数理解析研究所講究録
第239巻 1975年 31-49

退化した放物型方程式の基本解の構成

東北大　理　島倉紀夫

退化した楕円型作用素の研究において，その基本解を調べることは，退化していない場合との違いを考える上でひとつの興味ある事柄である．たとえば，退化した楕円型作用素がひとつ与えられているとして，それをLとすると，$L+\lambda I$ のGreen函数の $\lambda\uparrow+\infty$ のときの挙動を調べればLの固有値の漸近分布の法則がわかるであろう．しかし，$L+\lambda I$ のGreen函数はしばしば作りにくい．それよりも，放物型作用素 $\frac{\partial}{\partial t}+L$ のGreen函数を作り，その $t\downarrow 0$ のときの挙動を調べることの方が容易であることが多く，固有値の漸近分布の問題に利用する立場からいえば，上記とほゞ同質の情報をそこから引出すことができる．しかし，もとよりこうしたGreen函数を構成する一般的な方法が知られているわけではない．退化のし方に種々の制限をおくことによってようやく計算が可能になるといういくつかの例が知られているにすぎない．ここでもそうした例のうちのひとつを考えてみよう．

ここでは，次の(1)式で定義される一変数の作用素Lを考える． 境界条件を設定しないことにはLの作用素としての意味が定まらないが，ここではGreen函数以前の段階の基本解の構成だけを問題にし，境界条件には立入らないことにする．

xは実半直線$\mathbb{R}_+=(0,+\infty)$を動く変数とし，

$$Lu(x)=P^0(D_x)(xu(x))+P^1(D_x)u(x),\quad 但し,\quad D_x=-i\frac{d}{dx}, \qquad (1)$$

とする． ここで，

$$P^k(\xi)=\sum_{j=0}^{m-k} p^k_j\,\xi^j,\quad k=0,1\ ;\quad m=2b\ (b=1,2,\cdots), \qquad (2)$$

p^k_jはすべてxを含まない定数で

$$p^0_j\in\mathbb{R}\ (0\leqq j\leqq m),\quad p^1_j\in\mathbb{C}\ (0\leqq j\leqq m-1),\quad 特に,\ p^0_m=1; \qquad (3)$$

$$\xi\in\mathbb{R}\ のとき\ P^0(\xi)>0; \qquad (4)$$

とする． $P^1(\xi)$については特にこれ以上の仮定をおかない．

このLについて$\frac{\partial}{\partial t}+L$のひとつの基本解$K(t;x,y)$を作り，十分小さな$t$の範囲$0<t\leqq t_0$における$K$およびその微係数の評価をすることが目標である．

Lは$x=0$で退化しているが，その仕方は単純である． いささか単純すぎる嫌いもあるが，このようなものに話しを限った理由は次の通りである． 第一に，こうすることにより基本解を一応具体的に書くことができる． しかし第二に，そのための計算は決してtrivialではない． そして第三に，退化したことによる効果を，基本解の粗い評価からでも見る

ことができる。以上の意味で，(1)～(4)の設定はモデルとして適当であろう。比較のため，退化していない作用素 $\frac{\partial}{\partial t}+P^0(D_x)$（$P^0$ は上と同じもの）の基本解 $E(t;x,y)=\frac{1}{2\pi}\times\times\int_{-\infty}^{+\infty}e^{i(x-y)-tP^0(\xi)}d\xi$ を念頭におき，これと以下の結果とを照らし合わせてみるとよい。このE(t;x,y)が

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p E(t;x,y)\right|\leqq Cte.\,t^{-(1+p)/m}\exp\{-c(|x-y|^m/t)^{\frac{1}{m-1}}\}$$

なる評価をもつことはよく知られている（S.D. Eidelman : Parabolic Systems）。

結果をのべよう：

<u>定　理</u>：　<u>Lが(1)～(4)のように与えられたとき，$\frac{\partial}{\partial t}+L$ には，十分小さな $t_0(>0)$ に対して，$0<t\leqq t_0$，$x>0$ かつ $y>0$ の範囲で，次の評価をもつ基本解が存在する</u>：

