) をみたす解は、$R \gg 1$ でつぎのような漸近形をもつ。

$$\left.\begin{aligned} Q_n &= A_n\left[\left(-\log\frac{R}{a_n} + b_n\right)\mathbf{i}_n + \frac{X_n \mathbb{R}}{R^2} + c_n \mathbf{j}_n\right] + O\left(\frac{1}{R}\right) \\ P_n &= 2A_n X_n / R^2 + O(1/R^2) \end{aligned}\right\} \quad (2.10)$$

ここで $\mathbf{i}_n, \mathbf{j}_n$ は直交する単位ベクトル、$\mathbf{i}_n$ の方向および A_n は外部解との matching によってきめられるので、いまは未定、X_n, Y_n は直角座標を表わし、X_n の方向は $\mathbf{i}_n$ の方向にとられている。また a_n, b_n, c_n はつぎのようにして決定される (Appendix 参照)。$Z(=X+iY)$-平面上の物体が ζ-平面上の半径 a の円柱へ、写像関数

$$Z = \zeta + \zeta_0 + h(\zeta) \quad (\zeta \gg 1 \ ; \ h(\zeta) \sim o(1)) \qquad (2.11)$$

によって写像されるとき、

$$\left.\begin{aligned} & a_n = a \, , \quad b_n = -\frac{1}{2}\{1 + \gamma\cos(\beta + 2\alpha_n)\} \, , \quad c_n = \frac{\gamma}{2}\sin(\beta + 2\alpha_n) \, , \\ & \gamma e^{i\beta} = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{h}(ae^{-i\theta}) - ae^{-i\theta} h'(ae^{i\theta})}{e^{i\theta}(1 + h'(ae^{i\theta}))} \, d\theta \end{aligned}\right\} \quad (2.12)$$

で決定され、α_n は $\boldsymbol{l}_n$ と X 軸とのなす角である。

外部解と内部解の matching を行なう共通領域では、$\boldsymbol{Q}_n, P_n$ は

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{Q}_n &= A_n\left[(\log a R_e - \log r + b_n)\boldsymbol{l}_n + \frac{x_n \boldsymbol{r}}{r^2} + c_n \boldsymbol{j}_n\right] + O\left(R_e \frac{1}{r}\right) \\ P_n &= 2A_n \frac{x_n}{r^2} R_e + O\left(R_e^2 \frac{1}{r^2}\right) \end{aligned}\right\} \quad (2.13)$$

の形をもつ。ここで $x_n = R_e X_n$ である。

いま $\boldsymbol{Q}_1$ と外部解の第 0 近似との matching を行なって

$$\varepsilon = -1/\log a R_e, \quad A_1 = -1, \quad \boldsymbol{l}_1 = \boldsymbol{l} \quad (2.14)$$

が得られる。

(iii) 外部解

外部展開 (2.6) を (2.2), (2.4) に代入すると

$$\Delta \boldsymbol{q}_n - \nabla p_n - \frac{\partial \boldsymbol{q}_n}{\partial x} = \boldsymbol{q}_1 \cdot \nabla \boldsymbol{q}_{n-1} + \boldsymbol{q}_2 \cdot \nabla \boldsymbol{q}_{n-2} + \cdots + \boldsymbol{q}_{n-1} \cdot \nabla \boldsymbol{q}_1, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{q}_n = 0 \quad (2.15)$$

$$r \to \infty : \quad \boldsymbol{q}_n \to 0, \quad p_n \to 0 \quad (2.16)$$

が得られる。ここで $\boldsymbol{q}_0 = 0$ とおくことにする。$r \to 0$ での $\boldsymbol{q}_n$ の境界条件は (2.13), (2.14) を用いて、内部解との matching を行って

$$r \to 0 : \quad \boldsymbol{q}_n \to -A_n\left((\log r)\boldsymbol{l}_n - \frac{x_n \boldsymbol{r}}{r^2}\right) \quad (2.17)$$

が得られる。いま $A_n, \boldsymbol{l}_n$ が既知であるとし、つぎの如く $\boldsymbol{l}$, $\boldsymbol{j}$ ($\boldsymbol{j}$ は $\boldsymbol{l}$ に直角な単位ベクトル) の方向に分ける。

$$A_n \boldsymbol{l}_n = -(H_n \boldsymbol{l} + I_n \boldsymbol{j}) \quad (2.18)$$

このとき

$$A_n x_n = -(H_n x + I_n y)$$

であるから、(2.17) は

$$r \to 0 : \quad \boldsymbol{q}_n \to H_n\left((\log r)\boldsymbol{l} - \frac{x \boldsymbol{r}}{r^2}\right) + I_n\left((\log r)\boldsymbol{j} - \frac{y \boldsymbol{r}}{r^2}\right) \quad (2.19)$$

となる。(2.15), (2.16), (2.19) を取扱うためには $\boldsymbol{q}_n$, p_n をつぎの如く2つに分割すると都合がよい。

$$\boldsymbol{q}_n = \boldsymbol{q}_{n1} + \boldsymbol{q}_{n2}, \qquad p_n = p_{n1} + p_{n2}$$

(a)

$$\Delta \boldsymbol{q}_{n1} - \nabla p_{n1} - \frac{\partial \boldsymbol{q}_{n1}}{\partial x} = 0, \qquad \nabla \cdot \boldsymbol{q}_{n1} = 0 \tag{2.20}$$

$$r \to \infty: \quad \boldsymbol{q}_{n1} \to 0, \quad p_{n1} \to 0 \tag{2.21}$$

$$r \to 0: \quad \boldsymbol{q}_{n1} \longrightarrow H_n\left((\log r)\boldsymbol{i} - \frac{x\boldsymbol{r}}{r^2}\right) + I_n\left((\log r)\boldsymbol{j} - \frac{y\boldsymbol{r}}{r^2}\right) \tag{2.22}$$

(b)

$$\left.\begin{aligned} &\Delta \boldsymbol{q}_{n2} - \nabla p_{n2} - \frac{\partial \boldsymbol{q}_{n2}}{\partial x} = \boldsymbol{q}_1 \cdot \nabla \boldsymbol{q}_{n-1} + \boldsymbol{q}_2 \cdot \nabla \boldsymbol{q}_{n-2} + \cdots + \boldsymbol{q}_{n-1} \cdot \nabla \boldsymbol{q}_1 \\ &\nabla \cdot \boldsymbol{q}_{n2} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

$$r \to \infty: \quad \boldsymbol{q}_{n2} \to 0, \quad p_{n2} \to 0 \tag{2.24}$$

$$r \to 0: \quad \boldsymbol{q}_{n2} \longrightarrow \boldsymbol{a}_n + o(1) \tag{2.25}$$

$\boldsymbol{q}_{n1}$ は Oseen 方程式の2つの基本解 $\boldsymbol{q}_0'$, p_0' および $\boldsymbol{q}_0''$, p_0'' から

$$\boldsymbol{q}_{n1} = H_n \boldsymbol{q}_0' + I_n \boldsymbol{q}_0'', \qquad p_{n1} = H_n p_0' + I_n p_0'' \tag{2.26}$$

のように決定される。ここで

$$\boldsymbol{q}_0' = 2\left[\nabla\left\{\log r + e^{\frac{x}{2}} K_0\left(\frac{r}{2}\right)\right\} - e^{\frac{x}{2}} K_0\left(\frac{r}{2}\right)\boldsymbol{i}\right], \qquad p_0' = -\frac{2x}{r^2} \tag{2.27}$$

および

$$\boldsymbol{q}_0'' = 2\,\nabla \times \left[\left\{\log r + e^{\frac{x}{2}} K_0\left(\frac{r}{2}\right)\right\}\boldsymbol{k}\right], \qquad p_0'' = -\frac{2y}{r^2} \tag{2.28}$$

であり、また K_n は n 次の第2種の変形ベッセル関数で、$\boldsymbol{k}$ は z 方向の単位ベクトルである。(2.26)〜(2.28) より

$$r \to 0: \quad \boldsymbol{q}_{n1} \longrightarrow H_n\left[(\log r + d)\boldsymbol{i} - \frac{x\boldsymbol{r}}{r^2}\right] + I_n\left[(\log r + d + 1)\boldsymbol{j} - \frac{y\boldsymbol{r}}{r^2}\right] \tag{2.29}$$

をもつ。ここで $d=\gamma-\log 4$，γ はオイラーの定数である。

したがって，$\mathfrak{V}_n$ は (2.25)，(2.29) より，$r\to 0$ でつぎの形をもつ

$r\to 0$：

$$\mathfrak{V}_n \to H_n\left[(\log r+d)\,\mathfrak{i}-\frac{x\mathfrak{r}}{r^2}\right]+I_n\left[(\log r+d+1)\,\mathfrak{j}-\frac{y\mathfrak{r}}{r^2}\right]+\mathfrak{a}_n \quad (2.30)$$

つぎに $\mathfrak{a}_n$ について考える。$\mathfrak{V}_1,\cdots,\mathfrak{V}_{n-1}$ が既知であるときには $\mathfrak{V}_{n2}$ は Green 関数を使ってつぎのように表示できる。

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{V}_{n2}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}T(x-\xi,y-\eta)\,\mathfrak{f}_n(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta \\
&\text{ここで} \\
&\mathfrak{f}_n=\mathfrak{V}_1\cdot\nabla\mathfrak{V}_{n-1}+\mathfrak{V}_2\cdot\nabla\mathfrak{V}_{n-2}+\cdots+\mathfrak{V}_{n-1}\cdot\nabla\mathfrak{V}_1 \\
&T(x,y)=\begin{pmatrix}-\psi & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x}\end{pmatrix}(\psi+\phi),\quad \psi=\frac{1}{2\pi}e^{\frac{x}{2}}K_0\!\left(\frac{r}{2}\right),\quad \phi=\frac{\log r}{2\pi}
\end{aligned}\right\}\quad (2.31)$$

いま $\mathfrak{f}_1=0$ であるから $\mathfrak{a}_1=0$，また $\mathfrak{f}_2=\mathfrak{V}_1\cdot\nabla\mathfrak{V}_1=\mathfrak{V}_0'\cdot\nabla\mathfrak{V}_0'$ であるから，$\mathfrak{a}_2$ の計算も比較的簡単である。$\mathfrak{a}_2$ は S. Kaplun[1] によって円柱のまわりの流れを調べるときに計算されていて

