数理解析研究所講究録
第 238 巻 1975 年 148-183

既約な概均質ベクトル空間の1例について

名大理 関口次郎

$$G = SL(3) \times SL(3) \times GL(2)$$
$$V = \{(X, Y) \mid X, Y \in M(3)\}$$

群 G の V への作用は

$$g = (A, B, C) \in G,\ x = (X, Y) \in V \qquad C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{のとき}$$
$$g \cdot x = (AXB^{-1},\ AXB^{-1})\,{}^tC$$
$$= (A(aX + bY)B^{-1},\ A(cX + dY)B^{-1})$$

と定義するとき，(G, V) は既約な概均質ベクトル空間になる。この概均質ベクトル空間 (G, V) の軌道分解と，各軌道の余法束の余次元1の交わりを図示することが，本論の目的である。具体的な計算は，この研究集会参加者全員によってなされ，これはその結果の報告である。

1. 軌道分解 (orbital decomposition)

はじめに，V を軌道に分解する。V の元は一般に $[X, Y]$ とあらわすことにする。明らかに $\operatorname{rank} X \leq \operatorname{rank} Y$ なるものに制限してよい。X の rank が 0, 1, 2, 3 の場合に応じて G の作用によってそれぞれ

$[0]$ $\quad (0,\ Y)$

$[\mathrm{I}]$ $\quad \left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix},\ Y\right)$ $\quad \mathrm{rank}\,Y \geq 1$

$[\mathrm{II}]$ $\quad \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix},\ Y\right)$ $\quad \mathrm{rank}\,Y \geq 2$

$[\mathrm{III}]$ $\quad \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix},\ Y\right)$ $\quad \mathrm{rank}\,Y = 3$

の4つの型に移り得る。

[0]-型はGの作用によって次のいずれかに移り得る。

$[0]_1$ $\quad (0,\ 0)$

$[0]_2$ $\quad \left(0,\ \begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\right)$

$[0]_3$ $\quad \left(0\ \begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\right)$

$[0]_4$ $\quad \left(0\ \begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\right)$

[I]-型 $\quad Y = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} \overbrace{\quad}^{1} & \overbrace{\quad}^{2} \end{array} & \\ \begin{bmatrix} y & y_1 \\ y_2 & Y' \end{bmatrix} & \begin{array}{l}]1 \\ ]2 \end{array} \end{array}$ とおく。 Y' の rank が 0, 1, 2

である場合にそれぞれ

$[\mathrm{I}]$-0 $\quad \left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}y_{11}&y_{12}&y_{13}\\y_{21}&&\\y_{31}&&\end{bmatrix}\right)$

$[\mathrm{I}]$-I $\quad \left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}y_{11}&y_{12}&y_{13}\\y_{21}&1&\\y_{31}&&\end{bmatrix}\right)$

$[\mathrm{I}]$-II $\quad \begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}y_{11}&y_{12}&y_{13}\\y_{21}&1&\\y_{31}&&1\end{bmatrix}$

に移り得る。 明らかにいずれの場合も，$y_{11} = 0$ としてよい。

[I]-0型の場合，次のいずれかに移る。

[I]$_1$ $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&\\&&\\&&\end{bmatrix}\right)$

[I]$_2$ $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&&\\1&&\\&&\end{bmatrix}\right)$

[I]$_3$ $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&\\1&&\\&&\end{bmatrix}\right)$

[I]-I型の場合，次のいずれかにうつる。

[I]$_4$ $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&0\end{bmatrix}\right)$

[I]$_5$ $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\0&&\end{bmatrix}\right)$

[I]$_6$ $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&0\\&1&\\1&&\end{bmatrix}\right)$

[I]$_7$ $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}\right)$

[I]-III型の場合，次に移りうる。

[I]$_8$ $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\right)$

<u>[II]-型</u>　Yの(3, 3)-成分が零でないか，零であるかによって場合分けする。

(3, 3)-成分が零でない場合，$Y=\begin{bmatrix}Y'&\\&1\end{bmatrix}$の場合を考えればよい。　2×2行列$Y'$をJordanの標準形になおすことは可能だから，

[II]-I　$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&&\\&\beta&\\&&1\end{bmatrix}\right)$

[II]-II　$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&1&\\&\alpha&\\&&1\end{bmatrix}\right)$

の場合をしらべればよい。

[II]-I 型，$\alpha=\beta$ のときは

$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&&\\&\beta&\\&&1\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&1\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\right)\cdots[\mathrm{I}]_3\text{型}$$

$\alpha\neq\beta$ のときは

$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&&\\&\beta&\\&&1\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha-\beta&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}\right)\cdots[\mathrm{II}]_1$$

[II]-II 型の場合

$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&1&\\&\alpha&\\&&1\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}\right)\cdots[\mathrm{II}]_2$$

Y の $(3,3)$ 成分が零のとき $Y=\begin{array}{cc|l}\overset{2}{}&\overset{1}{}&\\ \hline \end{array}\!\!\begin{array}{l}\begin{bmatrix}Y'&y_1\\y_2&\end{bmatrix}\begin{matrix}2\\1\end{matrix}\end{array}$ として Y' を Jordan の標準型になおすことが可能だから，

[II]-I′　$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&&*\\&\beta&*\\ *&*&\end{bmatrix}\right)$

[II]-II′　$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&1&*\\&\alpha&*\\ *&*&\end{bmatrix}\right)$

の場合をしらべればよい。

[II]-I′ の場合，$\alpha=\beta$ のとき

$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&&*\\&\beta&*\\ *&*&\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&*\\&&*\\ *&*&\end{bmatrix}\right)$$

rank $Y\geqq 2$ の場合を考えればよいから

$$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\0&1&\end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&0\\&0&1\\1&&\end{bmatrix}\right)$$
$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\1&&\end{bmatrix}\right)$$
$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&0&1\\&1&\end{bmatrix}\right)$$

のいずれかに移りうる。ところで

$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&0\\&0&1\\1&&\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\0&1&\end{bmatrix}\right)$$
$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\1&&\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\1&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}\right)$$

だから，本質的には次だけが新しいもの

$[\mathrm{II}]_2$ $\quad\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\0&1&\end{bmatrix}\right)$

次に $\alpha\neq\beta$ のとき $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&y_{13}\\&&y_{23}\\y_{31}&y_{32}&\end{bmatrix}\right)$ を考えればよい．rank $Y=0,1$ のときは，X と Y をいれかえることによってすでにわかっている。 rank $Y=2$ のとき $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\alpha\\&&0\\\beta&1&\end{bmatrix}\right)$ あるいは $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\alpha\\&&1\\\beta&0&\end{bmatrix}\right)$ の形のものを考えればよい。

$\alpha\neq0$ のとき $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\alpha\\&&0\\\beta&1&\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&1\\&&0\\\beta&1&\end{bmatrix}\right)\sim\begin{cases}\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\1&&\end{bmatrix}\right)&(\beta\neq0)\\\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\&1&\end{bmatrix}\right)&(\beta=0)\end{cases}$

$\alpha=0$ のとき $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\alpha\\&&0\\\beta&1&\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&&\\\beta&1&\end{bmatrix}\right)\sim\begin{cases}\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\1&&\end{bmatrix}\right)&(\beta\neq0)\\\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&1&\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&&\\&1&\end{bmatrix}\right)&(\beta=0)\end{cases}$

$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\alpha\\&&1\\\beta&0&\end{bmatrix}\right)$ に対して同様なことを行って，上のものを、転

置したものに移りうる。本質的に新しいものは

$[\mathrm{II}]_4 \quad \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\\&0&\\1&&\end{bmatrix}\right)$

$[\mathrm{II}]_5 \quad \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\1&0&\\&&\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\\&0&1\\&&\end{bmatrix}\right)$

$[\mathrm{II}]$-II' の場合.

$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&1&*\\&\alpha&*\\*&*&\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&*\\&&*\\*&*&\end{bmatrix}\right)$$

rank $\Upsilon = 0.1$ のときはすでにわかっているから, rank $\Upsilon \geq 2$ の場合を考える。

rank $\Upsilon = 2$ のとき.

$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\alpha\\&&1\\0&\beta&\end{bmatrix}\right)$ あるいは $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\alpha\\&&0\\1&\beta&\end{bmatrix}\right)$ の場合を考えればよい。$\beta \neq 0$ のとき

$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\alpha\\&&1\\0&\beta&\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\alpha\\&&1\\0&1&\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&0\\&&1\\0&1&\end{bmatrix}\right)$$

$\beta = 0$ のとき $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\alpha\\&&1\\0&\beta&\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&0\\&&1\\&&0\end{bmatrix}\right)$

$\alpha \neq 0$ のとき

$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\alpha\\&&\\1&\beta&\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&1\\&&\\1&\beta&\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\1&&\end{bmatrix}\right)$$

$\alpha = 0$ のとき

$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\alpha\\&&\\1&\beta&\end{bmatrix}\right) = \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&0\\&&\\1&\beta&\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&0\\&0&\\1&&\end{bmatrix}\right)$$

rank $\Upsilon = 3$ のとき $\alpha\delta \neq 0$ として $\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\gamma\\&&\alpha\\\delta&\beta&\end{bmatrix}\right)$ の形のものを考えればよい。$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\gamma\\&&\alpha\\\delta&\beta&\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\gamma'\\&0&1\\1&&\end{bmatrix}\right)$ となり,

$$\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\gamma'\\&0&1\\1&&\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}\gamma'&&1\\1&0&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}\right)$$

$\gamma' \neq 0$ のとき $\begin{bmatrix}\gamma' & & 1\\ 1 & 1 & \\ & & -\gamma'\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\gamma' & & 1\\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\gamma' & & 1\\ 1 & 1 & \\ & & -\gamma'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\gamma' & & \\ & 0 & 1\\ & & \end{bmatrix}$ だから

$$\left(\begin{bmatrix}\gamma' & & 1\\ 1 & 0 & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}\gamma' & & \\ & 0 & 1\\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}\gamma' & & \\ & 0 & 1\\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+\lambda\gamma' & & \\ & 1 & \lambda\\ & & 1\end{bmatrix}\right)$$