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^p\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^q K(t;x,y)\right|\leqq$$

$$\leqq Cte.\,t^{\frac{p+q+1}{1-m}}\exp[-ct(x+y)-ct^{\frac{1}{1-m}}|x^{\frac{m-1}{m}}-y^{\frac{m-1}{m}}|^{\frac{m}{m-1}}]+$$

$$+Cte.\,t^{\frac{p+q+1}{1-m}}\exp[-ct^{\frac{1}{1-m}}(x+y)]\Psi(\mathcal{R}e\,\rho+p+2;ct^{\frac{1}{1-m}}x), \qquad (5)$$

<u>但し，c は (t,x,y) によらない正定数，$\rho=ip^1_{m-1}$；$p,q=0,1,2,\cdots$；そして，$\Psi(\lambda;x)=\int_0^{+\infty}e^{-x\theta}(1+\theta)^{\lambda-2}d\theta$ である（$x\uparrow+\infty$ のとき $\Psi(\lambda;x)=O(1/x)$；$x\downarrow 0$ のときは，$\lambda<1$ なら $\Psi(\lambda;x)=O(1)$，$\lambda=1$ なら $\Psi(\lambda;x)=O(\log\frac{1}{x})$，$\lambda>1$ なら $\Psi(\lambda;x)=O(x^{1-\lambda})$）。</u>

尚、講演のときの予稿にいくつかの誤りがあったことをおわびし、訂正させていただく。

§1 $m=2$ の場合.

一般性を失うことなく、次の場合に限ってよい：

$$\begin{cases} Lu(x)=\left(-\dfrac{d^2}{dx^2}+a^2\right)(xu(x))-\rho\dfrac{d}{dx}u(x)+bu(x), & (1.1) \\ \text{又は、}\ Lu(x)=-\dfrac{d^2}{dx^2}(xu(x))-\rho\dfrac{d}{dx}u(x)+bu(x). & (1.1)' \end{cases}$$

($a>0$, $b\in\mathbb{C}$, $\rho\in\mathbb{C}$, これらは定数). すると $\frac{\partial}{\partial t}+L$ の基本解は

$$\begin{cases} K(t;x,y)=\dfrac{a}{\mathrm{sh}(at)}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{\rho+1}{2}} I_{-\rho-1}\left(\dfrac{2a\sqrt{xy}}{\mathrm{sh}(at)}\right)e^{-bt-a(x+y)\coth(at)}, & (1.2) \\ \text{又は、}\ K(t;x,y)=\dfrac{1}{t}\left(\dfrac{y}{x}\right)^{\frac{\rho+1}{2}} I_{-\rho-1}\left(\dfrac{2\sqrt{xy}}{t}\right)e^{-bt-\frac{x+y}{t}}, & (1.2)' \end{cases}$$

となる($I_{-\rho-1}$ は変形Bessel函数). この場合、次§で用いられる補助函数 ζ と A はそれぞれ次のようなものである：

$$\begin{cases} \zeta(t,\xi)=\dfrac{a\xi\,\mathrm{ch}(at)-ia^2\mathrm{sh}(at)}{a\,\mathrm{ch}(at)+i\xi\,\mathrm{sh}(at)}, \quad A(t,\xi)=\left\{\mathrm{ch}(at)+\dfrac{i\xi}{a}\mathrm{sh}(at)\right\}^{\rho}e^{-bt}, & (1.3) \\ \text{又は、}\ \zeta(t,\xi)=\dfrac{\xi}{1+it\xi}, \quad A(t,\xi)=(1+it\xi)^{\rho}e^{-bt}. & (1.3)' \end{cases}$$

同じく次§で定義される核 $H_0(t;x)$ は次のようになる：

$$\begin{cases} H_0(t;x)=\left(\dfrac{\mathrm{sh}(at)}{a}\right)^{\rho}\dfrac{x^{-\rho-1}}{\Gamma(-\rho-1)}e^{-bt-ax\coth(at)}, & (1.4) \\ \text{又は、}\ H_0(t;x)=\dfrac{(t/x)^{\rho}/x}{\Gamma(-\rho-1)}e^{-bt-(x/t)}. & (1.4)' \end{cases}$$

$\mathrm{Re}\,\rho<-1$ のとき、K と H_0 はそれぞれDirichlet問題のGreen函数とPoisson核になる。この基本解をもたらす方法はより一般な形で次§以下にのべるが、特に ρ が整数の場合、定理における右辺第二項は不要になる。

§2 $K(t;x,y)$ の構成.