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{a}_2=e_2\,\mathfrak{i} \\
&e_2=-\int_0^{\infty}K_0(\xi)\,K_1(\xi)\left[\xi^{-1}I_1(2\xi)-4K_1(\xi)\,I_1(\xi)+1\right]d\xi=-0.87
\end{aligned}\right\}\quad (2.32)$$

で与えられる。ただし $I_n(z)$ は n 次の第1種の変形ベッセル関数である。$\mathfrak{a}_3,\mathfrak{a}_4,\cdots$ についてはまだ計算されていないと思われる。

(iv) 物体に働く力

共通領域で有効な (2.13) および (2.30) を用いて $O(\varepsilon^n)$ の定

数の matching を行なって

$$A_{n+1}\boldsymbol{i}_{n+1} = A_n(b_n\boldsymbol{i}_n + c_n\boldsymbol{j}_n) - (H_n d + e_n)\boldsymbol{i} - \{I_n(d+1) + f_n\}\boldsymbol{j} \qquad (2.33)$$

が得られる。ここで $\boldsymbol{a}_n = e_n\boldsymbol{i} + f_n\boldsymbol{j}$ とおいた。つぎに (2.12)，(2.18) を用いて

$$b_n = b_1 + \frac{2H_nI_nc_1 - (2b_1+1)I_n^2}{H_n^2 + I_n^2}, \quad c_n = \frac{c_1(H_n^2 - I_n^2) - (2b_1+1)H_nI_n}{H_n^2 + I_n^2} \qquad (2.34)$$

が得られる。また

$$A_n\boldsymbol{j}_n = I_n\boldsymbol{i} - H_n\boldsymbol{j} \qquad (2.35)$$

(2.18)、(2.34)、(2.35) を (2.33) に代入して

$$A_{n+1}\boldsymbol{i}_{n+1} = -\left[(b_1+d)H_n + c_1I_n + e_n\right]\boldsymbol{i} - \left[c_1H_n + (d-b_1)I_n + f_n\right]\boldsymbol{j} \qquad (2.36)$$

すなわち

$$H_{n+1} = (b_1+d)H_n + c_1I_n + e_n, \quad I_{n+1} = c_1H_n + (d-b_1)I_n + f_n \qquad (2.37)$$

が成立することが分る。

いま Q_n，P_n から生ずる物体に働く力 $\mathbb{F}_n$ は

$$\mathbb{F}_n = -4\pi\mu U A_n\boldsymbol{i}_n$$

であるから、物体に働く力 $\mathbb{F}$ は

$$\mathbb{F} = 4\pi\mu U\sum_{n=1}^{\infty}(H_n\boldsymbol{i} + I_n\boldsymbol{j})\varepsilon^n \qquad (2.38)$$

によって与えられる。ここで漸化式 (2.37) を用いて，$\sum_{n=1}^{\infty}H_n\varepsilon^n$，$\sum_{n=1}^{\infty}I_n\varepsilon^n$ を成分とするベクトルは

$$\begin{pmatrix}\sum H_n\varepsilon^n \\ \sum I_n\varepsilon^n\end{pmatrix} = \varepsilon\left[I - \varepsilon T\right]^{-1}\left[\begin{pmatrix}H_1 \\ I_1\end{pmatrix} + \sum_{m=1}^{\infty}\varepsilon^{m-1}\begin{pmatrix}e_m \\ f_m\end{pmatrix}\right] \qquad (2.39)$$

の形にかける。ここで

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix}b_1+d & c_1\\ c_1 & -b_1+d\end{pmatrix}$$

であり、$[\quad]^{-1}$ は逆マトリックスを表わす。したがって (2.14) を用いて

$$\mathbb{F}=\frac{4\pi\mu U\varepsilon}{1-2d\varepsilon-(b_1^2+c_1^2-d^2)\varepsilon^2}\left[\{1+\varepsilon(b_1-d)\}\mathbf{i}+c_1\varepsilon\mathbf{j}+N\right] \tag{2.40}$$

$$N=\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\left[\left[\{1+\varepsilon(b_1-d)\}e_n+c_1\varepsilon f_n\right]\mathbf{i}+\left[c_1\varepsilon e_n+\{1-\varepsilon(b_1+d)\}f_n\right]\mathbf{j}\right] \tag{2.41}$$

が得られる。$a_1=0$, $a_2=e_2\mathbf{i}$ を (2.41) に代入し、かつ $O(\varepsilon^4)$ 以上を省略するとき、

$$N=\varepsilon^2\left[\{1+\varepsilon(b_1-d)\}e_2\mathbf{i}+c_1\varepsilon e_2\mathbf{j}\right] \text{ or } N=\varepsilon^2 e_2\mathbf{i} \tag{2.42}$$

となるから、これを (2.40) に代入して、$O(\varepsilon^3)$ まで正確な力の式を求めることができる。ただし e_2 は (2.32) によって与えられる。

また基礎方程式が Navier-Stokes 方程式でなく Oseen 方程式であるときには、(2.40) で $N=0$ とおけば、$O(R_e)$ まで正しい解が得られていることになる。

（例1） 円柱（半径 a^*）

写像関数 $Z=\zeta$ であるから、$h(\zeta)=0$ となり、(2.12) より

$$a=a^*/l\ ,\quad b_1=-\frac{1}{2}\ ,\quad c_1=0 \tag{2.43}$$

が得られる。(2.43) を (2.40), (2.42) に代入して得られる結果は、S. Kaplun[1] の結果と一致する。

（例 2）　楕円柱（長軸 $2a^*$，短軸 $2b^*$）

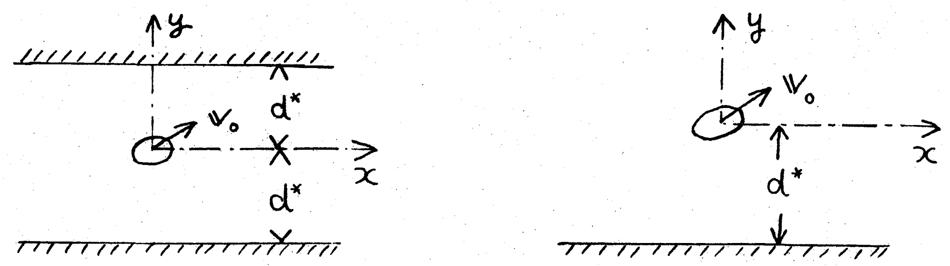
一様流の方向と長軸のなす角を α とする。写像関数 $Z = \zeta + \mathfrak{k}^2/\zeta$ であるから，$\mathfrak{f}_1(\zeta) = \mathfrak{k}^2/\zeta$ となり、(2.12) より

$$a = (a^* + b^*)/2l, \quad b_1 = -\frac{1}{2}(1 + \sigma^2 \cos 2\alpha), \quad c_1 = \frac{1}{2}\sigma^2 \sin 2\alpha \qquad (2.44)$$

が得られる。ただし $\sigma^2 = (a^* - b^*)/(a^* + b^*)$ である。(2.44) を (2.40), (2.42) に代入して楕円柱に対する結果が得られる。とくに $N = 0$ とおくときには、Oseen 方程式を基礎として導出された今井教授[3)]の結果と一致する。

§3. 壁効果

壁として1枚の無限平板または2枚の平行無限平板を考える。いま2次元物体が第1図 Case I, Case II に示すような位置で速度 $\mathbb{V}_0$ をもっているとする。基礎方程式は Stokes 方程式であるから、物体が非定常運動をしていても、定常運動として取扱ってよい。



Case I　　　　　　Case II

第1図

いま物体の速度 $\mathbb{V}_0 = W\mathfrak{k} + U\mathfrak{i}_0$ で表わす。ここで $\mathfrak{k}$ は Z

方向の単位ベクトル、i_0 は x, y − 面内にある単位ベクトルとする。つぎに無次元化された速度 $\overline{w}$，$\overline{q}$（x, y 面内のベクトル）を次式で定義する。

$$q^* = W \overline{w} k + U \overline{q} \qquad (3.1)$$

(3.1) を Stokes の方程式に代入し、$\frac{\partial}{\partial z} = 0$ を考慮するとき、流体の運動は、x, y − 平面内の運動と z 方向の運動に分離できる。

(i) x, y − 平面内の流れ

$$\Delta \overline{q} - \nabla \overline{p} = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \overline{q} = 0 \qquad (3.2)$$

$$\text{物体上：} \ \overline{q} = i_0 \quad , \quad \text{壁：} \ \overline{q} = 0 \qquad (3.3)$$

(ii) z 方向の流れ

$$\Delta \overline{w} = 0 \qquad (3.4)$$

$$\text{物体上：} \ \overline{w} = 1 \quad , \quad \text{壁：} \ \overline{w} = 0 \qquad (3.5)$$

ここで Δ，∇ は、x, y − 平面内の operator で、$\overline{w}$，$\overline{q}$，$\overline{p}$ はいづれも x, y の関数である。

いかにおいて $l/d^* = 1/d \ll 1$ として、$1/d$ による展開の解を求めることにする。

(i) x, y − 平面内の流れ

(A) 両壁効果（第1図 Case I）

フーリエ変換を用いてとく。いま Stokes 方程式をみたし、かつ物体上で $\overline{q} = 0$ をみたす解を q_0，p_0 とするとき、q_0 は

$r \gg 1$ で (2.10) と同じ漸近形をもつ。

$$\left.\begin{aligned} q_0 &\sim A\left[\left(-\log\frac{r}{a}+b_1\right)\mathbf{k}_1 + \frac{x_1\mathbf{r}}{r^2} + c_1\mathbf{j}\right] + O\left(\frac{1}{r^{\nu}}\right) \\ p_0 &\sim 2A\frac{x_1}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^{\nu+1}}\right) \end{aligned}\right\} \quad (3.6)$$

ここで A も $\mathbf{k}_1$ もまだ未定である。いま $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ を x, y 方向の単位ベクトルとし、$\mathbf{k}_1 = l\,\mathbf{e}_x + m\,\mathbf{e}_y$ とかく。ν は対称物体では $\nu=2$ ととり、その他の物体では $\nu=1$ ととってよい。

q_0 の (3.6) で示された部分の x, y 成分を u_0, v_0 とするとき、u_0, v_0 はフーリエ変換を用いてつぎのように表示される。[4]