λを適当にえらんで $\sim \left(\begin{bmatrix}\frac{\gamma'}{1+\lambda\gamma'} & & \\ & 0 & 1\\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1 & & \\ & 0 & 1\\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\right)$

$$\sim \left(\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1\\ & 0 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\right)$$

$\gamma' = 0$ のとき

$$\left(\begin{bmatrix}\gamma' & & 1\\ 1 & 0 & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1 & \\ & 0 & 1\\ & & \end{bmatrix}\right) \qquad [\mathrm{II}]_6$$

[III]-型の場合、YはJordanの標準形になおせ．$X = \begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$の定数倍を$Y$から減じて，$\mathrm{rank}\, Y \leq 2$とできるから，上の場合にもどせる。

以上で18個の軌道が求まった。それらが互いに移りえないことも調べることができる。そのことは後で簡単にふれる。

2．各軌道から得られる余法束（conormal bundle）と余次元1の交わり．

以下の具体的な計算を遂行する。代数群Gの表現からそのLie環$\mathfrak{g}$の表現がみちびかれる。

$$\mathfrak{g} = \{\hat{A} = (A, B, C) \mid \mathrm{tr} A = \mathrm{tr} B = 0 \quad A, B \in M(3),\ C \in M(2)\}$$

$$A = \begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ b_{21} & b_{22} & b_{23}\\ b_{31} & b_{32} & b_{33}\end{bmatrix} \quad C = \begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$$

$\widetilde{A}=(A,B,C)\in\mathfrak{g}$　$(X_1,X_2)\in V$ のとき　$C=\begin{pmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{pmatrix}$

$$\widetilde{A}\cdot(X_1,X_2)=(AX_1-X_1B,\ AX_2-X_2B)+(X_1\ X_2)\,{}^tC$$
$$=(AX_1-X_1B+\alpha X_1+\beta X_2,\ AX_2-X_2B+\gamma X_1+\delta X_2)$$

V の双対 V^* への $\mathfrak{g}$ の反傾表現は　$(Y_1,Y_2)\in V^*$ のとき

$$\widetilde{A}\cdot(Y_1,Y_2)=(-{}^tAY_1+Y_1{}^tB,\ -{}^tAY_2+Y_2{}^tB)-(Y_1,Y_2)\,{}^tC$$
$$=(-{}^tAY_1+Y_1{}^tB-\alpha Y_1-\gamma Y_2,\ -{}^tAY_2+Y_2{}^tB-\beta Y_1-\delta Y_2)$$

さて，(G,V) の相対不変式を f，対応する有理指標を χ とする。$(\mathfrak{g},V)$ の指標は $\delta\chi$ である。一般に $\widetilde{A}\in\mathfrak{g}$ に対して

$$\delta\chi(\widetilde{A})=\frac{\deg f}{\dim V}\,tr_V\widetilde{A}$$

今の場合，$\deg f=12$，$\dim V=18$，$tr_V\widetilde{A}=9\alpha+9\delta$ がわかるので，$\delta\chi(\widetilde{A})=6(\alpha+\delta)$ となる。

$[\mathrm{II}]_5$ を例にとって計算する。

$X_0=(X_1,X_2)=\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\\&&1\\&&\end{bmatrix}\right)$ とおく。$\widetilde{A}$ の成分は上のままであらわすと，

$$\widetilde{A}\cdot X_0=\left(\begin{bmatrix}a_{11}-b_{11}+\alpha & a_{12}-b_{12}+\beta & -b_{13}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\alpha & -b_{23}+\beta\\ a_{31} & a_{32} & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}-b_{21}+\gamma & a_{11}-b_{22}+\delta & a_{12}-b_{23}\\ -b_{31} & a_{21}-b_{32}+\gamma & a_{22}-b_{33}+\delta\\ & a_{31} & a_{32}\end{bmatrix}\right)$$

isotropy subalgebra を求めると，

$$\mathfrak{g}_{X_0}=\{\widetilde{A}\in\mathfrak{g}\mid\widetilde{A}\cdot X_0=0\}\qquad G_{X_0}\sim GL(2)\cdot(G_a)^2$$
$$=\left\{\left(\begin{bmatrix}-\delta&\beta&a_{13}\\\gamma&-\alpha&a_{23}\\&&\alpha+\delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha-\delta&2\beta&\\\gamma&&\beta\\&2\gamma&-\alpha+\delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{bmatrix}\right)\right\}$$

$\dim \mathfrak{g}_{X_0} = 6$ がわかり，$\dim \mathfrak{g} = 20$ だから，

$$\dim \mathfrak{g}\cdot X_0 = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}_{X_0} = 14$$

すなわち X_0-軌道の次元 $= 14$，余次元 $= 4$ がわかる。

ここで，V と V^* の双対性を次のように定義する。

$x \fallingdotseq (X_1, X_2) \in V$，$y = (Y_1, Y_2) \in V^*$ に対して

$$\langle x, y \rangle := \operatorname{tr} X_1 {}^tY_1 + \operatorname{tr} X_2 {}^tY_2$$

$g = (g_1, g_2, g_3) \in G$，　$g_3 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$．　$g_3^{-1} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix}$ のとき

$$g\cdot(X_1, X_2) = g_1(aX_1 + bX_2, cX_1 + dX_2)g_2^{-1}$$

と定義したが G の V^* への表現を

$$g\cdot(Y_1, Y_2) = {}^tg_1^{-1}(a'Y_1 + b'Y_2, c'Y_1 + d'Y_2)\,{}^tg_2$$

と定義する。

$$\mathfrak{g}\cdot X_0 \subset V$$

より　$V_{X_0}^* := (\mathfrak{g}X_0)^\perp \subset V^*$

次に $(\mathfrak{g}_{X_0}, V_{X_0}^*)$ について考察する。

$\tilde{A} = (A, B, C) \in \mathfrak{g}_{X_0}$，$(Y_1, Y_2) \in V_{X_0}^*$ に対して

$$\tilde{A}\cdot(Y_1, Y_2) = (-{}^tAY_1 + Y_1{}^tB, -{}^tAY_2 + Y_2{}^tB) - (Y_1, Y_2){}^tC$$

$\tilde{A}\cdot X_0$ を注視することによって

$$V_{X_0}^* = \left\{ \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ p_{31} & -q_{33} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ q_{31} & -p_{31} & q_{33} \end{bmatrix} \right) = (Y_1, Y_2) \right\}$$

がわかる。

$$\tilde{A}\cdot(Y_1, Y_2) = \left(\begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ -(\alpha+2\delta)p_{31} - 2\beta q_{33} - \gamma q_{31} & 2\gamma p_{31} + (2\alpha+\delta) q_{33} + \beta p_{33} & -3\gamma q_{33} - 3\alpha p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ -3\beta p_{31} - 3\delta q_{31} & (\alpha+2\delta)p_{31} + \gamma q_{31} + 2\beta q_{33} & -2\gamma p_{31} - \beta p_{33} - (2\alpha+\delta) q_{33} \end{bmatrix}\right)$$

$V_{x_0}^*$の元(Y_1, Y_2)を$\begin{bmatrix} q_{31} \\ p_{31} \\ q_{33} \\ p_{33} \end{bmatrix}$と，縦ベクトルであらわしたとき

$$\begin{bmatrix} q_{31} \\ p_{31} \\ q_{33} \\ p_{33} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -3\beta p_{31} - 3\delta q_{31} \\ -(\alpha+2\delta)p_{31} - \gamma q_{31} - 2\beta q_{33} \\ -2\gamma p_{31} - \beta p_{33} - (2\alpha+\delta) q_{33} \\ -3\gamma q_{33} - 3\alpha p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3\delta & -3\beta & & \\ -\gamma & -(\alpha+2\delta) & -2\beta & \\ & -2\gamma & -(2\alpha+\delta) & -\beta \\ & & -3\gamma & -3\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{31} \\ p_{31} \\ q_{33} \\ p_{33} \end{bmatrix}$$

Lie 環$\mathfrak{g}_{x_0}$の$V_{x_0}^*$への表現はこのようにあらわされることがわかった。

次に$(\mathfrak{g}_{x_0}, V_{x_0}^*)$の構造を調べる。

$$V_{x_0}^* \ni Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -3\delta \\ -\gamma \\ -\beta \\ -3\alpha \end{bmatrix} \in V_{x_0}^*$$

だから，$\mathfrak{g}_{x_0} Y_0 = V_{x_0}^*$となり，$(\mathfrak{g}_{x_0}, V_{x_0}^*)$が概均質ベクトル空間であることがわかる。

$\mathfrak{g}_{x_0}$の元でY_0をY_0に写す元は

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

だけである。 $\delta\chi(A_0) = -4 \quad tr_{V_{x_0}^*} A_0 = 4$

一般に $\quad ord_\Lambda \quad = \delta\chi(A_0)s - tr_{V_{x_0}^*} A_0 + \frac{1}{2}\dim V_{x_0}^*$

が成立つから，この場合は $ord_{\Lambda_{II_5}} = -4s - \frac{4}{2}$.

