数理解析研究所講究録
第237巻 1975年 126-138

Gorenstein 環となる二次元 normal singularity について.

都立大　　　渡辺敬一

§0. 序　　特異点を記述するとは?

ある理論が豊かなものになる為には例が豊富にある事が不可欠であるように思われる。代数幾何に於ては多くの人々の努力の結果、種々の多様体が知られているし、また、新らしい例を発見する事が新らしい理論の出発点となる事もよくある事である。ところで、特異点(この文に於て、"特異点" ≒ "complex analytic space の一点に於ける local ring")の理論に於て今迄に調べられている特異点はほとんど何種類かに整理できてしまうように思われる。例えば超曲面の特異点は(それを一まとめに"超曲面の特異点"とまとめてしまうが)よく調べられているものが沢山あるが、方程式2つ以上の完全交叉の特異点となると、方程式を書くのでも段々憂うつになるし、増して、当てずっぽに方程式を書いていって完全交叉でない良い特異点を得る事はほとんど不可能である。

しかし analytic space の場合 resolution の理論と blowing-down の理論によって complex manifold の exeptional set を"つぶす"事によってすべての normal な特異点が得られるわけだし、特に2次元 normal の場合"グラフ"を見る事によって、すべての2次元 normal singularity が記述できてしまったような幻想を持ち得る。この稿に於ては、逆に、「どのような"グラフ"が超曲面或いは complete intersection の特異点のグラフとなり得るか」を一つのテーマとする。だが、実は"complete intersection になる"という性質は、この場合扱い難く、少し弱い条件におきかえて簡単な一つの必要条件を与える。もう一つこの稿で扱かうのは、"topological"な特異点の分類と"analytic"な特異点の分類とのへだたりである。種数 g の Riemann 面上の degree -1 の line bundle の 0-section をつぶして得られる特異点は"topological"には同じ特異点だが、analytic には一見全く異った特異点がでて来る事及び、この line bundle が Riemann 面の一点 P と対応している時は、この特異点の代数的構造と"Weierstrass の gap sequence"が密接な関係にある事を示す。

尚、文末になってしまったが、この問題について藤木明氏に大変に有益な助言を受けた事を付記し、同氏に感謝の意を表したい。

§1. 二次元 normal singularity のグラフ.

(X, x) を二次元 normal singularity とする.

$\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ を singularity の resolution とする。つまり、

(i) $\tilde{X}$ は smooth.

(ii) π は proper.

(iii) $\pi : \tilde{X} - \pi^{-1}(x) \longrightarrow X - x$ は biholomorphic

便宜上、次を仮定しよう。

$A = \pi^{-1}(x) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ を既約成分への分解とするとき、

(iv) 各 A_i は non-singular curve.

(v) A_i たちのうち三つが一点で交わる事はない.

(vi) A_i と A_j が交るわとき、各交点に於て A_i と A_j は transversal に交わる.

この条件をみたす resolution は存在し、そのうち minimal なものが唯一つ存在する。([L]:V章参照)

このとき、A_i と A_j の intersection number $A_i \cdot A_j$ を並べた行列 $(A_i \cdot A_j)_{i,j=1,\cdots,n}$ を (X, x) に対応する交叉行列という.

このとき、交叉行列は negative definite である事が知られている。また逆に $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ が smooth な $\tilde{X}$ に埋めこまれている時、A が exceptional (i.e. $\exists\, \tilde{X} \xrightarrow{\pi} X$, $\pi(A) = x$, $\cancel{\pi|_{\tilde{X}-\pi^{-1}(x)}}$ $\pi|_{\tilde{X}-A}$ は biholomorphic) なる為の必要十分条件が $(A_i \cdot A_j)$ が negative-definite である事である。(Grauert; [L] IV章参照)

$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i \hookrightarrow \tilde{X}$ に対応するグラフを次のように定める。
（各 A_i は non-singular, compact curve, genus g_i で前頁の条件 (v), (vi) もみたすとする。）

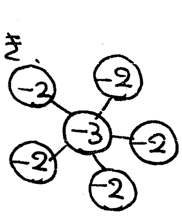
(i) 各 A_i に○を対応させ，○の中に自己交点数 A_i^2 を記入．

(ii) ○の下に g_i を $\underset{[g_i]}{○}$ と記入する．但し $g_i=0$ の時は何も書かない．$\underset{[0]}{○}=○$．