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= A\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{l\left(\frac{1}{|\alpha|}-|y|\right) - im\frac{\alpha}{|\alpha|}y\right\}e^{i\alpha x-|\alpha||y|}\,d\alpha - lK_1 - mC_1\right] \\ v_0 &= A\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{m\left(\frac{1}{|\alpha|}+|y|\right) - il\frac{\alpha}{|\alpha|}y\right\}e^{i\alpha x-|\alpha||y|}\,d\alpha - m(K_1+1) + lC_1\right] \end{aligned}\right\} \quad (3.7)$$

ここで $K_1 = c - \log a - b_1 - 1$、また c はつぎのフーリエ変換のときでてくる定数である。

$$\log r = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{|\alpha|}e^{i\alpha x-|\alpha|y}\,d\alpha + c \qquad (3.8)$$

つぎに壁の上で $q=0$ の条件を満足させるための付加関数として、(i) (3.7) のような積分形で表示され、(ii) $f_1(\alpha), \cdots, f_8(\alpha)$ の 8 ケの α の任意関数を含み、(iii) Stokes 方程式をみたす関数をもってくる。この付加関数を $q_i\ (u_i, v_i)$ とするとき、

$$u_i = l\,u_i' + m\,u_i'', \quad v_i = l\,v_i' + m\,v_i'' \quad (i=1,2)$$

$$\left.\begin{aligned}
u_1' &= A\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left\{|\alpha| f_1 + \left(\frac{1}{|\alpha|} + 3|\alpha| - y - 2\alpha^2 y\right) f_2\right\} e^{i\alpha x - |\alpha| y}\, d\alpha + \frac{K_1}{2}\right] \\
u_2' &= u_1'\left(y \to -y,\ f_1 \to f_3,\ f_2 \to f_4\right) \\
v_1' &= A\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{2}\left\{\alpha f_1 - \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} y - \alpha + 2\alpha|\alpha| y\right) f_2\right\} e^{i\alpha x - |\alpha| y}\, d\alpha - \frac{C_1}{2}\right] \\
v_2' &= -v_1'\left(y \to -y,\ f_1 \to f_3,\ f_2 \to f_4,\ C_1 \to -C_1\right) \\
u_1'' &= A\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2i}\left\{\alpha f_5 + \left(\frac{\alpha}{|\alpha|} y + \alpha + 2\alpha|\alpha| y\right) f_6\right\} e^{i\alpha x - |\alpha| y}\, d\alpha + \frac{C_1}{2}\right] \\
u_2'' &= u_1''\left(y \to -y,\ f_5 \to f_7,\ f_6 \to f_8\right) \\
v_1'' &= A\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\left\{-|\alpha| f_5 - \left(\frac{1}{|\alpha|} + 3|\alpha| + y + 2\alpha^2 y\right) f_6\right\} e^{i\alpha x - |\alpha| y}\, d\alpha + \frac{K_1 + 1}{2}\right] \\
v_2'' &= -v_1''\left(y \to -y,\ f_5 \to f_7,\ f_6 \to f_8,\ K_1 + 1 \to -K_1 - 1\right)
\end{aligned}\right\} \quad (3.9)$$

で与えられる。つぎに

$$Q = q_0 + q_1 + q_2 \qquad (3.10)$$

を速度と考え、壁の上で速度0の条件から、$f_1 \sim f_8$ を決定する。$O(1/d^2)$ を省略するとき、この条件は

$$y = \pm d \quad : \quad \sum_{i=0}^{2} u_i = 0 \ , \quad \sum_{i=0}^{2} v_i = 0 \qquad (3.11)$$

で表わされる。(3.11) より $f_1, \cdots, f_8$ はつぎのようにきまる。

$$\left.\begin{aligned}
&f_1(\alpha) = f_3(\alpha)\ ,\quad f_2(\alpha) = f_4(\alpha)\ ,\quad f_5(\alpha) = -f_7(\alpha)\ ,\quad f_6(\alpha) = -f_8(\alpha) \\
&f_1(\alpha) = \frac{e^{-2\zeta} - 1 + 2\zeta + 4\zeta^2 + 2d^2}{(1+2\alpha^2)(e^{-2\zeta} - e^{2\zeta} + 4\zeta)}\ ,\quad f_2(\alpha) = \frac{-e^{-2\zeta} + 1 - 2\zeta}{(1+2\alpha^2)(e^{-2\zeta} - e^{2\zeta} + 4\zeta)} \\
&f_5(\alpha) = \frac{e^{-2\zeta} - 1 - 2\zeta + 4\zeta^2 + 2d^2}{(1+2\alpha^2)(e^{-2\zeta} - e^{2\zeta} - 4\zeta)}\ ,\quad f_6(\alpha) = \frac{-e^{-2\zeta} + 1 + 2\zeta}{(1+2\alpha^2)(e^{-2\zeta} - e^{2\zeta} - 4\zeta)}
\end{aligned}\right\} \quad (3.12)$$

つぎに (3.12) を (3.10) に代入し、Q の物体付近の価を調べるとき、$O(1/d^2)$ を省略して、つぎのような一定の速度をもつ。

$r \ll 1$;

$$\left.\begin{aligned} Q &= A\left[\left(\log\frac{2d}{a} - b_1\right)\mathbb{i}_1 - c_1\mathbb{j}_1 - \ell(1+S_1)\mathbb{e}_x - m S_2 \mathbb{e}_y\right] + O\left(\frac{1}{d^2}\right) \\ S_1 &= \int_0^\infty \frac{(1-2\zeta-e^{-2\zeta})^2 d\zeta}{\zeta e^{2\zeta}(1-4\zeta e^{-2\zeta}-e^{-4\zeta})} = 1.1087, \quad S_2 = \int_0^\infty \frac{(1+2\zeta-e^{-2\zeta})^2 d\zeta}{\zeta e^{2\zeta}(1+4\zeta e^{-2\zeta}-e^{-4\zeta})} = 1.8138 \end{aligned}\right\} \quad (3.13)$$

上式の Q が $Q = \mathbb{i}_0$ となるように、A, $\mathbb{i}_1$ を決定すればよい。そのために、まづ $\mathbb{i}_1 = \mathbb{e}_x$ となるばあいの $\mathbb{i}_0$, A, $\mathbb{F}$ (物体に働く力) を決定して $\mathbb{i}_{01}$, A_1, $\mathbb{F}_1$ とおく。つぎに $\mathbb{i}_1 = \mathbb{e}_y$ となるばあいの $\mathbb{i}_0$, A, $\mathbb{F}$ を決定し、これを $\mathbb{i}_{02}$, A_2, $\mathbb{F}_2$ とする。いま

$$\mathbb{i}_0 = \alpha\,\mathbb{i}_{01} + \beta\,\mathbb{i}_{02} \quad (3.14)$$

で α, β をきめるとき、$\mathbb{F}$ は

$$\mathbb{F} = \alpha\,\mathbb{F}_1 + \beta\,\mathbb{F}_2 \quad (3.15)$$

で与えられるが、得られた結果は (C) で示す。

(B) 片壁効果 (第1図 Case II)

鏡像法を用いてとく。(3.6) で与えられる $\mathbb{q}_0$, p_0 の鏡像を $\mathbb{q}'(u', v')$, p' とし、$\mathbb{q}''(u'', v'')$, p'' を次式で定義する。

$$\left.\begin{aligned} u'' &= -u' - 2(y+d)\frac{\partial v'}{\partial x} + (y+d)^2\frac{\partial p'}{\partial x} \\ v'' &= v' - 2(y+d)\frac{\partial v'}{\partial y} + (y+d)^2\frac{\partial p'}{\partial y} \\ p'' &= p' + 2(y+d)\frac{\partial p'}{\partial y} - 4\frac{\partial v'}{\partial y} \end{aligned}\right\} \quad (3.16)$$

このとき $\mathbb{q}''$, p'' は Stokes の方程式をみたす。いま

$$Q = \mathbb{q}_0 + \mathbb{q}'' \quad (3.17)$$

で、$\mathbb{Q}$を定義するとき、壁の上で$\mathbb{Q}$は$O(1/d^\nu)$を省略して0となる。また物体付近では$O(1/d)$を省略して、つぎのような一定の速度をもつ。

$r \ll 1$:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{Q} &= A\left[\left(\log\frac{2d}{a}-b_1\right)\mathbb{i}_1 - c_1\mathbb{j}_1 - l(1+S_1)\mathbb{e}_x - mS_2\mathbb{e}_y\right] + O\left(\frac{1}{d}\right) \\ S_1 &= -\frac{1}{2}, \qquad S_2 = \frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \quad (3.18)$$

(3.18)は(3.13)と全く同じ形をしているから、両壁効果のときと同じ方法で物体に働く力を決定することができる。

(c)　物体に働く力

物体に働く力$\mathbb{F}$は(3.13)および(3.18)を用いて決定され、Case I, Case II とも共通して、つぎのような形をもつ。いま物体の速度$\mathbb{i}_0$を

$$\mathbb{i}_0 = l_1\mathbb{e}_x + l_2\mathbb{e}_y \qquad (3.19)$$

で表わすとき、

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{F} &= \frac{4\pi\mu U}{k_1k_2 - c_1^2}\left[(l_1k_1 + l_2c_1)\mathbb{e}_x + (l_2k_1 + l_1c_1)\mathbb{e}_y\right] \\ k_1 &= \log\frac{2d}{a} - b_1 - 1 - S_1, \quad k_2 = \log\frac{2d}{a} + b_1 + 1 - S_2 \end{aligned}\right\} \quad (3.20)$$

で与えられる。ここでS_1およびS_2は

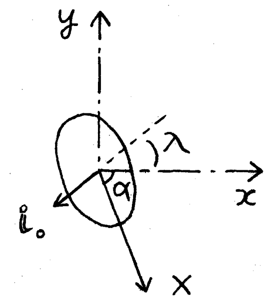
$$\left.\begin{aligned} &\text{Case I} : \quad S_1 = 1.1087, \quad S_2 = 1.8138 \\ &\text{Case II} : \quad S_1 = -\frac{1}{2}, \quad S_2 = \frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \quad (3.21)$$

であり、またa, b_1, c_1は(2.12)で与えられる。ただしこのと

きの α_n は円柱へ写像するときに用いた Z-平面の X 軸と $\mathbb{e}_x$ 方向とのなす角である。

Case I において、物体の位置が壁と壁との中間でないばあいでも、物体に働く力は (3.20) と同じ形となるが、S_1 と S_2 の価は Case I と Case II のばあいの中間の価をとると考えられる。