(1)〜(4) のようなLに対して初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}+Lu=0, \quad u=u(t,x), \; t>0, \; x>0; \\ u(0,x)=u_0(x) \end{cases} \tag{2,1}$$

を適当な境界条件のもとで解きたい。そのために

$$\begin{bmatrix} v(t,\xi) \\ v_0(\xi) \end{bmatrix} = \int_0^{+\infty} e^{-ix\xi} \begin{bmatrix} u(t,x) \\ u_0(x) \end{bmatrix} dx, \qquad \xi \in R, \tag{2,2}$$

とおくと，v のみたすべき方程式は形式的には

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}+iP^0(\xi)\dfrac{\partial v}{\partial \xi}+P^1(\xi)v=\displaystyle\sum_{q=0}^{m-2} Q_q(\xi)(\gamma_q u)(t), \\ v(0,\xi)=v_0(\xi), \end{cases} \tag{2,3}$$

となる。但し，$(\gamma_q u)(t)=\lim_{x\downarrow 0} D_x^q u(t,x)$. $Q_q(\xi)$ は ξ の $(m-q-2)$ 次多項式である。(2,3) の解を次の形で探そう：

$$v(t,\xi)=w(t,\xi)+\sum_{q=0}^{m-2}\int_0^t A_q(t-s,\xi)(\gamma_q u)(s)ds, \tag{2,4}$$

但し，
$$\begin{cases} w(t,\xi)=A(t,\xi)v_0(\zeta(t,\xi)), \\ A_q(t,\xi)=Q_q(\zeta(t,\xi))A(t,\xi), \quad 0\leqq q\leqq m-2. \end{cases} \tag{2,5}$$

(2,3) の第一式の右辺および (2,4) の右辺第二項はいずれも境界値についての項だから，厳密ではないがこれらを 0 とおいて，$w(t,\xi)$ についてだけ考えよう。v_0 の如何にかかわらず w が

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t}+iP^0(\xi)\dfrac{\partial w}{\partial \xi}+P^1(\xi)w=0, \; t>0, \; \xi\in R; \\ w(0,\xi)=v_0(\xi) \end{cases} \tag{2,6}$$

をみたすためには，補助函数 $\zeta(t,\xi)$ と $A(t,\xi)$ がそれぞれ次の

初期値問題の解であればよい：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\zeta}{\partial t}+iP^0(\xi)\dfrac{\partial\zeta}{\partial\xi}=0\,,\ t>0,\ \xi\in\mathbb{R}\ ;\ \zeta(0,\xi)=\xi\ ; & (2,7) \\ \dfrac{\partial A}{\partial t}+iP^0(\xi)\dfrac{\partial A}{\partial\xi}+P^1(\xi)A=0\,,\ t>0,\ \xi\in\mathbb{R}\ ;\ A(0,\xi)=1. & (2,8) \end{cases}$$

$\zeta(t,\xi)$ は実数値ではない。 しかし，§4 で示すように，$t>0,\ \xi\in\mathbb{R}$ なる限り $\mathcal{I}m\,\zeta(t,\xi)<0$ である。 従って，上記(2,5)において $v_0(\zeta(t,\xi))$ を考えたことには意味がある。

このように ζ と A が定まったとして，

$$K(t;x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}A(t,\xi)e^{ix\xi-iy\zeta(t,\xi)}d\xi\,, \tag{2,9}$$

$$H_q(t;x)=Q_q(-D_y)K(t;x,y)\big|_{y\downarrow 0}\,,\quad 0\leqq q\leqq m-2\,, \tag{2,10}$$

とおくと，

$$u(t,x)=\int_0^{+\infty}K(t;x,y)u_0(y)dy+\sum_{q=0}^{m-2}\int_0^t H_q(t-t';x)c_q(t')dt' \tag{2,11}$$

（ $c_0(t),\cdots,c_{m-2}(t)$ は $t\geqq 0$ で定義されたなめらかな函数とする）は少くとも(2,1)をみたすから，$K(t;x,y)$ は $\frac{\partial}{\partial t}+L$ のひとつの基本解である。

以上が $K(t;x,y)$ を構成するための形式的な計算である。K およびその微係数の評価を得るには，当然のことながら，補助函数 ζ と A の性質をある程度知らねばならない。それを調べた結果は§4 でまとめて述べることにして，次の§3 では，§4 の内容を適当に引用しつつ定理を証明する。