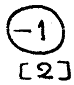
(iii) A_i と A_j が交わっているとき対応する二つの○を — で結ぶ．但し二点以上で交わっているときはその数だけ —— をひく．

$\pi : \tilde{X} \longrightarrow X$ が singularity (X, x) の resolution, $A=\pi^{-1}(x)$ のとき，$A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ のグラフの事をこの特異点のグラフという。グラフを与える事は、この特異点の topology を与える事と同値である。(X, x) の analytic structure は、① curve A_i ($g_i>0$ のとき)、② A_i と A_j がどこで交わるか、また ③ A の $\tilde{X}$ への埋め込み方によって変化する。

例　$w_5(x, y)$ が x, y に関する二乗因子をもたない 5 次同次式のとき、
$\{z^2-w_5(x,y)=0\}\subset \mathbb{C}^3$ の特異点のグラフは



$\{z^2-w_5(x,y^2)=0\}\subset \mathbb{C}^3$ の特異点のグラフは、



w のとり方を変えたとき、上の式で与えられる特異点 これらの特異点は同型ではないが、topology は同じである。~~5次同次式~~ は x, y の座標

変換を除くと上は二次元、下は三次元あるが、これはそれぞれ②，①の次元に対応している。

グラフを決めれば自動的に analytic structure も決まってしまう特異点については Laufer [6] がある。この稿では同じグラフでも大変違う singularity が出て来得るという例を示す。

§2. Gorenstein 環になり得るグラフ.

(X, x) を2次元 normal singularity とする。2次元 normal $\Rightarrow$ Macaulay だから、X は dualizing sheaf ω_X をもつ。$\omega_X|_{X-x}$ は（$X-x$ は non-singular だから）$X-x$ 上の holomorphic 2-forms の germ のなす sheaf と一致する。$i: X-x \hookrightarrow X$ として，$\omega_X = i_*(\Omega^2_{X-x})$ と定義する事も可能である。また，$X \hookrightarrow D$（$\mathbb{C}^n$ の domain）の埋め込みが与えられているとき，$\dim D - \dim X = r$ として，

$\omega_X \cong \mathcal{E}xt^r_{\mathcal{O}_D}(\mathcal{O}_X, \Omega^n_D)$ とも書ける。また，$\pi: \tilde{X} \longrightarrow X$ を resolution とするとき、$\omega_X \cong \pi_*(\Omega^2_{\tilde{X}})$ でもある。

定義－定理（[4],[5] 参照）次は同値である。

(i) $\omega_{X,x} \cong \mathcal{O}_{X,x}$.

(ii) $\omega_X|_{X-x} \cong \mathcal{O}_X|_{X-x}$.

(iii) $\Omega^2_{\tilde{X}}|_{X-A} \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}|_{X-A}$ 　但し，$A = \pi^{-1}(x) = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$

(iv) $\Omega^2_{\tilde{X}} \cong \mathcal{O}_{\tilde{X}}(\sum_{i=1}^{n} n_i A_i)$ $(\exists n_i \in \mathbb{Z})$.

この同値な条件が成立するとき，$\mathcal{O}_x$ は Gorenstein 環であるという。（この定義は2次元 normal の時しか通用しない．一般には，$\mathcal{O}_x$ が Gorenstein $\Leftrightarrow$ $\mathcal{O}_x$ は Macaulay かつ $\omega_x \cong \mathcal{O}_x$．但し，$\omega_X = \mathcal{E}xt^{r}_{\mathcal{O}_D}(\mathcal{O}_X, \Omega^n_D)$ で定義する．）

<u>例1</u>. (X, x) が complete intersection（特に，hypersurface）なら $\mathcal{O}_{X,x}$ は Gorenstein（$\mathcal{E}xt$ がすぐ計算できる）．

<u>例2</u>. (X, x) が rational singularity のとき，
$\mathcal{O}_x$ が Gorenstein $\Leftrightarrow$ (X, x) は rational double point.