(例) 楕円柱



第2図

Case I, Case II のばあいとも、$\mathbb{e}_0$ 方向に速度 U で運動しているとし、第2図のように記号をきめるとき、a, b_1, c_1 は (2.44) を用いてよい。ただし α は第2図の如く、X 軸と x 軸とのなす角である。物体に働く力は (2.44)、(3.20)、(3.21) を用いて

$$\mathbb{F} = \frac{4\pi\mu U\left[\left\{\left(\log\frac{d}{a}+A-\frac{\sigma^2}{2}\cos2\alpha\right)\cos\lambda+\frac{\sigma^2}{2}\sin2\alpha\sin\lambda\right\}\mathbb{e}_x+\left\{\left(\log\frac{d}{a}+B+\frac{\sigma^2}{2}\cos2\alpha\right)\sin\lambda+\frac{\sigma^2}{2}\sin2\alpha\cos\lambda\right\}\mathbb{e}_y\right]}{\left(\log\frac{d}{a}\right)^2+C\log\frac{d}{a}+D+E\cos2\alpha-\frac{1}{4}\sigma^4} \quad \cdots(3.22)$$

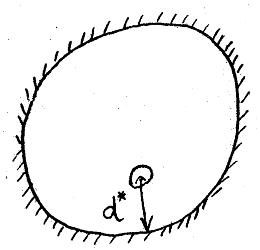
のようにきまる。ここで

	A	B	C	D	E
Case I:	-0.6207	-0.9156	-1.5363	0.5683	0.1475
Case II:	$\log 2-1$	$\log 2$	$2\log 2-1$	$\log 2(\log 2-1)$	$-\frac{1}{2}$

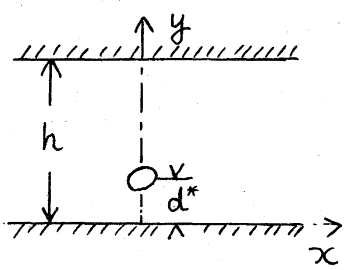
(3.23)

$\lambda=0$ のときには高石教授の結果[5]と一致する。

(ii)　z方向の運動



第3図



第4図

第3図のように2次元的容器の中で、z方向に運動するばあいを考え、$1/d \ll 1$ の条件はみたしているとする。一般的に、外部壁の断面の円柱への写像関数が既知であるとき、物体に働く力は $1/d$ による展開の解として求めることができる。しかしここでは (i) のばあいと同じように2枚の平行無限平板を考え、ただし物体は任意の位置にあってz方向に運動するとする。物体が一方の壁に $1/d \ll 1$ の条件をみたしながら近づくときには、(i) の Case II に相当するばあいの解が得られる。

さて第4図のように x, y-軸をとり、$z' = x + iy$ として

$$w_1 = \mathrm{Re}\left[A \log \frac{\sinh \dfrac{\pi(z' - di)}{2h}}{\sinh \dfrac{\pi(z' + di)}{2h}} \right] \qquad (3.24)$$

を考えるとき、$\Delta w_1 = 0$ および壁の上で $w_1 = 0$ をみたす。いま $Z(= X + iY)$-平面上の物体（Appendix 第A1図）が写像関数 $Z = \zeta + \zeta_0 + h(\zeta)$ によって、ζ-平面上の半径 a の円へ写像されるとき、$R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ とおいて

$$\bar{w} = w_1 + A\left[\log\frac{(3\bar{z})^{\frac{1}{2}}}{a} - \log\frac{R}{a}\right] \tag{3.25}$$

で定義される$\bar{w}$を速度として考えよう。このとき$\bar{w}$は(i) $\Delta\bar{w}=0$をみたす，(ii) $O(1/d)$を省略して，壁の上で速度0である，(iii) $O(1/d)$を省略して，物体付近でつぎのような一定の速度をもつ。

$$\bar{w} = A\left[\log\frac{\pi a}{2h} - \log\left(\sin\frac{\pi d}{h}\right)\right] + O\left(\frac{1}{d}\right) \tag{3.26}$$

まず(3.26)を用いて，物体上で$\bar{w}=1$になるようにAをきめ，つぎに(3.25)から，物体に働く力F_zをつぎのように決定することができる。

$$F_z = -\frac{2\pi\mu W}{\log\frac{2h}{\pi a} + \log\left(\sin\frac{\pi d}{h}\right) + O\left(\frac{1}{d}\right)} \tag{3.27}$$

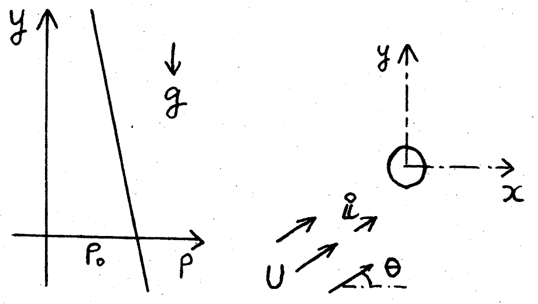
§4　成層流体中での運動

鉛直下向きにごくわずか密度がましているような成層流体中で，2次元物体がゆっくりと斜めの方向に，一定の速度で動いているばあいを考える。静止流体での密度分布は

$$\rho = \rho_0(1 - ky) \tag{4.1}$$

で与えられるとし，$kl \ll 1$を仮定する。

いま物体固定の座標系を考え，かつBoussinesq近似をするとき，この問題は定常流で取扱うことができる。ここでつぎの



第5図

ような無次元化量を用いよう。

$$\bar{q} = \frac{q^*}{U}, \quad \bar{r} = \frac{r^*}{l}, \quad \bar{p} = \frac{l p'}{U \nu}, \quad \bar{P} = \frac{P'}{P_0 k l} \qquad (4.2)$$

ただし p', P' は圧力、密度の一様流状態における値との差を示す。このとき非圧縮・非拡散の基礎方程式は

$$\left.\begin{aligned} &\Delta \bar{q} - \nabla \bar{p} = Re\, \bar{q} \cdot \nabla \bar{q} + Re\, Ri\, \bar{P} (\sin\theta\, \boldsymbol{i} + \cos\theta\, \boldsymbol{j}) \\ &\nabla \cdot \bar{q} = 0, \quad \bar{q} \cdot \nabla \bar{P} = (\bar{u} - 1) \sin\theta + \bar{v} \cos\theta \end{aligned}\right\} \qquad (4.3)$$

で与えられる。ここで θ は一様流が水平方向となす角、$\bar{u}, \bar{v}$ は $\bar{q}$ の (x, y) 成分、$\boldsymbol{i}$ は一様流方向の単位ベクトル、$\boldsymbol{j}$ は $\boldsymbol{i}$ に直交する単位ベクトルである。また $Ri\,(= kgl^2/U^2)$ は Richardson 数である。つぎに境界条件は次式で与えられる。

$$\bar{r} = f(\theta) : \quad \bar{q} = 0 \qquad (4.4)$$

$$\bar{r} \to \infty : \quad \bar{q} \to \boldsymbol{i}, \quad \bar{p} \to 0, \quad \bar{P} \to 0 \qquad (4.5)$$

これから、$Re \ll 1$ および $Ri \ll 1/Re$ を仮定して、この問題をきりつなぎ法で取扱うが、便宜的に

$$Ri = \alpha Re^2 \quad (0 < \alpha < \infty) \qquad (4.6)$$

とおく。$Ri \gg Re^2$ または $Ri \ll Re^2$ のときには、(4.6) とおいて得られた結果に対し、$\alpha \gg 1$ または $\alpha \ll 1$ として取扱えばよい。

(i) きりつなぎ法による解

§2でなされたごとく、内部領域を $\bar{r} \sim O(1)$ の領域、外部領域を $\bar{r} \sim O(1/R_e)$ の領域とし、内部変数 $\mathbb{R}$、外部変数 $\mathbb{r}$ を (2.5) のようにとり、外部展開、内部展開も (2.6)、(2.7) と同一の展開をする。ただし現在のばあい (2.7) の $\bar{P}_0$ は 0 と考えてよい。またつぎのような $\bar{p}$ の展開が追加される。

外部展開： $\bar{p} = R_e^{-1}\left(\varepsilon p_1(\mathbb{r}) + \varepsilon^2 p_2(\mathbb{r}) + \cdots + \varepsilon^n p_n(\mathbb{r}) + \cdots\right)$ (4.7)

内部展開： $\bar{p} = \varepsilon^{-2}\left(\varepsilon P_1(\mathbb{R}) + \varepsilon^2 P_2(\mathbb{R}) + \cdots + \varepsilon^n P_n(\mathbb{R}) + \cdots\right)$ (4.8)

(ii) 内部展開

内部展開 (2.7)、(4.8) を (4.3)、(4.4) に代入するとき、$\mathbb{Q}_n$、P_n、$\mathbb{P}_n$ に対する方程式および境界条件が得られる。$\mathbb{Q}_n$、P_n に対する方程式および物体上の境界条件は (2.8)、(2.9) と同一で、Stokes の方程式をみたしている。したがって、$\mathbb{Q}_n$、P_n については §2 の (ii) で書かれていることが、ここでも全く同じように成立する。また $\mathbb{P}_n$ は、$\mathbb{Q}_n$、P_n が決定されてのち

$$\mathbb{Q}_1 \cdot \nabla \mathbb{P}_n = U_n \sin\theta + V_n \cos\theta - (\mathbb{Q}_2 \cdot \nabla \mathbb{P}_{n-1} + \cdots + \mathbb{Q}_n \cdot \nabla \mathbb{P}_1) \qquad (4.9)$$

で決定される。しかし $\mathbb{P}_n$ は $\mathbb{Q}_{n+1}, P_{n+1}, \cdots$ の決定には関係しないから、現在の展開の範囲内では $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \cdots, \mathbb{P}_n, \cdots$ を計算しなくても物体に働く力は決定できる。

(iii) 外部展開

外部展開 (2.6), (4.7) を (4.3), (4.5) に代入するとき

$$\left.\begin{aligned}&\Delta \mathfrak{q}_n - \nabla p_n - \frac{\partial \mathfrak{q}_n}{\partial x} = \mathfrak{q}_1\cdot\nabla\mathfrak{q}_{n-1} + \cdots + \mathfrak{q}_{n-1}\cdot\nabla\mathfrak{q}_1 + \alpha P_n(\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j})\\ &\nabla\cdot\mathfrak{q}_n = 0\,,\quad \frac{\partial P_n}{\partial x} - u_n\sin\theta - v_n\cos\theta = -(\mathfrak{q}_1\cdot\nabla P_{n-1} + \cdots + \mathfrak{q}_{n-1}\cdot\nabla P_1)\end{aligned}\right\}\quad(4.10)$$

$$r\to\infty:\quad \mathfrak{q}_n\to 0\,,\quad p_n\to 0\,,\quad P_n\to 0\qquad(4.11)$$