$(\mathfrak{g}_{x_0}, V_{x_0}^*)$の指標は$\frac{3}{2}(\alpha+\delta)$であり，$\mathfrak{g}_{x_0, Y_0}$上でそれは零になるから，$G_{x_0}$-不変な代数的集合は1つある。

余次元1の点をさがす。

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -3\beta \\ -(\alpha+2\delta) \\ -2\gamma \\ \end{bmatrix}$$

だから、これが求めるものである。 Y_1と直交し$V^*_{X_0}$とは直交しないベクトル$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

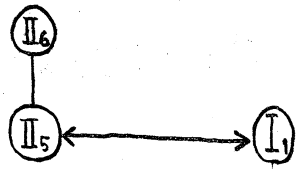
$$X_1 = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & 0 & \\ & & \end{bmatrix} \right)$$

tが十分0に近いとき

$$X_0 + tX_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ & 1 \end{bmatrix} \right) \quad \cdots [\mathrm{II}]_6$$

$$Y_0 = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \right) \quad \cdots\cdots [\mathrm{I}]_1$$

これを次のようにあらわす。



$\delta\rho_1 = \frac{3}{2}(\alpha+\delta)$ とおくと、

$$-\delta\chi = -6(\alpha+\delta) = -4\delta\rho_1$$

$$tr_{V^*_{X_0}} = -6(\alpha+\delta) = -4\delta\rho_1$$

次に残りの軌道についての計算結果を書いておく。前の記号はそのまま使うこととする。

$[0]_1$ ：明らかなのでしない。

$[0]_2$ ：代表点 $X_0 = \left([0]\begin{bmatrix}1 & \\ & 0 & \\ & & 0\end{bmatrix}\right)$

$$\tilde{A}\cdot X_0 = \left(\begin{bmatrix}\beta & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}-b_{11}+\delta & -b_{12} & -b_{13} \\ a_{21} & & \\ a_{31} & & \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathfrak{g}_{X_0} = \left\{\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & -a_{11}-a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}+\delta & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & -a_{11}-b_{22}-\delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha & \\ \gamma & \delta\end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$V^*_{X_0} = \left\{\left(\begin{bmatrix} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & q_{22} & q_{32} \\ & q_{23} & q_{33}\end{bmatrix}\right)\right\} \qquad G_{X_0} \sim (GL(1)^3 \times SL(2)^2)\cdot(G_a)^5$$

$(\mathfrak{g}_{X_0}, V^*_{X_0})$ の表現行列は

$$\begin{pmatrix}p_{22}\\p_{23}\\p_{32}\\p_{33}\\p_{21}\\p_{31}\\p_{13}\\p_{12}\\q_{22}\\q_{23}\\q_{32}\\q_{33}\end{pmatrix} \longmapsto \left[\begin{array}{cccccccccccc}
-a_{22}+b_{22}-\alpha & b_{23} & -a_{32} & & b_{21} & & & -a_{12} & -\gamma & & & \\
b_{32} & -a_{11}-a_{22}-b_{22}-\alpha-\delta & & -a_{32} & b_{31} & & -a_{12} & & & -\gamma & & \\
-a_{23} & & a_{11}+a_{22}+b_{22}-\alpha & b_{23} & & b_{21} & & -a_{13} & & & -\gamma & \\
& -a_{23} & b_{32} & a_{22}-b_{22}-\alpha-\delta & & b_{31} & -a_{13} & & & & & -\gamma \\
& & & & a_{11}-a_{22}-\alpha+\delta & -a_{32} & & & & & & \\
& & & & -a_{23} & 2a_{11}+a_{22}-\alpha+\delta & & & & & & \\
& & & & & & -2a_{11}-b_{22}-\alpha-\delta & b_{32} & & & & \\
& & & & & & b_{23} & -a_{11}+b_{22}-\alpha & & & & \\
& & & & & & & & -a_{22}+b_{22}-\delta & b_{23} & -a_{32} & \\
& & & & & & & & b_{32} & -a_{11}-a_{22}-b_{22}-2\delta & & -a_{32} \\
& & & & & & & & -a_{23} & & a_{11}+a_{22}+b_{22}-\delta & b_{23} \\
& & & & & & & & & -a_{23} & b_{32} & a_{22}-b_{22}-2\delta
\end{array}\right]\begin{bmatrix}p_{22}\\p_{23}\\p_{32}\\p_{33}\\p_{21}\\p_{31}\\p_{13}\\p_{12}\\q_{22}\\q_{23}\\q_{32}\\q_{33}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{trace}_{V^*_{x_0}} = -8\alpha - 7\delta$$

generic point $Y_0 = \left(\begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix}\right) \cdots (\mathrm{II})_2$

$$A_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{13} \\ & -2a_{11}+\frac{1}{2} & \\ & & a_{11}-\frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}-\frac{2}{3} & & \\ & -2a_{11}+\frac{5}{6} & \\ a_{13} & & a_{11}-\frac{1}{6} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{7}{6} & \\ & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}\right)$$

余次元 1 の点

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\gamma \\ -a_{12}-\gamma \\ b_{21} \\ b_{31}-a_{13} \\ -a_{32} \\ 2a_{11}+a_{22}-\alpha+\delta \\ -2a_{11}-b_{22}-\alpha-\delta \\ b_{23} \\ -a_{22}+b_{22}-\delta+b_{23} \\ b_{32}-a_{11}-a_{22}-b_{22}-2\delta \\ -a_{23} \\ -a_{23} \end{bmatrix} \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -a_{12}+b_{21} \\ -a_{32}-\gamma+b_{31} \\ b_{23}-\gamma-a_{13} \\ a_{22}-b_{22}-\alpha-\delta \\ a_{11}-a_{22}-\alpha+\delta \\ -a_{23} \\ b_{32} \\ -a_{11}+b_{22}-\alpha \\ b_{23}-a_{32} \\ -a_{11}-a_{22}-b_{22}-2\delta \\ a_{11}+a_{22}+b_{22}-\delta \\ -a_{23}+b_{32} \end{bmatrix}$$

$X_1 = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) \qquad X_0 + tX_1 = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & t & -t \end{bmatrix}\right) \sim \left(\underset{O_3}{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix}\right)$

$X_2 = \left(\begin{bmatrix} & & -1 \\ & & \\ -1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix}\right)$

$$X_0 + tX_2 = \left(\begin{bmatrix} & & -t \\ & & \\ -t & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & t \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ -t & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & t \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix}\right)$$

$Y_1 = \left(\begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & 1 & 1 \\ & & \end{bmatrix}\right) \cdots [\mathrm{I}]_8 \qquad Y_2 = \left(\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ & 1 & \end{bmatrix}\right) \cdots [\mathrm{II}]_6$

Y_2 は not G_0-homog.

$[0]_3$: 代表点 $X_0 = \left(\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \right)$

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \left(\begin{bmatrix} \beta & & \\ & \beta & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\delta & a_{12}-b_{12} & -b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\delta & -b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathfrak{g}_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ & & -a_{11}-a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}+\delta & a_{12} & \\ a_{21} & a_{22}+\delta & \\ b_{31} & b_{32} & -a_{11}-a_{22}-2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right) \right\}.$$

$$V^*_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & -p_{11} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & q_{33} \end{bmatrix} \right) \right\} \qquad G_{X_0} \sim (GL(1)^3 \times SL(2)) \cdot (G_a)^5$$

$(\mathfrak{g}_{X_0}, V^*_{X_0})$ の表現行列は

$$\begin{bmatrix} p_{33} \\ p_{32} \\ p_{31} \\ p_{23} \\ p_{13} \\ p_{21} \\ p_{12} \\ p_{11} \\ q_{33} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -\alpha-2\delta & b_{32} & b_{31} & -a_{23} & -a_{13} & & & & -\gamma \\ & \begin{matrix} a_{11}+2a_{22} \\ -\alpha+\delta \end{matrix} & a_{21} & & & & -a_{13} & a_{23} & \\ & a_{12} & \begin{matrix} 2a_{11}+a_{22} \\ +\delta-\alpha \end{matrix} & & & -a_{23} & & -a_{13} & \\ & & & \begin{matrix} -a_{11}-2a_{22} \\ -\alpha-2\delta \end{matrix} & -a_{12} & b_{31} & & -b_{32} & \\ & & & -a_{21} & \begin{matrix} -2a_{11}-a_{22} \\ -\alpha-2\delta \end{matrix} & & b_{32} & b_{31} & \\ & & & & & \begin{matrix} a_{11}-a_{22} \\ -\alpha+\delta \end{matrix} & & -2a_{12} & \\ & & & & & & \begin{matrix} -a_{11}+a_{22} \\ -\alpha+\delta \end{matrix} & 2a_{21} & \\ & & & & & -a_{21} & a_{12} & -\alpha+\delta & \\ & & & & & & & & -3\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{33} \\ p_{32} \\ p_{31} \\ p_{23} \\ p_{13} \\ p_{21} \\ p_{12} \\ p_{11} \\ q_{33} \end{bmatrix}$$

$\mathrm{trace}_{V^*_{X_0}} = -8\alpha - 4\delta$

generic point $Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -\gamma \\ a_{23} \\ -a_{13} \\ -b_{32} \\ b_{31} \\ -2a_{12} \\ 2a_{21} \\ -\alpha+\delta \\ -3\delta \end{bmatrix}$ $\qquad Y_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & \end{bmatrix} \underset{[I]_8}{\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix}} \right)$

$$A_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & -a_{11}-a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & \\ & & -a_{11}-a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{4}{3} & \\ & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right)$$

余次元 1 の点

$$Y_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -\alpha-2\delta \\ a_{23} \\ -a_{13} \\ -b_{32} \\ b_{31} \\ -2a_{12} \\ 2a_{21} \\ -\alpha+\delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$Y_2 = \left(\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} b_{32}-a_{13}-\gamma \\ a_{11}+2a_{22}-\alpha+\delta \\ a_{12}-a_{23} \\ -a_{12}+b_{31} \\ -2a_{11}-a_{22}-\alpha-2\delta \\ a_{11}-a_{22}-\alpha+\delta \\ 0 \\ -a_{21} \\ -3\delta \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right) \qquad X_0 + tX_1 = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & t \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right)$$

$$Y_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \right) \cdots [0]_4 \qquad Y_2 = \left(\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \right) \cdots [\mathrm{I}]_7$$

$[0]_4$: 代表点 $X_0 = \left([0] \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \right)$

$$\hat{A} X_0 = \left(\begin{bmatrix} \beta & & \\ & \beta & \\ & & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\delta & a_{12}-b_{12} & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\delta & a_{23}-b_{23} \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33}+\delta \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathfrak{g}_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \\ \gamma & \end{bmatrix} \right) \quad a_{11}+a_{22}+a_{33}=0 \right\}$$

$$V^*_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & -p_{11}-p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \right) \right\} \qquad G_{X_0} \sim (GL(1) \times SL(3)) \cdot G_a$$