<u>例3</u>. (X, x) が $\underset{[1]}{(-n)}$ なるグラフをもつとき，$\mathcal{O}_x$ は Gorenstein．このとき，$n \leqq 3$ で hypersurface，$n \leqq 4$ で complete intersection になる。$n \geqq 5$ のとき，(X, x) は $\mathbb{C}^n$ の中で方程式 $\frac{1}{2}n(n-3)$ 本（全部2次同次式）で定義される．また二つの特異点 (X, x) と (X', x') が共に elliptic curve 一本で resolve され，その elliptic curve をそれぞれ C，C' とし $C^2 = C'^2 = -n$ とするとき，$(X, x) \cong (X', x') \Leftrightarrow C \cong C'$ である。なお，genus が 2 以上の curve についてはこのような事は成立しない。

次に，あるグラフが与えられたとき，そのグラフに属する singularity で，Gorenstein 環となるものが存在するかどうかを考えよう。 $\tilde{X}$ の canonical bundle $(= \Omega^2_{\tilde{X}})$ を K と書く時，

$KA_i = 2(g(A_i)-1) - A_i^2$　（ $g(A_i)$ は A_i の genus ）だから、グラフを決めると $K \cdot A_i$　$(i=1, \cdots, n)$ は決まる。一方，もし (X, x) が Gorenstein 環ならば、$K \equiv \sum_{i=1}^{n} m_i A_i$　$(m_i \in \mathbb{Z})$ 故に、ベクトル表示で書くならば

$$\begin{bmatrix} KA_1 \\ KA_2 \\ \vdots \\ KA_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & A_iA_j & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} \quad \text{又は、} \quad \begin{bmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & A_iA_j & \\ & & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} KA_1 \\ \vdots \\ KA_n \end{bmatrix}$$

ゆえに、次の判定法を得る。

__公式__　もし (X, x) が Gorenstein 環（特に超曲面、complete intersection）ならば、その resolution のグラフに於て、

$$\begin{bmatrix} & & \\ & A_iA_j & \\ & & \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} KA_1 \\ \vdots \\ KA_n \end{bmatrix}$$ は整数値の vector である。

（上の条件をみたすグラフを以下本稿で"条件 (G) をみたす"と呼ぶ事にしよう）

以下に"条件 (G)"をみたすグラフとみたさないグラフの一例を示そう。

条件 (G) をみたすグラフとそれを与える方程式の一例

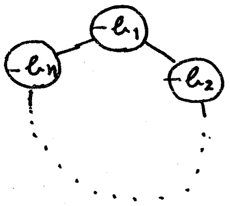
$(-n)$ $[g]$　　但し $n \mid (g-2)$

$$z^2 + w_{2g+1}(x, y^2) = 0$$

（w_{2g+1} は $2g+1$ 次同次式で

左側によく似ているが (G) をみたさないグラフ．

$(-n)$ $[g]$　　但し $n \nmid (g-2)$

multiple factorを持たぬもの。 このとき $n=1$)	
rational double pointのグラフ 例えば $\underset{\underset{(-2)}{\vert}}{}$ $(-2)-(-2)-\underset{\underset{(-2)}{\vert}}{(-2)}-(-2)-(-2)$ $z^2+x^3+y^4=0$	rational double pointのグラフの一ヶ所以上の-2が$-n$ ($n\geqq 3$) に代っているもの
$\underbrace{(-2)-\cdots-(-2)}_{n-1}-\underset{[1]}{(-2)}-\underbrace{(-2)-\cdots\cdots-(-2)}_{n-1}$ $z^2+w_4(x,y)=0$ ($n\geqq 1$) (w_4は四次同次式でmultiple factorナシ)	$\underbrace{(-2)-\cdots-(-2)}_{l}-\underset{[1]}{(-2)}-\underbrace{(-2)-\cdots-(-2)}_{m}$ 但し, $l > m \geqq 0$
 (実際にGorenstein環を与える事が可能)	

? 条件 (G) をみたすグラフに対応して $A=\bigcup_{i=1}^{n} A_i \hookrightarrow \tilde{X}$ なる埋め込みで, $K_{\tilde{X}}=\sum n_i A_i$ なるものが存在するか.

§3. $\underset{[g]}{(-1)}$ なる特異点について.

A : non-singular curve of genus $g \geqq 1$.

$P \in A$; A の点.

$\tilde{X}$: $-P$ に対応する line bundle の total space. A は $\tilde{X}$ の 0-section と同一視して $A \hookrightarrow \tilde{X}$ と思う。このとき $A^2=-1$ である.