ここで $\mathfrak{q}_0$, P_0 はそれぞれ0と考える。さて $\mathfrak{q}_n$ に対する $r\to 0$ での境界条件は §2 のばあいと同じように (2.17) ~ (2.19) が成立つ。

境界条件 (4.11), (2.19) のもとに (4.10) をとくためには、§2, (iii) でなされたように

$$\mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}_{n1} + \mathfrak{q}_{n2}\,,\qquad p_n = p_{n1} + p_{n2}\qquad(4.12)$$

と分割し、$\mathfrak{q}_{n1}$ のみたす方程式および境界条件は (2.20) ~ (2.22) と同一であるとする。したがって $\mathfrak{q}_{n1}$ に対する結果 (2.26) ~ (2.29) はそのまま成立する。

$\mathfrak{q}_{n2}$ に対する方程式および境界条件は

$$\left.\begin{aligned}&\Delta \mathfrak{q}_{n2} - \nabla p_{n2} - \frac{\partial \mathfrak{q}_{n2}}{\partial x} = \mathfrak{q}_1\cdot\nabla\mathfrak{q}_{n-1} + \cdots + \mathfrak{q}_{n-1}\cdot\nabla\mathfrak{q}_1 + \alpha P_n(\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j})\\ &\nabla\cdot\mathfrak{q}_{n2} = 0\,,\quad \frac{\partial P_n}{\partial x} - u_{n2}\sin\theta - v_{n2}\cos\theta = u_{n1}\sin\theta + v_{n1}\cos\theta - (\mathfrak{q}_1\cdot\nabla P_{n-1} + \cdots + \mathfrak{q}_{n-1}\cdot\nabla P_1)\end{aligned}\right\}\quad(4.13)$$

$$r\to\infty:\quad \mathfrak{q}_{n2}\to 0\,,\quad p_{n2}\to 0\,,\quad P_{n2}\to 0\qquad(4.14)$$

$$r\to 0:\quad \mathfrak{q}_{n2}\to \mathfrak{a}_n + o(1)\qquad(4.15)$$

となる。任意の n に対し、上記の方程式をとき $\mathfrak{a}_n$ を決定することは、むつかしいと思われるが、$n=1$ のときには

(4.13) の非線型項は0となり、フーリエ変換を用いて $\mathfrak{V}_{12}$ をつぎのように積分形で求めることができる。

$$\mathfrak{V}_{12}=\frac{\alpha}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{k_2(k_1\cos\theta-k_2\sin\theta)\left\{(k_1\mathbb{k}-k^2\mathbf{i})\sin\theta+(k_2\mathbb{k}-k^2\mathbf{j})\cos\theta\right\}}{k^2(k^2+ik_1)\left[k_1k^2(k^2+ik_1)-i\alpha\left(k_1\cos\theta-k_2\sin\theta\right)^2\right]}e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbf{r}}\,dk_1\,dk_2 \qquad (4.16)$$

ただし $\mathbb{k}=k_1\mathbf{i}+k_2\mathbf{j}$ である。したがって $\mathfrak{a}_1$ はつぎのようにきまる。

$$\left.\begin{aligned}&\mathfrak{a}_1=e_1\mathbf{i}+f_1\mathbf{j}\,,\\&e_1\ \mathrm{or}\ f_1=\frac{\alpha}{i\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dk_1\int_{-\infty}^{\infty}dk_2\,\frac{(k_2^2\ \mathrm{or}\ -k_1k_2)(k_1\cos\theta-k_2\sin\theta)^2}{k^2(k^2+ik_1)\left[k_1k^2(k^2+ik_1)-i\alpha\left(k_1\cos\theta-k_2\sin\theta\right)^2\right]}\end{aligned}\right\}(4.17)$$

(iii) 物体に働く力

$r\to 0$ における $\mathfrak{V}_n$ の漸近形は (2,30) がこのまま成立するから、物体に働く力は (2,40) および (2,41) でよい。いままでのところ $\mathfrak{a}_1$ が求まっているのみであるから、N として

$$\left.\begin{aligned}&N=\varepsilon\left[\left[\{1+\varepsilon(b_1-d)\}e_1+c_1\varepsilon f_1\right]\mathbf{i}+\left[c_1\varepsilon e_1+\{1-\varepsilon(b_1+d)\}f_1\right]\mathbf{j}\right],\\ \text{または}\quad&N=\varepsilon(e_1\mathbf{i}+f_1\mathbf{j})\end{aligned}\right\}(4.18)$$

ととればよい。またこの式は $O(\varepsilon^2)$ まで正確であることを考えるとき、つぎの式と同等であることが分る。

$$\left.\begin{aligned}&\mathbb{F}=4\pi\mu U\bar{\varepsilon}\left[\mathbf{i}+(c_1+f_1)\bar{\varepsilon}\mathbf{j}+O(\bar{\varepsilon}^2)\right]\\ \text{ここで}\quad&\bar{\varepsilon}=\frac{1}{-\log aR_e+\log 4-\gamma-b_1-e_1}\end{aligned}\right\}(4.19)$$

とくに $\alpha \gg 1$ のときには

$$e_1 \sim \frac{1}{3}\left(\log\alpha + 2\log 2 - \cos 2\theta\right) + O(\alpha^{-\frac{1}{3}}),\quad f_1 \sim \frac{1}{3}\sin 2\theta + O(\alpha^{-\frac{1}{3}}) \tag{4.20}$$

となるから、(4.19) の $\bar{\varepsilon}$ として

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{-\log a(R_i R_e)^{\frac{1}{3}} + \frac{4}{3}\log 2 - \gamma - b_1 + \frac{1}{3}\cos 2\theta} \tag{4.21}$$

を用いればよい。(4.17) で示される $e_1(\theta,\alpha)$, $f_1(\theta,\alpha)$ は数値的に計算され、第7図、第8図に示されている。† これらの結果はつぎのようなことを示している。抵抗は α の増加とともにます。また運動方向が水平から鉛直方向に変化するにつれて、増加のしかたが著るしくなる。ほぼ水平運動でかつ α が小さいときには、抵抗を減少さす効果がある。また揚力も α の増加とともにある一定の価へと増加してゆく。運動方向が水平または鉛直のときは揚力に変化を与えない。$\theta = 45°$ 付近で揚力をます効果は最大である。α が小さいときには揚力を減少さす効果がある。

(iv) 対称な物体の回転

非成層流体中を進むときには回転しないような対称な形をもつ物体でも、成層流体中の運動では回転する。物体がどのような回転数で回転するかを知るためには、まづ rot $\mathfrak{F}$ の

---

† e_1, f_1 の数値計算は後で示される g_1 とともに、金子幸臣氏の advise のもとに西島勝一氏によってなされた。

z-成分 ζ が、外部解の $r \to 0$ で、どのようなふるまいをするかを調べる必要がある。$\mathrm{rot}\, q_1$ の $r \to 0$ での性質を調べて、

$$r \to 0 : \qquad \zeta \to [g_1(\theta, \alpha) + o(1)]\, \varepsilon Re + \cdots \tag{4.22}$$

の形をもつことが分る。このときの内部解は、ζ = 一定が解となる。これは内部領域が物体と一所になって角速度 $\frac{1}{2} g_1 \varepsilon Re$ で回転していることを表わしている。(4.16) を用いて g_1 の価を決定すると、物体の角速度 Ω^* は

$$\left.\begin{aligned} \Omega^* &= \frac{1}{2} g_1 Re\, \varepsilon \frac{U}{l}, \\ g_1 &= -\frac{\alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} dk_2 \frac{k_2 (k_1 \cos\theta - k_2 \sin\theta)^2}{(k^2 + ik_1)\left[k_1 k^2 (k^2 + ik_1) - i\alpha (k_1 \cos\theta - k_2 \sin\theta)^2\right]} \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

で与えられる。とくに $\alpha >> 1$ のときには

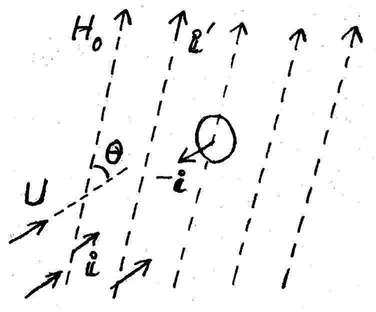
$$g_1(\alpha, \theta) = A(\theta)\alpha^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\sin 2\theta + O(\alpha^{-\frac{1}{3}})$$

の形をもつ。なお $g_1(\alpha, \theta)$, $A(\theta)$ の価は第9図に示されている。この結果によれば、物体は z 方向に関して正の方向に回転する。またその大体の傾向は揚力効果のときとほぼ同一である。ただ α が小さいときに、負の方向の回転はでないと思われる。

最期につぎのことを注意しておきたい。上記の回転の角速度は $O(Re)$ であるから、いままで物体固定の境界条件でとりてきた (iii) までの結果は、回転しているばあいでもそのまま成立する。

§5. 電磁流体中での運動

一様な磁場がある、電気伝導性流体中を物体が磁場に斜めの方向に、一定の速度で運動するばあいを考える。いま物体を固定した座標系をとり、かつつぎのような無次元量を用いる。



第6図

$$\frac{q^*}{U}=\bar{q},\quad \frac{H^*}{H_0}=\bar{H},\quad \bar{p}=\frac{l p^*}{U\nu},\quad \frac{r^*}{l}=\bar{r} \qquad (5,1)$$

ただし H^* は磁場の強さを示す。このとき定常、非圧縮の基礎方程式は

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\bar{q}-\nabla\bar{p}=R_e\,\bar{q}\cdot\nabla\bar{q}-\frac{M^2}{R_m}(\nabla\times\bar{H})\times\bar{H}\\
&\Delta\bar{H}=R_m\left[(\bar{q}\cdot\nabla)\bar{H}-(\bar{H}\cdot\nabla)\bar{q}\right]\\
&\nabla\cdot\bar{q}=0\ ,\qquad \nabla\cdot\bar{H}=0
\end{aligned}\right\} \qquad (5,2)$$

となり、また境界条件は

$$\bar{r}\to\infty:\quad \bar{q}\to i\ ,\ \bar{H}\to i'\ ,\ \bar{p}\to\bar{p}_\infty\ , \qquad (5,3)$$

$$\bar{r}\doteqdot f(\theta):\quad \bar{q}=0\ ,\ \bar{B}_{no}=\bar{B}_{ni}\ ,\ \bar{H}_{to}=H_{ti} \qquad (5,4)$$