$m=2$ の場合の基本解の形は§1 に示した通りであるが，$m\geqq 4$ の場合のひとつの例を示し，問題の複雑さの程度を知

る助けにしよう。 P^0 と P^1 を

$$P^0(\xi)=\xi^m,\ P^1(\xi)=-i\rho\xi^{m-1} \tag{2,12}$$

としよう。 即ち，$Lu=D_x^m(xu)-i\rho D_x^{m-1}u$ である。 このとき最初の仮定 (1)～(4) のうち (4) はみたされていないが。

すると，上記の補助函数 ζ と A は次のようになる：

$$\begin{cases}\zeta(t,\xi)=\xi\{1+i(m-1)t\xi^{m-1}\}^{\frac{1}{1-m}},\\ A(t,\xi)=\{1+i(m-1)t\xi^{m-1}\}^{\frac{\rho}{m-1}}.\end{cases} \tag{2,13}$$

従って，

$$\begin{cases}K(t;x,y)=\dfrac{\sigma}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(u)^{-\rho}\exp\{i\sigma xu-i\sigma yu\phi(u)\}du,\\ H_q(t;x)=\dfrac{\rho+q+1}{-2\pi}\sigma^{m-q-1}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}u^{m-q-2}\phi(u)^{m-q-2-\rho}e^{i\sigma xu}du,\\ \text{但し，}0\leqq q\leqq m-2,\quad \sigma=\{(m-1)t\}^{\frac{1}{1-m}},\ \phi(u)=(1+iu^{m-1})^{\frac{1}{1-m}}.\end{cases} \tag{2,14}$$

この $K(t;x,y)$ は残念ながら初等函数ではない。 従ってこれを評価する計算がある程度複雑になるのは止むを得ない。

所で，一般な場合（仮定 (1)～(4) がみたされる場合）の K は (2,14) の K で近似される。 何故なら，一般な場合の ζ と A は (2,13) の ζ と A に（$|\xi|\to\infty$ のとき）十分近いからである（§4 の (4,8) および (4,13) 参照）。 (2,9) の K と (2,14) の K との関係は $m=2$ の場合，(1,2) の K と (1,2)′ の K との関係である。

§3　定理の証明.

(2,9)式で定義された$K(t;x,y)$を評価するのが目的だが，積分路を実軸からξ-上半平面の路に次のように変えよう：

$$\begin{cases} \xi=-\infty \text{ から } \xi=\zeta(-t/2,-\infty) \text{ まで（} \zeta(\sigma,-\infty) \text{ の軌跡に沿うて）}, \\ \xi=\zeta(-t/2,-\infty) \text{ から } \xi=\zeta(-t/2,+\infty) \text{ まで（} \zeta(-t/2,\mathbb{R}) \text{ の軌跡に沿うて）}, \\ \xi=\zeta(-t/2,+\infty) \text{ から } \xi=+\infty \text{ まで（} \zeta(\sigma,+\infty) \text{ の軌跡に沿うて）}. \end{cases}$$

するとKは次の三つの積分の和になる：

$$K(t;x,y)=k_-(t;x,y)+k(t;x,y)-k_+(t;x,y), \tag{3,1}$$

但し，

$$k_\pm(t;x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\pm\infty}^{\zeta(-t/2,\pm\infty)} A(t,\xi)e^{ix\xi-iy\zeta(t,\xi)}d\xi$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{-t/2}\frac{A(t+\sigma,\pm\infty)}{A(\sigma,\pm\infty)}P^\circ(\zeta(\sigma,\pm\infty))e^{ix\zeta(\sigma,\pm\infty)-iy\zeta(t+\sigma,\pm\infty)}d\sigma$$

（複号同順）；　(3,2)

$$k(t;x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{\zeta(-t/2,-\infty)}^{\zeta(-t/2,+\infty)} A(t,\xi)e^{ix\xi-iy\zeta(t,\xi)}d\xi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{A(t/2,\xi)}{A(-t/2,\xi)}\frac{P^\circ(\zeta(-t/2,\xi))}{P^\circ(\xi)}e^{ix\zeta(-t/2,\xi)-iy\zeta(t/2,\xi)}d\xi, \tag{3,3}$$

この変形で(4,2)，(4,3)および(4,5)を用いた.