$(\mathfrak{g}_{X_0}, V^*_{X_0})$ は概均質でない。

$[\mathrm{I}]_1$ 代表点 $X_0=\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&1&\\&&\\&&\end{bmatrix}\right)$

$$\tilde{A}\cdot X_0=\left(\begin{bmatrix}a_{11}-b_{11}+\alpha & -b_{12}+\beta & -b_{13}\\ a_{21}&&\\ a_{31}&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-b_{21}+\gamma & a_{11}-b_{22}+\delta & -b_{23}\\ & a_{21} & \\ & a_{31} & \end{bmatrix}\right)$$

$$\mathfrak{g}_{x_0}=\left\{\left(\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\ &a_{22}&a_{23}\\ &a_{32}&-a_{11}-a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}+\alpha&\beta&\\ \gamma&a_{11}+\delta&\\ b_{31}&b_{32}&-2a_{11}-\alpha-\delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\ \gamma&\delta\end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$V^*_{x_0}=\left\{\left(\begin{bmatrix}p_{21}&p_{22}&p_{23}\\ p_{31}&p_{32}&p_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{21}&-p_{21}&q_{23}\\ q_{31}&-p_{31}&q_{33}\end{bmatrix}\right)\right\}\qquad G_{x_0}\sim(GL(1)^2\times SL(2)^2)\cdot(G_a)^4$$

$(\mathfrak{g}_{x_0}, V^*_{x_0})$ の表現行列

$$\begin{bmatrix}q_{33}\\q_{23}\\p_{33}\\p_{23}\\q_{31}\\q_{21}\\p_{31}\\p_{21}\\p_{32}\\p_{22}\end{bmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix}
{-a_{11}+a_{22}\atop -\alpha-2\delta} & -a_{23} & -\beta & & b_{31} & & -b_{32} & & & \\
-a_{32} & {-2a_{11}-a_{22}\atop -\alpha-2\delta} & & -\beta & & b_{31} & & -b_{32} & & \\
-\gamma & & {-a_{11}+a_{22}\atop -2\alpha-\delta} & -a_{23} & & & b_{31} & & b_{32} & \\
 & -\gamma & -a_{32} & {-2a_{11}-a_{22}\atop -2\alpha-\delta} & & & & b_{31} & & b_{32}\\
 & & & & {2a_{11}+a_{22}\atop +\alpha-\delta} & -a_{23} & -2\beta & & & \\
 & & & & -a_{32} & {a_{11}-a_{22}\atop +\alpha-\delta} & & -2\beta & & \\
 & & & & -\gamma & & 2a_{11}+a_{22} & -a_{23} & \beta & \\
 & & & & & -\gamma & -a_{32} & a_{11}-a_{22} & & \beta\\
 & & & & & & 2\gamma & & {2a_{11}+a_{22}\atop -\alpha+\delta} & -a_{23}\\
 & & & & & & & 2\gamma & -a_{32} & {a_{11}-a_{22}\atop -\alpha+\delta}
\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_{33}\\q_{23}\\p_{33}\\p_{23}\\q_{31}\\q_{21}\\p_{31}\\p_{21}\\p_{32}\\p_{22}\end{bmatrix}$$

$$\mathrm{trace}_{V^*_{x_0}}=3a_{11}-6\alpha-6\delta$$

$$\text{generic point}\quad Y_0 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} b_{31}-b_{32}-a_{23}\\ -2a_{11}-a_{22}-\alpha-2\delta\\ b_{31}\\ -\gamma+b_{32}\\ 2a_{11}+a_{22}+\alpha-\delta-2\beta\\ -a_{32}\\ -\gamma+2a_{11}+a_{22}\\ -a_{32}+\beta\\ 2\gamma-a_{23}\\ a_{11}-a_{22}-\alpha+\delta \end{bmatrix}$$

$$Y_0 = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1\\ & & \\ 1 & -1 & \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1\\ & & \end{bmatrix}\right) \cdots [\mathrm{II}]_5$$

$$A_0 = \left(\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & & \\ & -\frac{1}{3} & \\ & & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{2}{3} & & \\ & & \\ & & -\frac{2}{3}\end{bmatrix}\right)$$

余次元 1 の 点

$$Y_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -a_{11}+a_{22}-\alpha-2\delta+b_{31}-b_{32}\\ -a_{32}\\ -\gamma+b_{31}\\ b_{32}\\ 2a_{11}+a_{22}+\alpha-\delta-2\beta\\ -a_{32}\\ -\gamma+2a_{11}+a_{22}\\ -a_{32}+\beta\\ 2\gamma-a_{23}\\ a_{11}-a_{22}-\alpha+\delta \end{bmatrix} \qquad Y_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} -a_{11}+a_{22}-\alpha-2\delta\\ -a_{32}+b_{31}\\ -\gamma+b_{32}\\ 0\\ -a_{23}\\ a_{11}-a_{22}+\alpha-\delta\\ \beta\\ -\gamma\\ 2a_{11}+a_{22}-\alpha+\delta\\ -a_{32} \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ -1 & & 1\\ & & \end{bmatrix}\right) \qquad X_0 + tX_1 = \left(\begin{bmatrix}1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1 & \\ -t & & t\\ & & \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix}\right) \cdots [\mathrm{I}]_3$$

$$X_2 = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & 1\\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\right) \qquad X_0 + tX_2 = \left(\begin{bmatrix}1 & & \\ & & t\\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1\\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix}\right) \cdots [\mathrm{I}]_5$$

$$Y_1 = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\right) \cdots [\mathrm{I}]_5 \qquad Y_2 = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & 1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\right) \cdots [0]_2$$

$[\mathrm{I}]_2$　代表点 $X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \right)$

$$\widehat{A} X_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha, & -b_{12}, & -b_{13} \\ a_{21}+\beta & & \\ a_{31} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} & & \\ a_{22} & -b_{12} & -b_{13} \\ a_{32} & & \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathfrak{g}_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} b_{11}-\alpha & -\gamma & a_{13} \\ -\beta & b_{11}-\delta & a_{23} \\ & & -2b_{11}+\alpha+\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & & \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & -b_{11}-b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$V^*_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} & p_{12} & p_{13} \\ & p_{22} & p_{23} \\ & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & q_{12} & q_{13} \\ & -p_{12} & -p_{13} \\ & q_{32} & q_{33} \end{bmatrix} \right) \right\} \qquad G_{X_0} \sim (GL(1)^2 \times SL(2)^2) \cdot (G_a)^4$$

$(\mathfrak{g}_{X_0}, V^*_{X_0})$ の表現行列

$$\begin{bmatrix} p_{32} \\ p_{33} \\ q_{32} \\ q_{33} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{22} \\ p_{23} \\ q_{12} \\ q_{13} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} c_2+d_1-d_2 & b_{23} & -\gamma & & -a_{13} & & -a_{23} & & & \\ b_{32} & c_2-d_1-d_2 & & -\gamma & & -a_{13} & & -a_{23} & & \\ -\beta & & c_2+d_1+d_2 & b_{23} & a_{23} & & & & -a_{13} & \\ & -\beta & b_{32} & c_2-d_1+d_2 & & a_{23} & & & & -a_{13} \\ & & & & c_1+d_1 & b_{23} & \beta & & -\gamma & \\ & & & & b_{32} & c_1-d_1 & & \beta & & -\gamma \\ & & & & 2\gamma & & c_1+d_1-2d_2 & b_{23} & & \\ & & & & & 2\gamma & b_{32} & c_1-d_1-2d_2 & & \\ & & & & -2\beta & & & & c_1+d_1+2d_2 & b_{23} \\ & & & & & 2\beta & & & b_{32} & c_1-d_1+2d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{32} \\ p_{33} \\ q_{32} \\ q_{33} \\ p_{12} \\ p_{13} \\ p_{22} \\ p_{23} \\ q_{12} \\ q_{13} \end{bmatrix}$$

ここで $c_1 = -\frac{3}{2} b_{11}$　$d_1 = -\frac{1}{2} b_{11} + b_{22}$　$c_2 = \frac{3}{2} b_{11} - \frac{3}{2}(\alpha+\delta)$

$d_2 = \frac{1}{2}(\alpha - \delta)$

上の行列を $\begin{bmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}$ と表わすと $\mathrm{tr}\, A_1 = 4c_2$, $\mathrm{tr}\, A_2 = 6c_1$

generic point $q_{33} = p_{12} = p_{23} = q_{13} = 1$ 残り 0

すなわち $Y_0 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdots [\mathrm{II}]_4$

isotropy $a_{13} = a_{23} = b_{23} = b_{32} = c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = \beta = \gamma = 0$

余次元 1 の点は 2 つ，共に $\mathfrak{g}_0$ - homog

イ) $q_{33} = p_{12} = p_{23} = 1$ 残り 0

$Y_1 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdots [\mathrm{II}]_4$

isotropy $a_{13} = a_{23} = b_{23} = b_{32} = \beta = \gamma = 0$

$c_1 = -\frac{1}{2}$ ， $c_2 = -d_1 = d_2$

ロ) $p_{32} = q_{32} = p_{12} = p_{23} = 1$ 残り 0

$Y_2 = \left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdots [\mathrm{I}]_6$

isotropy $\beta = \gamma = \frac{1}{2} a_{13} = -\frac{1}{2} a_{23} = -\frac{1}{2} b_{23} = -\frac{1}{2} b_{32} = \frac{1}{3} c_2$

$[\mathrm{I}]_3$ ： 代表点 $X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} + \alpha & -b_{12} + \beta & -b_{13} \\ a_{21} + \beta & & \\ a_{31} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{12} - b_{21} + \gamma & a_{11} - b_{22} + \delta & -b_{23} \\ a_{22} - b_{11} + \delta & a_{21} - b_{12} & -b_{13} \\ a_{32} & a_{31} & \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathfrak{g}_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & a_{11} + \alpha - \delta & a_{23} \\ & & -2a_{11} - \alpha + \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} + \alpha & & \\ a_{12} + \gamma & a_{11} + \delta & \\ b_{31} & b_{32} & -2a_{11} - \alpha - \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$V^*_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} & & p_{13} \\ & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & -p_{13} \\ & -p_{31} & q_{33} \end{bmatrix} \right) \right\}$$