(X, x) を $\tilde{X} \supset A$ を一点につぶしてできた特異点とする。このとき勿論 (X, x) に対応するグラフは $\underset{[g]}{\textcircled{-1}}$ である。このような特異点の例としては $(a, b) = 1$ のとき，

$z^a + w_b(x, y^a) = 0$ （$w_b(x, y)$: mult. factor もたない同次多次式．このとき $g = \frac{1}{2}(a-1)(b-1)$ ）．が挙げられる．また，逆に $g = 1$ のとき $\underset{[1]}{\textcircled{-1}}$ なる特異点は $z^2 + w_3(x, y^2) = 0$ に限られる。（Orlik-Wagreich [7]，Wagreich [8] 参照）

この特異点を $\mathcal{O}_{A,P}$ と表わすと，$\mathcal{O}_{A,P}$ は次の affine ring $R_{A,P}$ に対応する analytic set の local ring となる。

$$R_{A,P} = \sum_{n \geq 0} \Gamma(A, \mathcal{O}_A(nP)).$$

つまり，$R_{A,P} = \mathbb{C}[z_1, \cdots, z_n]/(f_1, \cdots, f_m)$ のとき，$\mathcal{O}_{A,P} = \mathbb{C}\{z_1, \cdots, z_n\}/(f_1, \cdots, f_m)$.

便宜上以下に於て $\mathcal{O}_{A,P}$ の代りに $R_{A,P} = R$ を考える。

ここで "Weierstrass の gap sequence" の理論を復習しよう．$\Gamma(A, \mathcal{O}(nP))$ の元は A 上の meromorphic function で P で高々 order n の極をもち他の点では holomorphic なものと同一視できる．

$\therefore \forall n \in \mathbb{Z}$，$\dim \Gamma(A, \mathcal{O}(nP)) - \dim \Gamma(A, \mathcal{O}((n-1)P)) = 0$ または 1．

$$H_{A,P} = \{ n \in \mathbb{Z} \mid \dim \Gamma(A, \mathcal{O}(nP)) - \dim \Gamma(A, \mathcal{O}((n-1)P)) = 1 \}$$

とおくと，$h_1, h_2 \in H_{A,P} \Rightarrow h_1 + h_2 \in H_{A,P}$，$0 \in H_{A,P}$．

また Riemann-Roch の定理から容易にわかるように，

$\#\{ n \in \mathbb{N} \mid n \notin H_{A,P} \} = g$．$n > 0$ $n \notin H_{A,P}$ なる n を P の gap といい，gap を小さい順に並べた列 $(n_1, n_2, \cdots, n_g)$ を

Pに於ける Weierstrass の gap sequence という。また，

$$w(P)=\sum_{i=1}^{g}(n_i-i)$$

を P の Weierstrass weight と云い，$w(P)>0$ なる P を A の Weierstrass point という。このとき，(Gunning, [3] P123)

$$\sum_{P\in A} w(P)=g(g^2-1)$$

が成立する。特に Weierstrass point の個数は有限である。つまり，有限個を除くすべての A の点 P に於て，P に於ける gap sequence は $(1,2,\cdots,g)$ である。また $w(P)$ の最大値は（g を決めたとき，ある A に対し）$\frac{1}{2}g(g-1)$ でこのとき P は hyperelliptic point，P の gap seq. は $(1,3,5,\cdots,2g-1)$。P が hyperelliptic point $\Leftrightarrow$ $2\in H_{A,P}$.

さて，$R_{A,P}=\sum_{n\geq 0}\Gamma(A,\mathcal{O}(nP))$ に戻ろう。$g\geqq 1$ より，$\dim_{\mathbb{C}} R_1=1$ である。（$R_n=\Gamma(A,\mathcal{O}(nP))\subset R$ とおく）.
$t\in R_1$，$t\neq 0$ をとると，$tR\subset R$ は素 ideal である事が容易に証明できて，

$$\dim_{\mathbb{C}}(R/tR)_n=\begin{cases}1 & (n\in H_{A,P})\\ 0 & (n\notin H_{A,P})\end{cases}$$

$\mathcal{O}_{A,P}$ ~~R~~ の multiplicity $=$ ~~min~~ $\{n>0 \mid n\in H_{A,P}\}$.

$\mathcal{O}_{A,P}$ の embedding dim. $=$ ~~min~~ $H_{A,P}$ の最小生成元の個数$+1$

$\mathcal{O}_{A,P}$ が Gorenstein $\Leftrightarrow$ $2g-1\notin H_{A,P}$ $\Leftrightarrow$ $gP\equiv K_A$.