補題3,1:　$x>0,\ y>0$かつ$0<t\leq t_0$（t_0は十分小）とすると，(t,x,y)に無関係な正定数cが存在して次の不等式がなりたつ：

$$\begin{cases} |D_x^p D_y^q k_\pm(t;x,y)| \leqq C_{t_0} s^{p+q+1} e^{-cs(x+y)}\psi(\mathrm{Re}\,\rho+p+2;csx), \\ \text{但し，} s=\left(\frac{m-1}{2}t\right)^{-\frac{1}{m-1}},\ \rho=ip'_{m-1};\ p,q=0,1,2,\cdots; \\ \psi(\lambda;x)=\int_0^{+\infty}e^{-x\theta}(1+\theta)^{\lambda-2}d\theta. \end{cases} \tag{3,4}$$

証明： $\tau=((m-1)|\sigma|)^{-\frac{1}{m-1}}$ （ $-t/2<\sigma<0$, つまり, $s<\tau<+\infty$ ）
とおくと, (4,9)により, $\mathcal{R}e\{ix\zeta(\sigma,\pm\infty)-iy\zeta(t+\sigma,\pm\infty)\}\leqq$
$\leqq -c(\tau x+sy)$, $|\zeta(\sigma,\pm\infty)^p\zeta(t+\sigma,\pm\infty)^q P^0(\zeta(\sigma,\pm\infty))|\leqq Cte.\, s^q\tau^{p+m}$.
そして, (4,15)から, $|A(t+\sigma,\pm\infty)/A(\sigma,\pm\infty)|\leqq Cte.(\tau/s)^{\mathcal{R}e\,\rho}$.
更に, $d\sigma=-Cte.\,\tau^{-m}d\tau$ であるから,

$$\begin{aligned}|D_x^p D_y^q k_\pm| &\leqq Cte.\, s^{q-\mathcal{R}e\,\rho}e^{-csy}\int_s^{+\infty}\tau^{p+\mathcal{R}e\,\rho}e^{-c\tau x}d\tau\\ &= Cte.\, s^{p+q+1}e^{-cs(x+y)}\int_0^{+\infty}e^{-csx\theta}(1+\theta)^{p+\mathcal{R}e\,\rho}d\theta. \quad //\end{aligned}$$

注意： $m=2$なら $\xi\to\zeta(t,\xi)$ による実軸の像$\zeta(t,R)$は閉じている（円である）から, k_+とk_-のちがいは定数倍だけである（ρが整数なら全く一致する）。 $m\geqq 4$ のときは, $\zeta(t,R)$は決して閉じていない.

次に, $k(t;x,y)$を評価しよう。それには

$$k_1(t;x,y)=e^{i(x-y)\alpha}k(t;x,y), \quad \alpha=\frac{1}{m}p^0_{m-1}, \tag{3,5}$$

とおき, これを評価すればよい。(3,3)より,

$$D_x^p D_y^q k_1(t;x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}a_{pq}(t,\xi)e^{if(\xi,t,x,y)}d\xi \tag{3,6}$$

となる, 但し,

$$\begin{cases} f(\xi,t,x,y)=x\zeta_- - y\zeta_+, \quad \zeta_\pm=\zeta(\pm t/2,\xi)+\alpha,\\ a_{pq}(t,\xi)=(\zeta_-)^p(\zeta_+)^q\,\dfrac{P^0(\zeta_- -\alpha)}{P^0(\xi)}\cdot\dfrac{A(t/2,\xi)}{A(-t/2,\xi)}. \end{cases} \tag{3,7}$$

以後簡単のため必要に応じて次のようにおくことがある：

$$s=\left(\frac{m-1}{2}t\right)^{-\frac{1}{m-1}},\quad u=\frac{\xi+\alpha}{s},\tag{3.8}$$