(g_{x_0} の $V^*_{x_t}$ の表現行列

$$\begin{pmatrix} p_{33} \\ q_{33} \\ p_{32} \\ p_{31} \\ p_{23} \\ p_{22} \\ p_{13} \end{pmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -\alpha-2\delta & -\gamma & b_{32} & b_{31} & -a_{23} & & -a_{13} \\ & -3\delta & & -b_{32} & & & a_{23} \\ & & 3a_{11} & a_{12}+2\gamma & & -a_{23} & \\ & & & 3a_{11}+\alpha-\delta & & & \\ & & & & -3a_{11}-3\alpha & b_{32} & -a_{12}+\gamma \\ & & & & & -2\alpha+2\delta & \\ & & & & & & -3a_{11}-2\alpha-\delta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} p_{33} \\ q_{33} \\ p_{32} \\ p_{31} \\ p_{23} \\ p_{22} \\ p_{13} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{trace}_{V^*_{x_0}} = -7\alpha - 5\delta$$

generic point $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} b_{31}-a_{13} \\ -b_{32}+a_{23} \\ a_{12}+2\gamma-a_{23} \\ 3a_{11}+\alpha-\delta \\ b_{32}-a_{12}+\gamma \\ -2\alpha+2\delta \\ -3a_{11}-2\alpha-\delta \end{bmatrix}$

$$Y_0 = \left(\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix}\right) \cdots [\mathrm{II}]_6$$

$$\begin{cases} \delta\rho_1 = 3a_{11}+\alpha-\delta \\ \delta\rho_2 = -2\alpha+2\delta \\ \delta\rho_3 = -3a_{11}-2\alpha-\delta \end{cases}$$

余次元1の点

$$\underset{[\mathrm{I}]_6}{\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)} = Y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -\gamma-a_{13} \\ -3\delta+a_{23} \\ -a_{23} \\ 0 \\ b_{32}-a_{12}+\gamma \\ -2\alpha+2\delta \\ -3a_{11}-2\alpha-\delta \end{bmatrix}$$

$$X_1 = \left(\begin{bmatrix} & \\ 1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & \\ & -1 \end{bmatrix}\right)$$

$$X_0+tX_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ t & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\right) \sim \underset{[\mathrm{I}]_6}{\left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix}\right)}$$

$$Y_2 = \begin{bmatrix} 0\\0\\0\\1\\0\\0\\1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} b_{31}-a_{13} \\ -b_{32}+a_{23} \\ a_{12}+2\gamma \\ 3a_{11}+\alpha-\delta \\ -a_{12}+\gamma \\ 0 \\ -3a_{11}-2\alpha-\delta \end{bmatrix} \qquad X_2 = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & -1 \\ & & \\ -1 & & \end{bmatrix}\right) = \qquad X_0+tX_2 = \left(\begin{bmatrix} 1 & t & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix}\right)$$

$[\mathrm{II}]_3$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $[\mathrm{I}]_4$

$$Y_3 = \begin{bmatrix} 0\\1\\0\\1\\0\\1\\0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -\gamma+b_{31} \\ -3\delta-b_{32} \\ 3a_{11}+a_{12}+2\gamma-a_{23} \\ 3a_{11}+\alpha-\delta \\ b_{32} \\ -2\alpha+2\delta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad X_3 = \left(\begin{bmatrix} & & 1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & -1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\right)$$

$$\left(\begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ -1 & & \end{bmatrix}\right) = \qquad X_0+tX_3 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & t \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & -t \\ & & \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix}\right)$$

$[\mathrm{I}]_5$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ $[\mathrm{I}]_5$

$[\mathrm{I}]_4$ ： 代表点 $X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix}\right)$

$$\tilde{A}\cdot X_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & -b_{12} & -b_{13} \\ a_{21} & \beta & \\ a_{31} & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \gamma & a_{12} & \\ -b_{21} & a_{22}-b_{22}+\delta & -b_{23} \\ & a_{32} & \end{bmatrix}\right)$$

$$g_{X_0} = \left\{\left(\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{13} \\ & a_{22} & a_{23} \\ & & -a_{11}-a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}+\alpha & & \\ & a_{22}+\delta & \\ b_{31} & b_{32} & -a_{11}-a_{22}-\alpha-\delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \\ & \delta \end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$V^*_{X_0} = \left\{\left(\begin{bmatrix} & & \\ & & p_{23} \\ & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & q_{13} \\ & & \\ q_{31} & & q_{33} \end{bmatrix}\right)\right\}$$

$(g_{X_0}, V^*_{X_0})$ の表現行列,

$$\begin{bmatrix} p_{33}\\p_{32}\\p_{23}\\q_{33}\\q_{31}\\q_{13} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -2\alpha-\delta & b_{32} & -a_{23} & & & \\ & \begin{matrix} a_{11}+2a_{22} \\ -\alpha+\delta \end{matrix} & & & & \\ & & \begin{matrix} -a_{11}-2a_{22} \\ -2\alpha-\delta \end{matrix} & & & \\ & & & -\alpha-2\delta & b_{31} & -a_{13} \\ & & & & \begin{matrix} 2a_{11}+a_{22} \\ +\alpha-\delta \end{matrix} & \\ & & & & & \begin{matrix} -2a_{11}-a_{22} \\ -\alpha-2\delta \end{matrix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{33}\\p_{32}\\p_{23}\\q_{33}\\q_{31}\\q_{13} \end{bmatrix}$$

generic point $Y_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b_{32} - a_{23} \\ a_{11} + 2a_{22} - \alpha + \delta \\ -a_{11} - 2a_{22} - 2\alpha - \delta \\ b_{31} - a_{13} \\ 2a_{11} + a_{22} + \alpha - \delta \\ -2a_{11} - a_{22} - \alpha - 2\delta \end{pmatrix}$

$Y_0 = \left(\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 0 & \\ 1 & \end{bmatrix} \right) \cdots [\mathrm{III}]_3$

余次元1の点	相対不変式	指標
$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} b_{32} \\ a_{11} + 2a_{22} - \alpha + \delta \\ 0 \\ b_{31} - a_{13} \\ 2a_{11} + a_{22} + \alpha - \delta \\ -2a_{11} - a_{22} - \alpha - 2\delta \end{bmatrix}$, $\left(\begin{bmatrix} & \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \right) = Y_1$ $\cdots [\mathrm{I}]_5$	p_{23}	$\delta\rho_1 = -a_{11} - 2a_{22} - 2\alpha - \delta$
$Y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -a_{23} \\ 0 \\ -a_{11} - 2a_{22} - 2\alpha - \delta \\ b_{31} - a_{13} \\ 2a_{11} + a_{22} + \alpha - \delta \\ -2a_{11} - a_{22} - \alpha - 2\delta \end{bmatrix}$, $\left(\begin{bmatrix} & 1 \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \right) = Y_2$ $\cdots [\mathrm{I}]_6$	p_{32}	$\delta\rho_2 = a_{11} + 2a_{22} - \alpha + \delta$
$Y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} b_{32} - a_{23} \\ a_{11} + 2a_{22} - \alpha + \delta \\ -a_{11} - 2a_{22} - 2\alpha - \delta \\ b_{31} \\ 2a_{11} + a_{22} + \alpha - \delta \\ 0 \end{bmatrix}$, $\left(\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ 1 & \end{bmatrix} \right) = Y_3$ $\cdots [\mathrm{I}]_5$	q_{13}	$\delta\rho_3 = -2a_{11} - a_{22} - \alpha - 2\delta$
$Y_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} b_{32} - a_{23} \\ a_{11} + 2a_{22} - \alpha + \delta \\ -a_{11} - 2a_{22} - 2\alpha - \delta \\ -a_{13} \\ 0 \\ -2a_{11} - a_{22} - \alpha - 2\delta \end{bmatrix}$, $\left(\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ & \end{bmatrix} \right) = Y_4$ $\cdots [\mathrm{I}]_6$	q_{31}	$\delta\rho_4 = 2a_{11} + a_{22} + \alpha - \delta$

$$-\delta\chi = 2\delta\rho_1 + 2\delta\rho_2 + 2\delta\rho_3 + 2\delta\rho_4$$

$$tr_{V^*_{X_0}} = 2\delta\rho_1 + 2\delta\rho_2 + 2\delta\rho_3 + 2\delta\rho_4$$

$[\mathrm{I}]_5$: 代表点 $X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \right)$

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & -b_{12} & -b_{13}+\beta \\ a_{21} & \beta & \\ a_{31} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_{31}+\gamma & a_{12}-b_{32} & a_{11}+b_{11}+b_{22}+\delta \\ -b_{21} & a_{22}-b_{22}+\delta & a_{21}-b_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{31} \end{bmatrix} \right)$$

$$g_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & -2a_{11}-\alpha-2\delta & a_{23} \\ & & a_{11}+\alpha+2\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}+\alpha & & \\ & -2a_{11}-\alpha-\delta & \\ \gamma & a_{12} & a_{11}+\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{ \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ q_{31} & -p_{31} \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$(g_{X_0}, V_{X_0}^*)$ の表現行列

$$\begin{bmatrix} p_{33} \\ p_{23} \\ p_{32} \\ p_{31} \\ q_{31} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -2\alpha-\delta & -a_{23} & a_{12} & 2\gamma & \\ & 3a_{11}+3\delta & & & \\ & & -3a_{11}-3\alpha-3\delta & & \\ & & & -\alpha-2\delta & -\gamma \\ & & & & -3\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{33} \\ p_{23} \\ p_{32} \\ p_{13} \\ q_{31} \end{bmatrix} \qquad tr_{V_{X_0}^*} = -6\alpha-6\delta$$

generic point $Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \right) \cdots [\mathrm{I}]_5$

余次元1の点

$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \right)$ $[\mathrm{I}]_4$ $\quad \delta\rho_1 = -3a_{11}-3\alpha-3\delta$

$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ 1 & & \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \right)$ $[\mathrm{I}]_1$ $\quad \delta\rho_2 = 3a_{11}+3\delta$