$\mathcal{O}_{A,P}$ が complete intersection $\Leftrightarrow$ $H_{A,P}$ が complete intersection

特に，$\mathcal{O}_{A,P}$ が hypersurface $\Leftrightarrow$ $H_{A,P}$ は2個の元で生成される.

等々が成り立つ。特に $w(P)=0$ なる P に対しては，$\mathcal{O}_{A,P}$ の multiplicity $=g+1$，embedding dimension $=g+2$，$\mathcal{O}_{A,P}$ は $\mathbb{C}\{z_1,\dots,z_{g+2}\}$ の中で，$\frac{1}{2}g(g+1)$ 個の方程式で定義され，($g\geqq 2$ のとき) complete intersection とは程遠い。

<u>例</u> (i) P が hyperelliptic point のとき，

$$\mathcal{O}_{A,P}\cong\mathbb{C}\{x,y,z\}/(z^2+w_{2g+1}(x,y^2)).$$

(ii) $y^2+y=x^5$ で与えられる Riemann 面で ($g=2$ となる) $P=(0,0)$ とすると，$w(P)=0$ で，

$$\mathcal{O}_{A,P}\cong\mathbb{C}\{t,x,y,z\}/(z^2+zt^5-x^2y,\ x^3-yz-yt^5,\ y^2-xz).$$

$$\mathcal{O}_{A,P}/t\cdot\mathcal{O}_{A,P}\cong\mathbb{C}\{s^3,s^4,s^5\}.$$

? 勝手に semigroup $H\subset\mathbb{N}$ で，(i) $0\in H$ ~~(iii)~~

(ii) $\#\{n \mid n>0,\ n\notin H\}=g$ を与えたとき，genus g の Riemann 面 A と $P\in A$ があって $H_{A,P}=H$ となるか？

(御存知の方は教えて下さい。)

もし上の結果が正しければ，[9] を経由する事によって，

<u>Theorem.</u>(?) 勝手に正整数 n,m を

(i) $m\geqq 2^{n-2}$，$n\geqq 3$ をみたすように与えるとき，2次元 normal singularity $\mathcal{O}$ で multiplicity m，embedding dimension n なるものが存在する。

(ii) $m\geqq n\geqq 5$ をみたすように与えるとき，2次元 normal singularity $\mathcal{O}$ で，$\mathcal{O}$ は Gorenstein で complete intersection でなく，

multiplicity m, embedding dimension n であるものが存在する。

$\mathcal{O}_{A,P}$ の geometric genus を計算すると,(Wagreich [8] のマネをする。)

$$p_g(\mathcal{O}_{A,P}) = \frac{1}{2} g(g+1) + w(P)$$

が得られる。[2] によって, $\mathcal{O}_{A,P}$ と $\mathcal{O}_{A',P'}$ (A と A' は共に genus g) が同じ analytic family に属する $\Longleftrightarrow$ $p_g(\mathcal{O}_{A,P}) = p_g(\mathcal{O}_{A',P'})$ $\Longleftrightarrow$ $w(P) = w(P')$.

References.

[L] Laufer: Normal two-dimensional singularities; Annals of Mathematics Studies 71, Princeton Univ. Press (1971)

[1] M. Artin: On isolated rational singularities of surfaces. Amer. J. 88 (1966), 129~136.

[2] 藤木 明: 修士論文.

[3] Gunning: Lectures on Riemann Surfaces, Princeton Mathematical Notes (1966)

[4] Hartshorne - Ogus: On the factoriality of Local Rings of small embedding codimension, Communications in alg. 1, 415~437 (1974)

[5] Herzog - Kunz: Der kanonische Modul eines Cohen-

- Macaulay Rings. Springer Lecture Notes 238, (1971)

[6] Laufer : Taut Two-Dimensional Singularities, Math. Ann. 205, 131~164 (1973)

[7] Orlik-Wagreich : Isolated singularities with $\mathbb{C}^*$-action, Annals of Math. 93 (1971), 205~228

[8] Wagreich : Elliptic singularities of surfaces, Amer. J. 92 (1970), 419~454.

[9] K. Watanabe : Some examples of one-dimensional Gorenstein domains, Nagoya Math. J. 49 (1973), 101~109.