である。ここで物体上の磁場の条件は、磁束密度の法線成分および磁場の強さの接線成分の連続を表わしている。また $R_m\ (=Ul\mu_m\sigma)$ は磁気レイノルズ数、$M\ (=\mu_m H_0 l(\sigma/\mu)^{\frac{1}{2}})$ は Hartmann 数で、μ_m は透磁率、σ は電気伝導率である。

以下において、$R_e\ll1$, $R_m\ll1$, $M\ll1$ を仮定して、この

問題をきりつなぎ法で取扱うが、便宜的に

$$R_m = \alpha R_e \quad , \quad M^2 = \beta R_e^2 \qquad (0 < \alpha, \beta < \infty) \tag{5.5}$$

とおいて取扱うことにする。$M \gg R_e$ または $R_m \gg R_e$ のときには得られた結果に対し $\beta \gg 1$ または $\alpha \gg 1$ を適用すればよい。

(i) きりつなぎ法による解

§2, §4 でなされたごとく、内部領域を $\bar{r} \sim O(1)$ の領域、外部領域を $\bar{r} \sim O(1/R_e)$ の領域とし、内部変数 $\mathbb{R}$、外部変数 $\mathbf{r}$ を (2.5) のようにとり、外部展開、内部展開も (2.6), (2.7) と同一の展開をする。ただしつぎのような $\bar{\mathbb{H}}$ の展開が追加される。

外部展開： $\bar{\mathbb{H}} = \mathbf{i}' + \varepsilon \mathbb{h}_1^{(r)} + \varepsilon^2 \mathbb{h}_2^{(r)} + \cdots\cdots + \varepsilon^n \mathbb{h}_n^{(r)} + \cdots$ (5.6)

内部展開： $\bar{\mathbb{H}} = \mathbf{i}' + R_e \left(\varepsilon \mathbb{H}_1(\mathbb{R}) + \varepsilon^2 \mathbb{H}_2(\mathbb{R}) + \cdots + \varepsilon^n \mathbb{H}_n(\mathbb{R}) + \cdots \right)$ (5.7)

ここで

$$\mathbf{i}' = l_1 \mathbf{i} + l_2 \mathbf{j} \qquad (l_1 = \cos\theta , \; l_2 = \sin\theta) \tag{5.8}$$

であり、また物体の電気伝導率は流体のそれと同程度またはそれ以下とする。

(ii) 内部展開

内部展開については §4 のときと同じように、Q_n, P_n に対しては §2, (ii) で書かれていることが全く同じように成立する。Q_n, P_n がきまれば、磁場 $\mathbb{H}_n$ はつぎの式に従う。

$$\Delta \mathbb{H}_n = -\alpha \, (\mathbf{i}' \cdot \nabla) Q_n \tag{5.9}$$

$\mathbb{H}_n$ を決定するためには、(5.9) および物体内部の磁場 $\mathbb{H}_{ni}$

に対する式（物体が絶縁体なら $\Delta \mathbb{H}_{ni}=0$）を境界条件（5.3）および matching によってきまる $R\to\infty$ での条件のもとに、とかなければならない。しかし §4 の $\mathbb{P}_n$ のときのように、現在考慮されている精度の範囲内で物体に働く力を決定するには、これをとく必要はない。ただ外部解 $\mathbb{h}_n$ の $r\to 0$ での境界条件をきめるために、（5.9）を用いて $R\to\infty$ での $\mathbb{H}_n$ の性質を調べる必要はある。

(ii) 外部展開

外部展開（2.6）、（5.7）を（5.2）,（5.3）に代入するとき、$\mathbb{q}_n, p_n, \mathbb{h}_n$ に対する式が得られる。これらの式をとくために §2、§4 のばあいと同じように

$$\mathbb{q}_n = \mathbb{q}_{n1} + \mathbb{q}_{n2} \quad , \quad p_n = p_{n1} + p_{n2} \tag{5.10}$$

と分割し、$\mathbb{q}_{n1}, p_{n1}$ のみたす方程式および境界条件は、（2.20）〜（2.22）と同一であると考える。したがって $\mathbb{q}_{n1}$ に対する結果は今度も（2.26）〜（2.29）がそのまま成立する。

つぎに $\mathbb{q}_{n2}, p_{n2}, \mathbb{h}_n$ に対する方程式および境界条件は

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta \mathbb{q}_{n2} - \nabla p'_{n2} - \frac{\partial \mathbb{q}_{n2}}{\partial x} + \frac{\beta}{\alpha}(\mathbb{i}'\cdot\nabla)\mathbb{h}_n = \frac{\beta}{\alpha}\left[(\nabla\times\mathbb{h}_{n-1})\times\mathbb{h}_1 + \cdots + (\nabla\times\mathbb{h}_1)\times\mathbb{h}_{n-1}\right]\\
&\Delta \mathbb{h}_n - \alpha\frac{\partial \mathbb{h}_n}{\partial x} + \alpha(\mathbb{i}'\cdot\nabla)\mathbb{q}_{n2} = -\alpha(\mathbb{i}'\cdot\nabla)\mathbb{q}_{n1} + \alpha\left[(\mathbb{q}_1\cdot\nabla)\mathbb{h}_{n-1} + \cdots + (\mathbb{q}_{n-1}\cdot\nabla)\mathbb{h}_1\right.\\
&\qquad\qquad\left. - \left\{(\mathbb{h}_1\cdot\nabla)\mathbb{q}_{n-1} + \cdots + (\mathbb{h}_{n-1}\cdot\nabla)\mathbb{q}_1\right\}\right]\\
&\nabla\cdot\mathbb{q}_{n2} = 0 , \qquad \nabla\cdot\mathbb{h}_n = 0
\end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

$$r\to\infty : \quad \mathbb{q}_{n2}\to 0 , \quad p'_{n2}\to 0 , \quad \mathbb{h}_{n2}\to 0 \tag{5.12}$$

$$\left.\begin{aligned} r\to 0 \ :\ & \mathfrak{g}_{n2} \to \mathbb{a}_n + o(1)\,, \\ & \mathbb{h}_n \to \frac{\alpha A_n}{4}\left[\left\{3(\mathbb{i}'\cdot\mathbb{r})\mathbb{i}_n - x_n\mathbb{i}' - (\mathbb{i}'\cdot\mathbb{i})\mathbb{r}\right\}\log r - (\mathbb{i}'\cdot\mathbb{r})x_n\frac{\mathbb{r}}{r^2}\right] \end{aligned}\right\} \quad (5.13)$$

となる。ここで $p'_{n2} = p_{n2} + \frac{\beta}{\alpha}(\mathbb{i}'\cdot\mathbb{h}_n)$ を用いた。また $r\to 0$ での $\mathbb{h}_n$ の境界条件は、(5.10) を用い $R\to\infty$ での $\mathbb{H}_n$ のふるまいを調べ、これとの matching の結果得られたものである。

さて $n=1$ のときには、(5.11) の非線型項が 0 となり、フーリエ変換を用いて $\mathfrak{g}_{12}$ をつぎのような形に求めることができる。

$$\mathfrak{g}_{12} = -\frac{\beta}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\!\!\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(k_1\cos\theta + k_2\sin\theta)^2(k_1\mathbb{k} - k^2\mathbb{i})\,e^{i\mathbb{k}\cdot\mathbb{r}}\,dk_1\,dk_2}{k^2(k^2+ik_1)\left[(k^2+ik_1)(k^2+i\alpha k_1) + \beta(k_1\cos\theta + k_2\sin\theta)^2\right]} \quad (5.14)$$

したがって $\mathbb{a}_1 = e_1\mathbb{i} + f_1\mathbb{j}$ とするとき、(5.14) から

$$\left.\begin{aligned} e_1 \text{ or } f_1 &= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} d\varphi\left(-\sin^2\varphi \text{ or } \sin\varphi\cos\varphi\right)\left[\left(1+\frac{1-\alpha}{F}\right)\log\frac{1+\alpha+F}{2} + \left(1-\frac{1-\alpha}{F}\right)\log\frac{|F-1-\alpha|}{2}\right], \\ F &= \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta(\cos\theta + \sin\theta\tan\varphi)^2} \end{aligned}\right\} \quad (5.15)$$

が得られる。さらに (5.15) を積分して、つぎの解が得られる。†

$$\left.\begin{aligned} & e_1 = \mathrm{Im}\,P + \tfrac{1}{2}\mathrm{Re}(\log Q + R)\,, \qquad f_1 = \mathrm{Re}\,P \\ & P = \left\{\left(\frac{\alpha^2-1}{G^2}+1\right)\Big/Q + 2R/G^2\right\}\beta\sin\theta\, e^{i\theta}\,, \qquad Q = \alpha - \beta e^{2i\theta} \\ & R = \frac{\alpha-1}{G}\log\left(\frac{\alpha+1-G}{\alpha+1+G}\right), \qquad G = \sqrt{(\alpha-1)^2 + 4\beta e^{2i\theta}} \quad (\mathrm{Re}\,G > 0) \end{aligned}\right\} \quad (5.16)$$

† (5.15) より (5.16) の導出は、金子幸臣氏による。

(iii) 物体に働く力

§4 のばあいと同じように物体に働く力は (2.40) および (2.41) でよく、また N としては (4.18) をとればよい。さらに (4.19) もそのまま成立する。とくに $\beta \gg 1$, $\alpha = 1$, $\theta = 0°$ のときには、(5.16), (4.19) よりつぎの結果が得られる。

(a) $\beta \gg 1$ のとき

$$e_1 \sim \log\sqrt{\beta} + \sin^2\theta\,,\quad f_1 \sim -\frac{1}{2}\sin 2\theta\,,\quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{-\log aM - \gamma + \log 4 - b_1 - \sin^2\theta} \qquad (5.17)$$

(b) $\alpha = 1$ のとき

$$e_1 = \frac{1}{4}\log(1 - 2\beta\cos 2\theta + \beta^2) + \frac{\beta(1+\beta)\sin^2\theta}{1 - 2\beta\cos 2\theta + \beta^2}\,,\quad f_1 = \frac{1}{2}\,\frac{\beta(1-\beta)\sin 2\theta}{1 - 2\beta\cos 2\theta + \beta^2} \qquad (5.18)$$

c) $\theta = 0°$ (平行磁場) のとき

$$e_1 = \frac{1}{2}\left\{\log|\beta - \alpha| + \frac{\left(1 - \sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta}\right)}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta}}\log\left|\frac{\sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta} + 1 + \alpha}{\sqrt{(1-\alpha)^2 + 4\beta} - 1 - \alpha}\right|\right\}\,,\quad f_1 = 0 \qquad (5.19)$$