$[\mathrm{I}]_3$

$Y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ 1 & 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & -1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix} \right) \quad \delta\rho_3 = -3\delta$

$$-\delta\chi = tr_{V_{X_0}^*} = 2(\delta\rho_1 + \delta\rho_2 + \delta\rho_3)$$

$[\mathrm{I}]_6$ 代表点 $X_0=\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&1&\\1&&\end{bmatrix}\right)$

$$\widetilde{A}\cdot X_0=\left(\begin{bmatrix}a_{11}-b_{11}+\alpha&-b_{12}&-b_{13}\\a_{21}&\beta&\\a_{31}+\beta&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{13}+\gamma&a_{12}&\\a_{23}-b_{21}&a_{22}-b_{22}+\delta&-b_{23}\\a_{33}-b_{11}+\delta&a_{32}-b_{12}&-b_{13}\end{bmatrix}\right)$$

$$\mathfrak{g}_{X_0}=\left\{\left(\begin{bmatrix}2\delta+b_{33}&&-\gamma\\&-\alpha-3\delta-2b_{33}&b_{21}\\&&\alpha+\delta+b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha+2\delta+b_{33}&&\\b_{21}&-\alpha-2\delta-2b_{33}&\\b_{31}&b_{32}&b_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&\\\gamma&\delta\end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$V^*_{X_0}=\left\{\left(\begin{bmatrix}&&-q_{33}\\&&p_{23}\\&p_{32}&p_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&q_{13}\\&&\\&&q_{33}\end{bmatrix}\right)\right\}$$

$(\mathfrak{g}_{X_0}, V^*_{X_0})$ の表現行列

$$\begin{bmatrix}p_{33}\\q_{33}\\p_{32}\\p_{23}\\q_{13}\end{bmatrix}\longmapsto\begin{bmatrix}-2\alpha-\delta&-2\gamma&b_{32}&-b_{21}&\\&-\alpha-2\delta&&&\gamma\\&&-3\alpha-3\delta-3b_{33}&&\\&&&3\delta+3b_{33}&\\&&&&-3\delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{33}\\q_{33}\\p_{32}\\p_{23}\\q_{13}\end{bmatrix}\qquad tr_{V^*_{X_0}}=-6\alpha-6\delta$$

generic point $Y_0=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}&&\\&&1\\&1&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&&\\&&\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&1&\\1&&\end{bmatrix}\right)$

$S=\{p_{32}\,p_{23}\,q_{13}=0\}$

$\{p_{32}=0\}\ni Y_1=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}&&\\&&1\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&&\\&&\end{bmatrix}\right)$ $\mathfrak{g}_0$-homog. $[\mathrm{I}]_2$

$\{p_{23}=0\}\ni Y_2=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}&&\\&&\\&1&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&&\\&&\end{bmatrix}\right)$ $\mathfrak{g}_0$-homog. $[\mathrm{I}]_4$

$\{q_{13}=0\}\ni Y_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}=\left(\begin{bmatrix}&&-1\\&&1\\&1&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&1\end{bmatrix}\right)$ not $\mathfrak{g}_0$-homog. $[\mathrm{I}]_3$

$\delta\rho_1=-3\alpha-3\delta-3b_{33}$, $\delta\rho_2=3\delta+3b_{33}$, $\delta\rho_3=-3\delta$, $\quad -\delta\chi=2(\delta\rho_1+\delta\rho_2+\delta\rho_3)$

$[\mathrm{I}]_7$ 代表点 $X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\right)$

$$\tilde{A}X_0 = \left\{\left(\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & -b_{12} & -b_{13}+\beta \\ a_{21} & \beta & \\ a_{31}+\beta & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{13}-b_{31}+\gamma & a_{12}\cdot b_{32} & a_{11}-b_{33}+\delta \\ a_{23}-b_{21} & a_{22}\cdot b_{22}+\delta & a_{21}\cdot b_{23} \\ a_{33}-b_{11}+\delta & a_{32}-b_{12} & a_{31}\cdot b_{13} \end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$g_{X_0} = \left\{\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ & -2a_{11}-\alpha & a_{23} \\ & & a_{11}+\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}+\alpha & & \\ a_{23} & -2a_{11}-\alpha & \\ a_{13}+\gamma & a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \\ \gamma & \end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$V_{X_0}^* = \left\{\left(\begin{bmatrix} & & p_{31} \\ & -2p_{31} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & -p_{31} \end{bmatrix}\right)\right\}$$

$(g_{X_0}, V_{X_0}^*)$ の表現行列

$$\begin{bmatrix} p_{33} \\ p_{32} \\ p_{23} \\ p_{31} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -2\alpha & a_{12} & -a_{23} & \gamma \\ & -3a_{11}-3\alpha & & 3a_{23} \\ & & 3a_{11} & -a_{12} \\ & & & -\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{33} \\ p_{32} \\ p_{23} \\ p_{31} \end{bmatrix} \qquad tr_{V_{X_0}^*} = -6\alpha$$

generic point $Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} & & 1 \\ & -2 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & -1 \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1 \\ & 1 & \\ 1 & & \end{bmatrix}\right)$

$[\mathrm{I}]_7$

余次元1の点

$Y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix}\right)$ $\quad \delta\rho_1 = -\alpha$

$[0]_3$

$$A_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11} & & a_{13} \\ & -2a_{11}+1 & \\ & & a_{11}-1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11}-1 & & \\ & -2a_{11}+1 & \\ a_{13} & & a_{11} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & \\ & \end{bmatrix}\right)$$

$$-\delta\chi = tr_{V_{X_0}^*} = 6\delta\rho_1$$

$[\mathrm{I}]_8$ 代表点 $X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \right)$

$$\widehat{A} \cdot X_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} + \alpha & -b_{12} & -b_{13} \\ a_{21} & \beta & \\ a_{31} & & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma & a_{12} & a_{13} \\ -b_{21} & a_{22} - b_{22} + \delta & a_{23} - b_{23} \\ -b_{31} & a_{32} - b_{32} & -a_{11} - a_{22} + b_{11} + b_{22} + \delta \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathfrak{g}_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} a_{11} & & \\ & a_{22} & a_{23} \\ & a_{32} & -a_{11} - a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} - 2\delta & & \\ & a_{22} + \delta & a_{23} \\ & a_{32} & -a_{11} - a_{22} + \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\delta & \\ & \delta \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$V^*_{X_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} & & \\ & y & -x \\ & z & -y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$(\mathfrak{g}_{X_0}, V^*_{X_0})$ の表現行列

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -a_{11} - 2a_{22} + 3\delta & -2a_{32} & \\ -a_{23} & 3\delta & -a_{32} \\ & -2a_{23} & a_{11} + 2a_{22} + 3\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \mathrm{tr}_{V^*_{X_0}} = 9\delta$$

generic point $Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \right) \cdots [0]_3$

余次元1の点 $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} & & -1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \right) \cdots [0]_2$

$[\mathrm{II}]_1$: 代表点 $X_0=\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}\right)$

$g\cdot X_0=V$

$[\mathrm{II}]_2$: 代表点 $X_0=\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1&\\&0&\\&&1\end{bmatrix}\right)$

$$\widetilde{A}\cdot X_0=\left(\begin{bmatrix}a_{11}-b_{11}+\alpha & a_{12}-b_{12}+\beta & -b_{13}\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\alpha & -b_{23}\\ a_{31} & a_{32} & \beta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-b_{21}+\gamma & a_{11}-b_{22}+\gamma & a_{13}-b_{23}\\ & a_{21}+\gamma & a_{23}\\ -b_{31} & a_{31}-b_{32} & -a_{11}-a_{22}+b_{11}+b_{22}+\delta\end{bmatrix}\right)$$

$$\mathfrak{g}_{X_0}=\left\{\left(\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\\&a_{11}-3\alpha&\\&&-2a_{11}+3\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}+\alpha&a_{12}&\\&a_{11}-2\alpha&\\&&-2a_{11}+\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&\\&-2\alpha\end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$V^*_{X_0}=\left\{\left(\begin{bmatrix}&&\\&0&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\q_{21}&&\\&&\end{bmatrix}\right)\right\}$$

$(\mathfrak{g}_{X_0},V^*_{X_0})$ の表現行列

$q_{21}\longmapsto 6\alpha q_{21}$

generic point $Y_0=(1)=\left(\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\1&&\\&&\end{bmatrix}\right)\sim\left(\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\right)\cdots[0]_2$

余次元 1 の点 $Y_1=(0)=\left(\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\right)\cdots[0]_1$

$[\mathrm{II}]_3$: 代表点 $X_0=\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&0&\\0&1&\end{bmatrix}\right)$

$$\widetilde{A}X_0=\left(\begin{bmatrix}a_{11}-b_{11}+\alpha & a_{12}-b_{12} & -b_{13}+\beta\\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\alpha & -b_{23}\\ a_{31} & a_{32}+\beta & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}-b_{31}+\gamma & a_{13}-b_{32} & a_{11}+b_{11}+b_{22}+\delta\\ & a_{23}+\gamma & a_{21}\\ -b_{21} & -a_{11}-a_{22}-b_{22}+\delta & a_{31}-b_{23}\end{bmatrix}\right)$$

$$\mathfrak{g}_{X_0}=\left\{\left(\begin{bmatrix}-\alpha-\delta&a_{12}&a_{13}\\&\delta&-\gamma\\&-\beta&\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\delta&a_{12}&\beta\\&\alpha+\delta&\\\gamma&a_{13}&-\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\alpha&\beta\\\gamma&\delta\end{bmatrix}\right)\right\}$$

$$V^*_{X_0}=\left\{\left(\begin{bmatrix}&&\\-q_{31}&&p_{31}\\p_{31}&&p_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\q_{21}&&q_{31}\\q_{31}&&-p_{31}\end{bmatrix}\right)\right\}\qquad G_{X_0}\sim(SL(2)\times GL(1))\cdot G_a^2$$

$(\mathfrak{g}_{x_0}, V^*_{x_0})$ の表現行列

$$\begin{bmatrix} q_{31} \\ p_{31} \\ q_{21} \\ p_{33} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -\alpha-2\delta & -2\beta & \gamma & \\ -2\gamma & -2\alpha-\delta & & \beta \\ 3\beta & & -3\delta & \\ & 3\gamma & & -3\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{31} \\ p_{31} \\ q_{21} \\ p_{33} \end{bmatrix} \qquad tr_{V^*_{x_0}} = -6\alpha-6\delta$$

generic point $Y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} -1 & \\ & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ & \end{bmatrix} \right) \cdots [\mathrm{I}]_4$

余次元1の点 $Y_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & \\ & -1 \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & \\ & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 \\ 1 & \end{bmatrix} \right) \cdots [\mathrm{I}]_3$