又，ξ-平面の領域$\mathcal{D}_\varepsilon(t)$とそのu-平面での像$\mathcal{D}'_\varepsilon$を次のように定義する：　$0<\varepsilon<1$ として，

$$\mathcal{D}_\varepsilon(t)=\{\xi\in\mathbb{C};\ \frac{\varepsilon-3}{2m-2}\pi\leqq\arg(\xi+\alpha)\leqq\frac{1-\varepsilon}{2m-2}\pi,\ \text{又は},$$
$$\frac{2m-3+\varepsilon}{2m-2}\pi\leqq\arg(\xi+\alpha)\leqq\frac{2m+1-\varepsilon}{2m-2}\pi\quad\text{又は}\ |\xi+\alpha|\leqq(1-\varepsilon)s\},$$

$$\mathcal{D}'_\varepsilon=\{u\in\mathbb{C};\ \frac{\varepsilon-3}{2m-2}\pi\leqq\arg u\leqq\frac{1-\varepsilon}{2m-2}\pi,\ \text{又は},$$
$$\frac{2m-3+\varepsilon}{2m-2}\pi\leqq\arg u\leqq\frac{2m+1-\varepsilon}{2m-2}\pi\quad\text{又は}\ |u|\leqq1-\varepsilon\}.\tag{3.9}$$

（$\mathcal{D}_\varepsilon(t)$は(4.7)における$\Omega_\varepsilon(t/2)$を平行移動したもの）．

すると，(4.8)により，$\xi\in\mathcal{D}_\varepsilon(t)$に対して

$$|a_{pq}(t,\xi)|\leqq\begin{cases}\mathrm{Cte.}(|\xi|+1)^{p+q}, & |\xi|\leqq\mathrm{Cte.}s\ \text{のとき},\\ \mathrm{Cte.}|\xi|^{p+q}(1+t|\xi|^{m-1})^{-\frac{m+p+q}{m-1}}, & |\xi|\geqq\mathrm{Cte.}s\ \text{のとき}\end{cases}$$

がなりたつ。　これらをまとめると，

$$|a_{pq}(t,\xi)|\leqq\mathrm{Cte.}s^{p+q}(1+|u|)^{-m},\quad 0<t\leqq t_0,\ \xi\in\mathcal{D}_\varepsilon(t).\tag{3.10}$$

この評価は特に$\xi\in\mathbb{R}$のときなりたつから，

補題3.2:　<u>$x>0$, $y>0$ かつ $0<t\leqq t_0$ とすると，(t,x,y)に無関係な正定数cが存在して次の不等式がなりたつ：</u>

$$|D_x^pD_y^qk_1(t;x,y)|\leqq\mathrm{Cte.}s^{p+q+1}e^{-ct(x+y)},\quad p,q=0,1,2,\cdots.\tag{3.11}$$

これはk_1の粗い評価であるが，もう少し詳しい評価をすることができる．　それには(t,x,y)の位置関係に応じた見方

が必要である。 当分$0<y\leqq x$のときに限り，次のように場合わけをしよう：

$$\begin{cases} \text{(イ)}\ \ 0<r\leqq\delta \text{ のとき，} \quad \text{(ロ)}\ \ \delta\leqq r\leqq 1-\delta \text{ のとき，} \\ \text{(ハ)}\ \ Ms^{1-m}\leqq 1-r\leqq\delta \text{ のとき，} \quad \text{(ニ)}\ \ 0\leqq 1-r\leqq Ms^{1-m} \text{ のとき；} \\ \text{但し，} r=(y/x)^{\frac{m-1}{m}}\text{，}\delta\text{ は十分小，}M\text{ は十分大とする。} \end{cases}$$

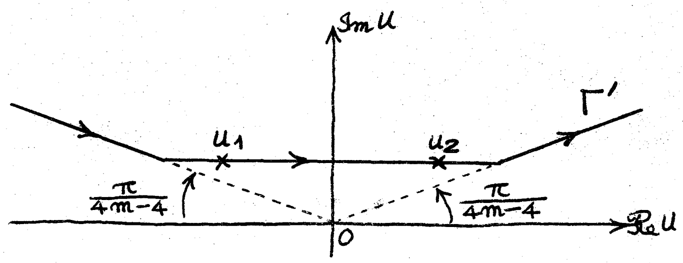
このうち(ニ)の場合は上の補題3.2で一応満足すべきものとみなし，(ロ)の場合をまず考えよう。 (3.6)の積分路$\xi\in\mathbb{R}$を$\mathcal{D}_\varepsilon(t)$内の路$\Gamma=\Gamma_{(t,x,y)}$に変えるのであるが，$\Gamma$の$u$-平面での像$\Gamma'$をどう選ぶかを示そう。 $\xi\in\mathcal{D}_\varepsilon(t)$のとき

$$\begin{cases} f(\xi,t,x,y)=s\,g(u;x,y)+O(x)\text{，但し，} \\ g(u;x,y)=xu\phi(-u)-yu\phi(u)\text{，}\quad \phi(u)=(1+iu^{m-1})^{-\frac{1}{m-1}} \end{cases} \tag{3.12}$$