物体が円柱のときに、(2.40), (4.18), (4.19), (5.17), (5.18) から得られる結果は、Oseen 方程式を基礎として得られた橋本教授の結果[6] と、また (2.40), (4.18), (4.19), (5.19) から得られる結果はやはり Oseen 方程式を基礎として得られた吉信教授の結果[7] とそれぞれ一致する。

β, α が任意のとき、物体に働く力の定性的性質は、$\alpha = 1$ のときと比較してあまり変わらないから、ここでは省略する。

§6. 結論

(i) §2、§4、§5 のばあい、いづれも外部解に現われる定数 (a_1 or a_2) をきめるために2重積分を必要とした。ε の order に関して1つだけ精度を上げるためには、2重積分の代りに4重積分を処理しなければならない。さらに ε について精度を上げてゆくためには、多重度がだんだん増加する多重積分を処理してゆかねばならないから、その点に困難が伴うと考えられる。

(ii) 成層流体, 電磁流体中の運動で、浮力や電磁気力が抵抗、揚力、回転などに及ぼす効果は、大体において物理的に予想される通りである。しかしばあいによっては、物理的な予想だけでは判断がつかないで、計算によってはじめて、力の定性的性質がはっきりするばあいもある。例えば成層流体で R_i が小さいときに、浮力の抵抗や揚力に及ぼす影響が逆転することなど、そのよい例であると思われる。

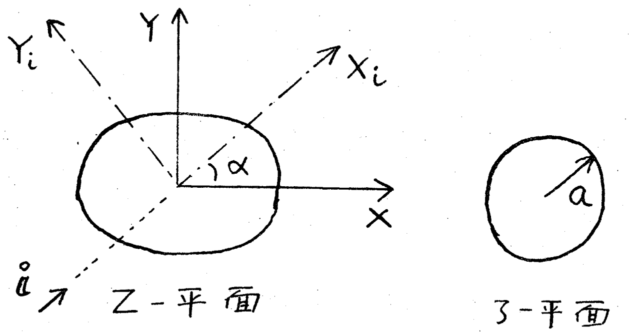
Appendix

a_n, b_n, c_n の決定法:

$Z = X + iY$ とし、第A1図のように Z-平面上の物体が

$$Z = \zeta + \zeta_0 + h(\zeta) \qquad (A1)$$

によって、ζ-平面上の半径 a の円に写像されるとする。こ



第A1図

ここで ζ_0 は定数で、$h(\zeta)$ は $\zeta \gg 1$ で $h(\zeta) \sim o(1)$ とする。

いま Stokes の方程式を満足する複素速度 W を $W = u - iv$ で定義するとき、Z の正則な任意関数 $f(Z)$, $g(Z)$ を用いて、W はつぎのように表わすことができる。[3]

$$
\left.
\begin{aligned}
W &= f'(Z) + \bar{Z} g'(Z) - \bar{g}(\bar{Z}) \\
&= F'(\zeta) + (\bar{\zeta} + \bar{\zeta}_0 + \bar{h}(\bar{\zeta})) \frac{G'(\zeta)}{1 + h'(\zeta)} - \bar{G}(\bar{\zeta})
\end{aligned}
\right\} \quad (A2)
$$

ここで

$$
\left.
\begin{aligned}
G(\zeta) &= -A e^{i\alpha} \log \zeta \\
F'(\zeta) &= A e^{-i\alpha} \left[\log \frac{\zeta}{a^2} + \frac{a^2 e^{2i\alpha}}{\zeta^2} + \frac{\bar{\zeta}_0 e^{2i\alpha}}{\zeta(1 + h'(\zeta))} + e^{2i\alpha} H(\zeta) \right]
\end{aligned}
\right\} \quad (A3)
$$

とおく。ただし $H(\zeta)$ は $|\zeta| > a$ で正則な関数とする。このとき

$$
W = A e^{-i\alpha} \left[\log \frac{\zeta\bar{\zeta}}{a^2} + e^{2i\alpha} \left\{ \frac{a^2}{\zeta^2} - \frac{\bar{\zeta}}{\zeta} - \frac{\bar{h}(\bar{\zeta}) - \bar{\zeta} h'(\zeta)}{\zeta(1 + h'(\zeta))} + H(\zeta) \right\} \right] \quad (A4)
$$

となる。いま物体境界上 $\zeta = a e^{i\theta}$ で $W = 0$ となるように $H(\zeta)$ を定める。このためには次式が成立たねばならない。

$$
H(a e^{i\theta}) = \frac{\bar{h}(a e^{-i\theta}) - a e^{-i\theta} h'(a e^{i\theta})}{a e^{i\theta} (1 + h'(a e^{i\theta}))} \quad (A5)
$$

$H(\zeta)$ は円外で正則であるから

$$
H(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \zeta^{-n} \quad (A6)
$$

のように展開できる。ここで A_n は (A5) を用いて

$$C_n = \frac{a^{n-1}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{(n-1)i\theta}\,\frac{\bar{h}(ae^{-i\theta}) - ae^{-i\theta}h'(ae^{i\theta})}{1 + h'(ae^{i\theta})}\,d\theta \tag{A7}$$

のように決定できる。

$|Z| \gg 1$ で $\zeta = Z + O(1)$ であるから、$Z = Re^{i\theta}$ とおいて、(A4)、(A6) から、

$R \gg 1$:

$$W = Ae^{-i\alpha}\left[\log\frac{R^2}{a^2} - e^{-2i(\theta-\alpha)} + C_0 e^{2i\alpha} + O\left(\frac{1}{R}\right)\right] \tag{A8}$$

が得られる。ここで

$$C_0 = \frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi} \frac{\bar{h}(ae^{-i\theta}) - ae^{-i\theta}h'(ae^{i\theta})}{e^{i\theta}(1 + h'(ae^{i\theta}))}\,d\theta = \gamma e^{i\beta} \tag{A9}$$

とおき、第A1図のように単位ベクトル $\boldsymbol{i}$ および座標軸 X_i をきめるとき

$R \gg 1$:

$$\boldsymbol{q} = 2A\left[\left(\log\frac{R}{a}\right)\boldsymbol{i} - \frac{X_i \boldsymbol{R}}{R^2} + \frac{1}{2}\{1 + \gamma\cos(\beta + 2\alpha)\}\boldsymbol{i} - \frac{\gamma}{2}\sin(\beta + 2\alpha)\boldsymbol{j}\right] + O\left(\frac{1}{R}\right) \tag{A10}$$

いま A, $\boldsymbol{i}$ は任意であるから、$-2A = A_n$, $\boldsymbol{i} = \boldsymbol{i}_n$, $X_i = X_n$, $\alpha = \alpha_n$ とおけば、(A10) は

$R \gg 1$:

$$\boldsymbol{q} = A_n\left[\left\{-\log\frac{R}{a} - \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{2}\cos(\beta + 2\alpha_n)\right\}\boldsymbol{i}_n + \frac{X_n \boldsymbol{R}}{R^2} + \frac{\gamma}{2}\sin(\beta + 2\alpha_n)\boldsymbol{j}_n\right] + O\left(\frac{1}{R}\right) \tag{A11}$$

の形となる。(A11) と (2.10) との比較により、(2.12) が得られる。

文　　献

1. S. Kaplun : Fluid Mechanics and Singular Perturbations (Academic Press, New York, 1967) P52.

2. I. Proudman & J.R.A. Pearson : J. Fluid Mech. **2** (1957), 237.

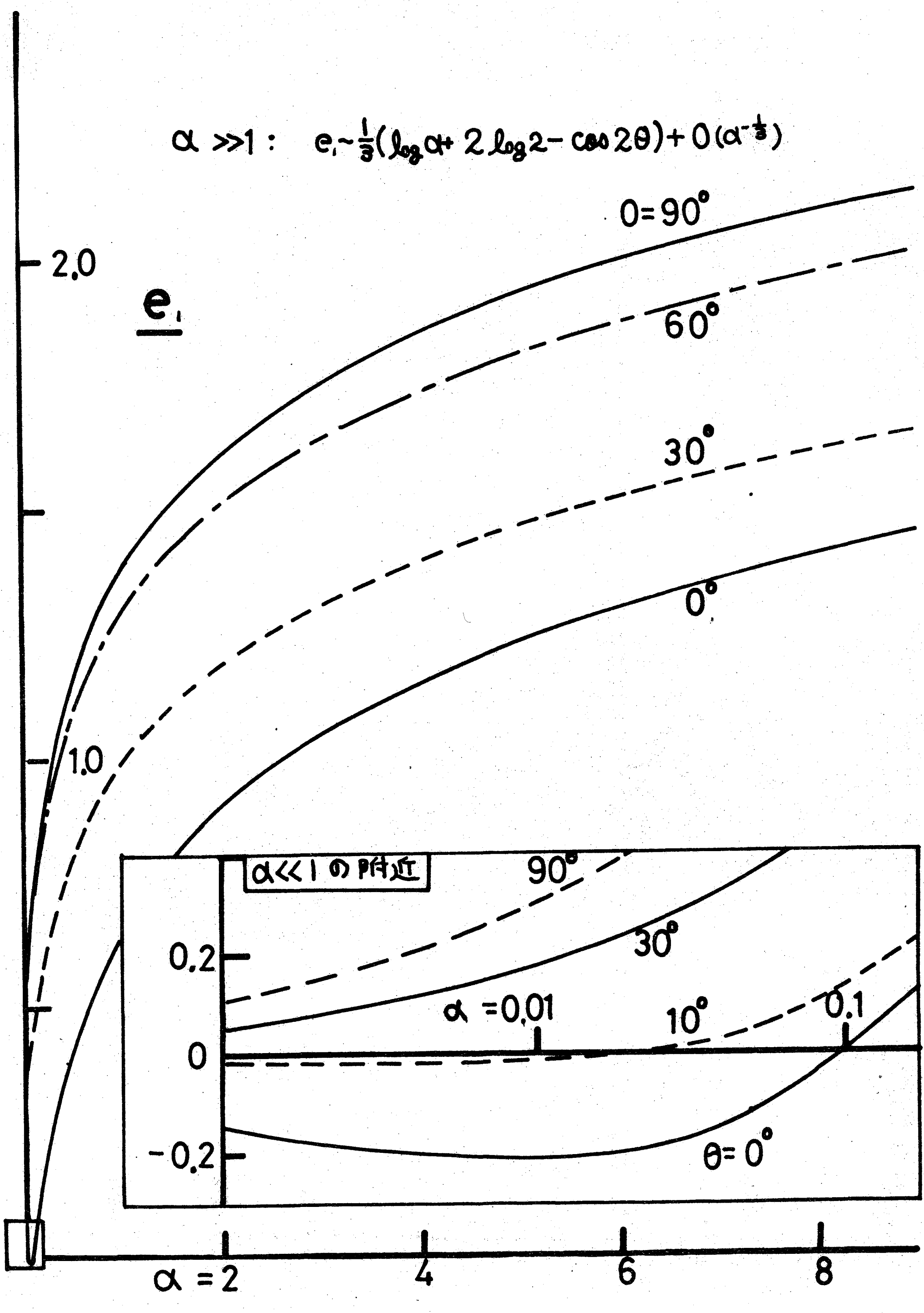
3. I. Imai : The Second International JSME Symposium (Sept. 1972), Fluid Machinery and Fluidics, 2. 15.