$[\mathrm{II}]_4$: 代表点 $X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & \\ & 0 & \\ 1 & & \end{bmatrix} \right)$

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & a_{12}-b_{12}+\beta & -b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\alpha & -b_{23} \\ a_{31}+\beta & a_{32} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{13}-b_{21}+\gamma & a_{11}-b_{22}+\delta & -b_{23} \\ a_{23} & a_{21}+\gamma & \\ -a_{11}-a_{22}-b_{11}+\delta & a_{31}-b_{12} & -b_{13} \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathfrak{g}_{x_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} & -2\beta & -2\gamma \\ -\gamma & \delta-\alpha & \\ -\beta & & \alpha-\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & \\ -\gamma & \delta & \\ b_{31} & b_{32} & -\alpha-\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$V^*_{x_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} & & p_{13} \\ & & p_{23} \\ & & p_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & -p_{23} \\ & & q_{23} \\ & & -p_{13} \end{bmatrix} \right) \right\} \qquad G_{x_0} \sim (SL(2) \times GL(1)) \cdot G_a^2$$

$(\mathfrak{g}_{x_0}, V^*_{x_0})$ の表現行列

$$\begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \\ q_{23} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -2\alpha-\delta & 2\gamma & \beta & \\ 2\beta & -\alpha-2\delta & & -\gamma \\ 3\gamma & & -3\alpha & \\ & -3\beta & & -3\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \\ q_{23} \end{bmatrix} \qquad tr_{V^*_{x_0}} = -6\alpha-6\delta$$

generic point $Y_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2\gamma \\ -\alpha-2\delta \\ -3\alpha \\ -3\beta \end{pmatrix}$

$Y_0 = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & -1 \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ 1 & & \\ & & \end{bmatrix} \right) \cdots [\mathrm{I}]_2$

余次元 1の点

$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ この相対不変式 $= f_{23}$ 指標 $= -3\delta$

$X_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix} \right)$

$X_0 + tX_1 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & t \\ 1 & & \end{bmatrix} \right) \sim \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix} \right) \cdots [\mathrm{III}]_6$

$[\mathrm{III}]_5$: 代表点 $X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix} \right)$ これは始めの例

$[\mathrm{III}]_6$: 代表点 $X_0 = \left(\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix} \right)$

$$\tilde{A} \cdot X_0 = \left(\begin{bmatrix} a_{11}-b_{11}+\alpha & a_{12}-b_{12}+\beta & a_{13}-b_{13} \\ a_{21}-b_{21} & a_{22}-b_{22}+\alpha & a_{23}-b_{23}+\beta \\ a_{31}-b_{31} & a_{32}-b_{32} & a_{33}-b_{33}+\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_{21}+\gamma & a_{11}-b_{22}+\delta & a_{12}-b_{23} \\ -b_{31} & a_{22}-b_{32}+\gamma & a_{22}-b_{33}+\delta \\ & a_{31} & a_{32}+\gamma \end{bmatrix} \right)$$

$$\mathfrak{g}_{x_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} -\delta & a_{23}+\beta & a_{13} \\ & & a_{23} \\ & & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\delta & a_{23}+2\beta & a_{13} \\ & & a_{23}+\beta \\ & & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \beta \\ & & \delta \\ & & \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$$V^*_{x_0} = \left\{ \left(\begin{bmatrix} & & \\ & & \\ p_{31} & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ -p_{31} & & \\ q_{31} & -p_{31} & \end{bmatrix} \right) \right\}$$

$(\mathfrak{g}_{x_0}, V^*_{x_0})$ の表現行列

$$\begin{bmatrix} p_{31} \\ q_{31} \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -2\delta & \\ -3\beta & -3\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{31} \\ q_{31} \end{bmatrix}$$

generic point Y_0: $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} & \\ 1 & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & \\ & -1\end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix}1 & \\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & 1\\ 1 & \end{bmatrix}\right)$

$$A_0 = \left(\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & a_{23} & a_{13}\\ & & a_{23}\\ & & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & a_{23} & a_{13}\\ & & a_{23}\\ & & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}\right) \qquad [\mathrm{I}]_3$$

余次元1の点

$Y_1 = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix}0\\-3\delta\end{bmatrix}$ 相対不変式 $= \beta_1$ 指標 $= -2\delta$

$Y_1 = \left(\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} & \\ 1 & \end{bmatrix}\right) \sim \left(\begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \\ & \end{bmatrix}\right) \quad [0]_2$

3. 一覧表

双対	X_1	X_2	$\det(uX_1+vX_2)$	退化点での階数	$\dim V^*_{X_0}$	余法束の order
$\mathrm{II}_1 - \mathrm{O}_1$	$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&1\end{bmatrix}$	$uv(u+v)$	2, 2, 2	0	-0
$\mathrm{II}_2 - \mathrm{O}_2$	$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&1&\\&&\\&&1\end{bmatrix}$	u^2v	2=2, 2	1	$-s-\frac{1}{2}$
$\mathrm{I}_8 - \mathrm{O}_3$	$\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$	uv^2	2, 1=1	3	$-2s-\frac{3}{2}$
$\mathrm{II}_6 - \mathrm{I}_3$	$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&1&\\&&1\\&&\end{bmatrix}$	u^3	2=2=2	2	$-3s-\frac{3}{2}$
$\mathrm{I}_7 - \mathrm{I}_7$	$\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}$	v^3	1=1=1	4	$-6s-\frac{8}{2}$
$\mathrm{O}_4 - \mathrm{O}_4$	$\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&1\end{bmatrix}$	v^3	0=0=0	8	余法束が非概均質
$\mathrm{II}_3 - \mathrm{I}_4$	$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&&1\\&&\\&1&\end{bmatrix}$	(u^2, uv, v^2)	[3, 3]	4	$-4s-\frac{4}{2}$
$\mathrm{II}_5 - \mathrm{I}_1$	$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&1&\\&&1\\&&\end{bmatrix}$	(u^2, uv, v^2)	[2, 3]	4	$-4s-\frac{4}{2}$
$\mathrm{II}_4 - \mathrm{I}_2$	$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&1&\\&&\\1&&\end{bmatrix}$	(u^2, uv, v^2)	[3, 2]	4	$-4s-\frac{4}{2}$
$\mathrm{I}_5 - \mathrm{I}_5$	$\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\&&\end{bmatrix}$	(uv, v^2)	[2, 3]	5	$-6s-\frac{7}{2}$
$\mathrm{I}_6 - \mathrm{I}_6$	$\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&&\\&1&\\1&&\end{bmatrix}$	(uv, v^2)	[3, 2]	5	$-6s-\frac{7}{2}$

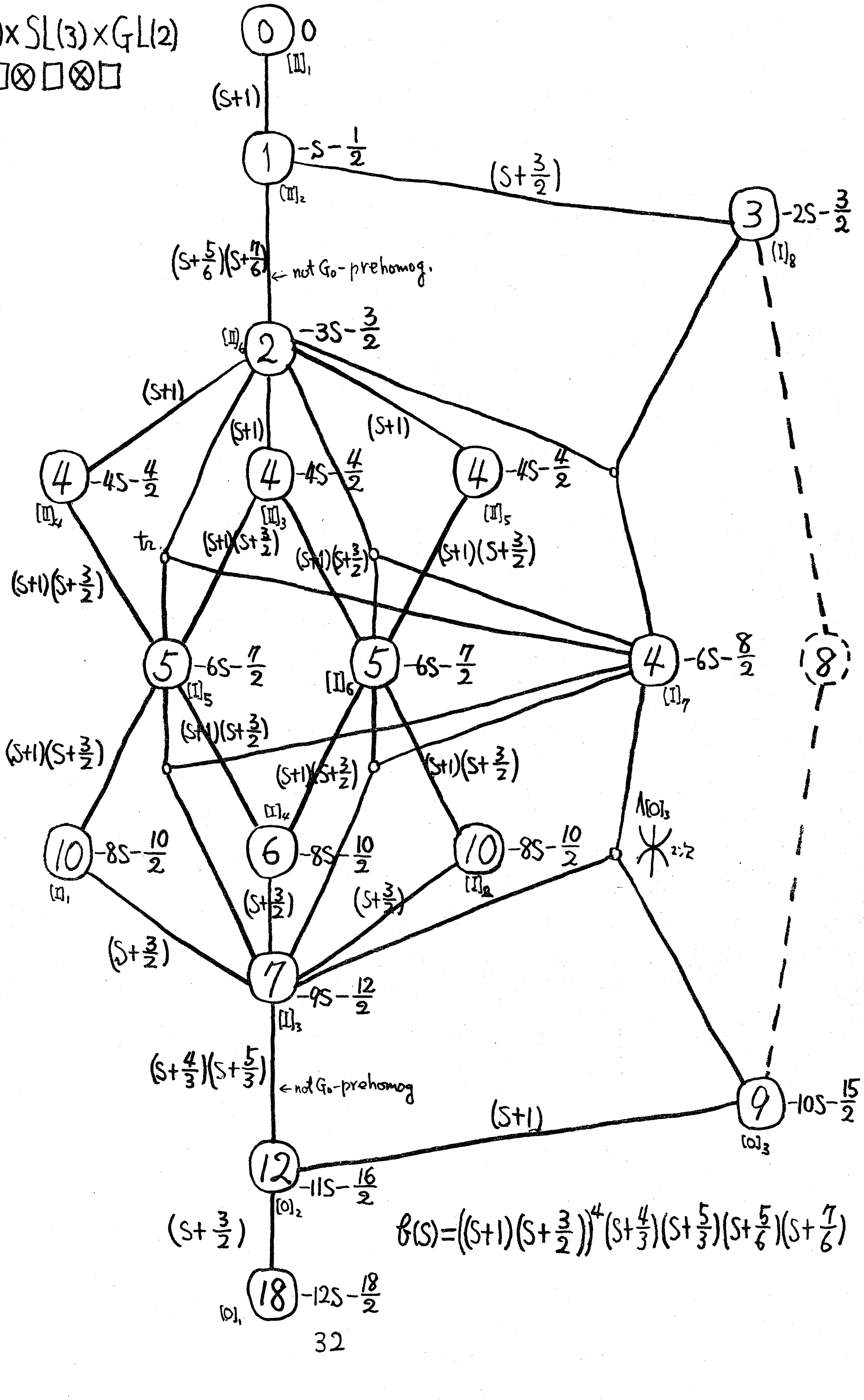
双対	X_1	X_2	uX_1+vX_2の小行列のdet	退化点での階数	$\dim V^*_{X_0}$	余法束のorder
$\mathrm{I}_4-\mathrm{II}_3$	$\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}$	uv	1, 1	6	$-8s-\frac{10}{2}$
$\mathrm{I}_3-\mathrm{II}_6$	$\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&1&\\1&&\\&&\end{bmatrix}$	v^2	1=1	7	$-9s-\frac{12}{2}$
$\mathrm{O}_3-\mathrm{I}_8$	$\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&\end{bmatrix}$	v^2	0=0	9	$-10s-\frac{15}{2}$
$\mathrm{I}_1-\mathrm{II}_5$	$\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&1&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	(u,v)	[1,2]	10	$-8s-\frac{10}{2}$
$\mathrm{I}_2-\mathrm{II}_4$	$\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&&\\1&&\\&&\end{bmatrix}$	(u,v)	[2,1]	10	$-8s-\frac{10}{2}$
$\mathrm{O}_2-\mathrm{II}_2$	$\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	v	0	12	$-11s-\frac{16}{2}$
$\mathrm{O}_1-\mathrm{II}_1$	$\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&\end{bmatrix}$	1		18	$-12s-\frac{18}{2}$

（注）例えばII_3の場合$\det(uX_1+vX_2)=0$であるが，uX_1+vX_2の小行列の行列式を考えると(u^2, uv, v^2)がでてくる。また$\mathrm{rank}(X_1, X_2)$，$\mathrm{rank}({}^tX_1, {}^tX_2)$を[3, 3]と表わした。退化点の階数とは，$uX_1+vX_2$で$u=0$あるいは$v=0$とした時の階数。

上の表は各軌道の不変量を表わしており，互いに群の作用で移り得ないことがわかる。

$SL(3) \times SL(3) \times GL(2)$

$\square \otimes \square \otimes \square$



$$b(S) = \left((S+1)\left(S+\tfrac{3}{2}\right)\right)^4 \left(S+\tfrac{4}{3}\right)\left(S+\tfrac{5}{3}\right)\left(S+\tfrac{5}{6}\right)\left(S+\tfrac{7}{6}\right)$$

今までの情報では、例えば$[0]_3$, $[I]_3$, $[I]_7$が余次元1で交わっていることがわからない。それを示す。

$[0]_3$の代表点は$X_0=\left(\begin{bmatrix} 0&0\\0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0\\0&1 \end{bmatrix}\right)$, 余次元1の点$Y_2=\left(\begin{bmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\0&1&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{bmatrix}\right)$

だから, $[0]_3$と$[I]_7$との余次元1の交わりは

$$G\left(\left(\begin{bmatrix} 0&0\\0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0\\0&1 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\0&1&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{bmatrix}\right)\right)$$

である。これが

$$G\left(\left(\begin{bmatrix} 1&0\\0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&1\\1&0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&-1\\0&-1&1 \end{bmatrix}\right)\right)=L$$

のZariski閉包にふくまれていることを示せばよい。

$$\left(\left(\begin{bmatrix} 1&0\\0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&1\\1&0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0&0&t\\0&t&0\\t&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&-t\\0&-t&1 \end{bmatrix}\right)\right)\in L$$

を考える。

$$\left(\left(\begin{bmatrix} 1&0\\0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&1\\1&0 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0&0&t\\0&t&0\\t&0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&-t\\0&-t&1 \end{bmatrix}\right)\right)$$

$$\sim\left(\left(\begin{bmatrix} 0&1\\0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0\\0&1 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} t&0&t\\0&0&0\\0&t&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&-t\\-t&0&1 \end{bmatrix}\right)\right) \quad \left(\text{by } \left(1_3, \begin{bmatrix} 1&1\\0&1 \end{bmatrix}, 1_2\right)\right)$$

$$\sim\left(\left(\begin{bmatrix} 0&t\\0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0\\0&1 \end{bmatrix}\right), \left(\begin{bmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\0&1&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&-t\\-t&0&1 \end{bmatrix}\right)\right) \quad \left(\text{by } \left(1_3, 1_3, \begin{pmatrix} t&\\&1 \end{pmatrix}\right)\right)$$

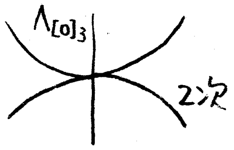
$$\to\left(\left(\begin{bmatrix} 0&0\\0&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1&0\\0&1 \end{bmatrix}\right) \left(\begin{bmatrix} 0&0&1\\1&0&0\\0&1&0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&1 \end{bmatrix}\right)\right) \quad (t\to 0)$$

$-{}^tA_0Y_2=Y_2$ なる $A_0\in\mathfrak{g}_{X_0}$ をえらぶと

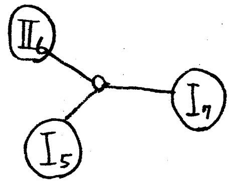
$$V_{X_0}^{*}\ni Y=\begin{bmatrix} 0\\0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0 \end{bmatrix}\longmapsto \frac{1}{3}Y \mod \mathfrak{g}_{X_0}Y_2$$

$\frac{1}{3}=\frac{m}{m+n}$ $(m,n)=1$ として $m=1$, $n=2$

これで



がわかる。 つぎに



をしらべる。

$$\left(\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}\right),\left(\begin{bmatrix}&&p\\&-2p&*\\p&*&*\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&-p\end{bmatrix}\right)\right)$$

の形の元をGの作用で動かして，その極限に

$$\left(\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\&&\end{bmatrix}\right),\left(\begin{bmatrix}&&\\&&1\\1&1&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&-1\end{bmatrix}\right)\right)$$

が入っていればよい。

$$\left(\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\1&&\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}&&t\\&-2t&1\\t&t&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&-t\end{bmatrix}\right)\right)$$

$$\sim\left(\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\t&&\end{bmatrix}\right)\left(\begin{bmatrix}&&t\\&-2t&1\\1&1&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&-1\end{bmatrix}\right)\right)\ \left(\text{by }\left(\begin{bmatrix}1&&\\&1&\\&&t\end{bmatrix}1_3\ \ 1_2\right)\right)$$

$$\to\left(\left(\begin{bmatrix}1&&\\&&\\&&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&1\\&1&\\&&\end{bmatrix}\right),\left(\begin{bmatrix}&&\\&&1\\1&1&\end{bmatrix}\begin{bmatrix}&&\\&&\\&&-1\end{bmatrix}\right)\right)\quad\text{by } t\to 0$$

これで$[\mathrm{III}]_6, [\mathrm{I}]_7, [\mathrm{I}]_5$が余次元1で交わっていることがわかった。

$-{}^tA_0Y_1=Y_1$ なる $A_0\in\mathfrak{g}_{x_0}$ をえらんで

$$V^*_{x_0}\ni Y=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}\longmapsto -3\delta Y\quad \mathrm{mod}\ \mathfrak{g}_{x_0}Y_1\qquad \delta=-\frac{1}{6}$$

ゆえに $\quad\frac{1}{2}=\frac{m}{n+m}\qquad m=n=1$

これで Λ_{II_6}, Λ_{I_7}, Λ_{I_5} が trancsversal に交わっていることがわかる。 Lagrangeanの点を(X_1, X_2, Y_1, Y_2)とあらわしたとき，$(\mathrm{rank}\,X_1{}^tY_1,\ \mathrm{rank}\,X_1{}^tY_2,\ \mathrm{rank}\,X_2{}^tY_1)$は群の作用で

不変である。このことを使って，Λ_{II_3} がこれらと交わることはないことがわかる。

3. 相対不変式.

$$g = \left(A, B, \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \in G$$

に対して

$$V \ni (X_1, X_2) \xmapsto{g} (A(aX_1 + bX_2)B^{-1}, A(cX_1 + dX_2)B^{-1})$$

不定元 u, v をとって

$$(X_1, X_2) = X_1 u + X_2 v$$

と考える。

$$\begin{aligned} &\det(X_1 u + X_2 v) \\ &= P_0(X_1, X_2)u^3 + P_1(X_1, X_2)u^2 v + P_2(X_1, X_2)uv^2 + P_3(X_1, X_2)v^3 \end{aligned}$$

とおくと，P_0, P_1, P_2, P_3 は X_1, X_2 の成分を変数とする 3 次式になっている。これらは，A, B を作用しても変らず，$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ の作用で変りうる。

一般に，2 元 3 次式

$$x_0 u^3 + x_1 u^2 v + x_2 u v^2 + x_3 v^3$$

で，$(u, v) \mapsto (u, v)\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = (au + cv, bu + dv)$ という作用に関して，係数 x_0, x_1, x_2, x_3 の相対不変式が知られている。それは上の多項式の判別式である。具体的には

$$x_1^2x_2^2+18x_0x_1x_2x_3-4x_0x_3^3-4x_1^3x_3-27x_0^2x_3^2$$

したがって，今の場合 x_0，x_1，x_2，x_3，をそれぞれ P_0，P_1，P_2，P_3，におきかえたものである。 以上のことから，我々の考察してきた既約概均質ベクトル空間の相対不変式が求まった。 すなわち，

$$X_1=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} \qquad X_2=\begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{pmatrix}$$

とおくとき，相対不変式 $f(X_1,X_2)$ は

$$f(X_1,X_2)=P_1^2P_2^2+18P_0P_1P_2P_3-4P_0P_3^3-4P_1^3P_3-27P_0^2P_3^2$$

ここで

$$P_0=\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$$P_1=\begin{pmatrix} x'_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x'_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x'_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_{11} & x'_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x'_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x'_{32} & x_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x'_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x'_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x'_{33} \end{pmatrix}$$

$$P_2=\begin{pmatrix} x_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x'_{11} & x_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x_{32} & x'_{33} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x_{33} \end{pmatrix}$$

$$P_3=\begin{pmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{pmatrix}$$

$f(X_1,X_2)$ は X_1, X_2 の成分の斉次12次式であることがわかる。