4. Y. Takaishi : J. Phys. Soc. Jap. **10** (1956), 1092.

5. Y. Takaishi : J. Phys. Soc. Jap. **13** (1958), 496.

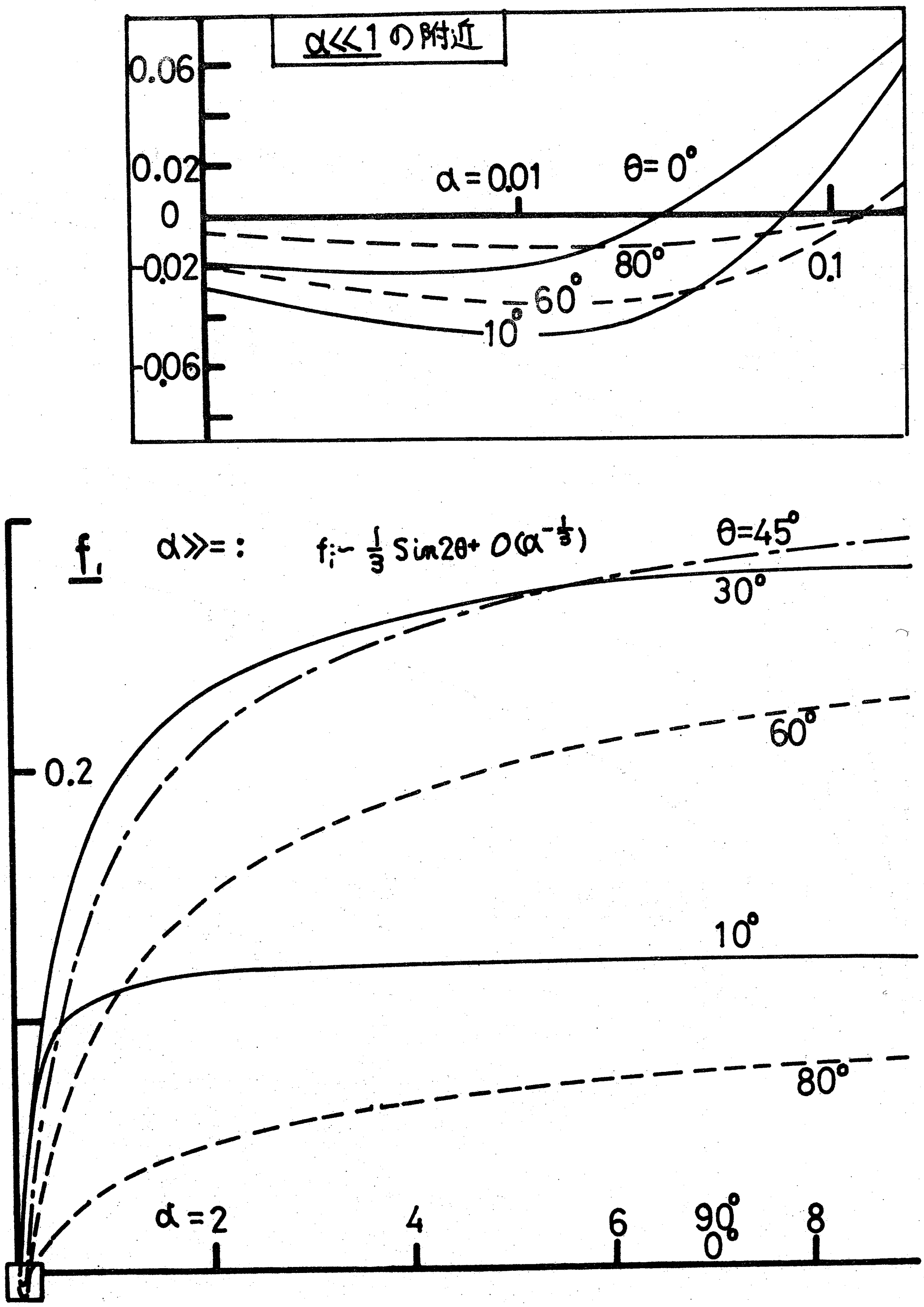
6. H. Hasimoto : Rev. mod. Phys. **32** (1960), 860.

7. H. Yosinobu : J. Phys. Soc. Jap. **15** (1960), 175.

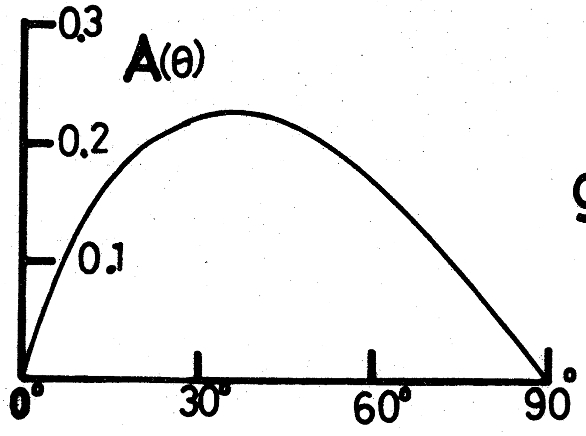

α >>1 : e₁~⅓(log α+ 2 log 2 − cos 2θ) + O(α^{-1/3})
θ=90°
60°
30°
0°
2.0
1.0
e₁
α<<1 の附近
90°
30°
10°
θ= 0°
α =0.01
0.1
0.2
0
-0.2
α =2
4
6
8

34

第 7 図

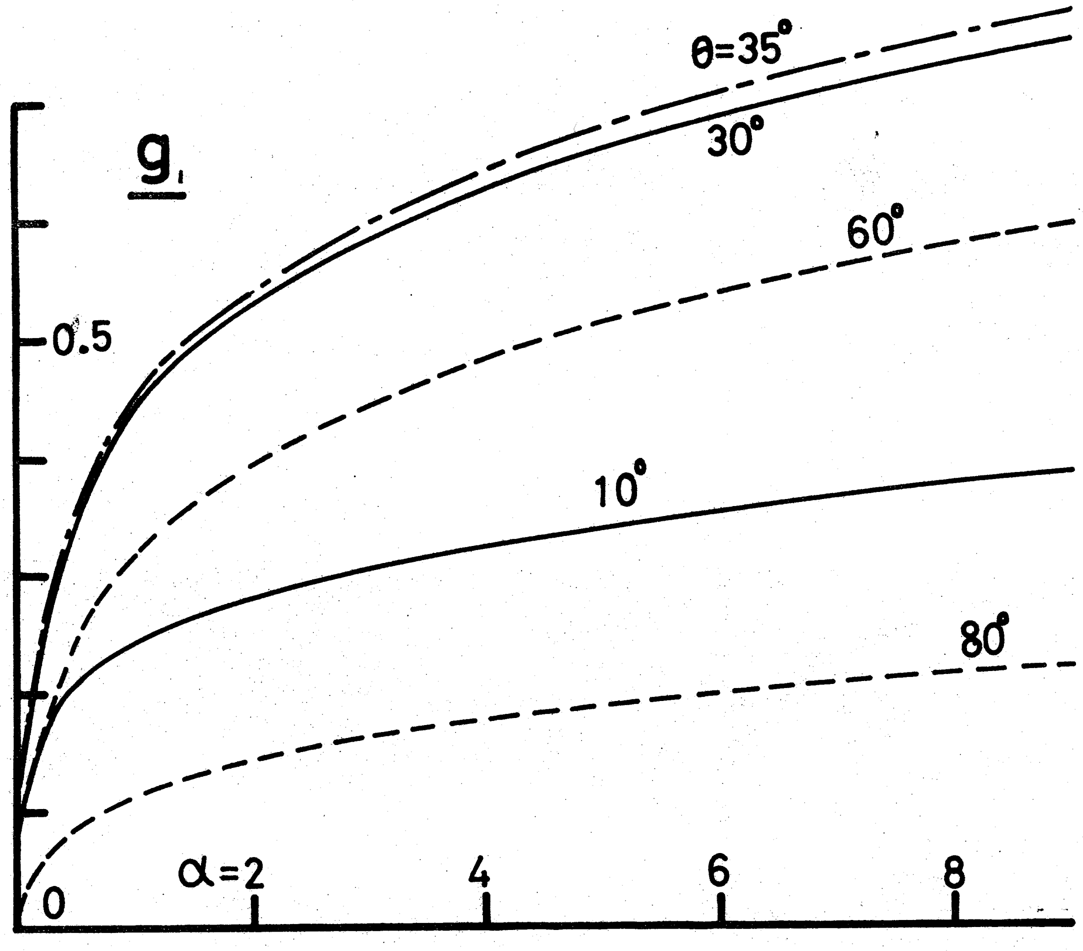

α≪1の附近
0.06
0.02
0
-0.02
-0.06
α=0.01
θ=0°
80°
60°
10°
0.1
f₁
α≫=:
f₁~ 1/3 Sin2θ+ O(α^-1/3)
θ=45°
30°
60°
0.2
10°
80°
α=2
4
6
90°
0°
8

第 8 図



$\alpha \gg 1$:

$$g_1 \sim A(\theta)\alpha^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3}\sin 2\theta + O(\alpha^{-\frac{1}{3}})$$



第 9 図