となる（$O(x)$は(s,u)に関して一様）。 上半面$\mathrm{Im}\,u>0$にあって実軸に最も近い$\frac{\partial g}{\partial u}=0$の根はふたつあってそれらは

$$u_1=\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\frac{1}{m-1}}\exp\left(\frac{2m-3}{2m-2}\pi i\right),\quad u_2=\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{\frac{1}{m-1}}\exp\left(\frac{\pi i}{2m-2}\right) \tag{3.13}$$

である。 そこで，Γ'として右図のような折線をとる。 するとΓ'上の$\mathrm{Re}\{ig(u;x,y)\}$の最大値は$u=u_1$，u_2で実現されてその値は次のようになる：



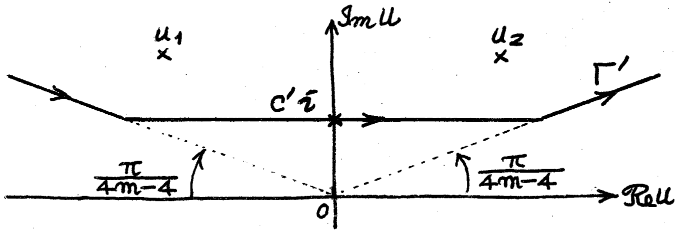
$$\mathrm{Re}\{ig(u_l;x,y)\}=-2^{\frac{1}{1-m}}x(1-r)^{\frac{m}{m-1}}\sin\frac{\pi}{2m-2}\ ,\ l=1,2. \tag{3.14}$$

そしてΓ'上では(3.10)がなりたっているから，結局(ロ)の場合

$$|D_x^p D_y^q k_1| \leqq Cte.\, s^{p+q+1} e^{-csx(1-r)^{\frac{m}{m-1}}}, \tag{3,15}$$

がなりたつ。 次に，(ハ)の場合を考えよう。 このとき，(3,13)のu_1，u_2は実軸に近づくがsu_1，su_2の虚部は$O(M^{\frac{1}{m-1}})$以上であるので，このときも(3,15)は（cを選び直せば）やはりなりたつ。

(イ)の場合，u_1とu_2は今度は$e^{\frac{2m-3}{2m-2}\pi i}$，$e^{\frac{\pi i}{2m-2}}$に近いがこれらは$g$の特異点である。 これをさけるために，$\Gamma'$を右図のような一定の（$r$によらない）折線にとる。 すると(3,15)は（$c$を選び直せば）やはりなりたつ。



以上の補題3.2と(3,15)をまとめ，$y>x$の場合も同様に場合わけをして考えると，

補題3.3: $x>0$，$y>0$かつ$0<t\leqq t_0$とすると，(t,x,y)に無関係な正定数cが存在して次の不等式がなりたつ:

$$|D_x^p D_y^q k(t;x,y)| \leqq Cte.\, s^{p+q+1} \exp\{-cs|x^{\frac{m-1}{m}} - y^{\frac{m-1}{m}}|^{\frac{m}{m-1}} - ct(x+y)\},$$

但し，$p, q = 0, 1, 2, \cdots$. (3,16)

証明すべき定理は，補題3.1と3.3を併せたものである。

§4　補助函数 $\zeta(t,\xi)$ と $A(t,\xi)$ の性質．

(2,7) と (2,8) を解くと次のようになる：

$$t=i\int_{\xi}^{\zeta(t,\xi)}\frac{d\eta}{P^0(\eta)},\quad A(t,\xi)=\exp\left(-i\int_{\xi}^{\zeta(t,\xi)}\frac{P^1(\eta)}{P^0(\eta)}d\eta\right). \qquad (4,1)$$

つまり，ζ は (t,ξ) の陰函数として初期条件 $\zeta(0,\xi)=\xi$ のもとで定まり，ζ が定まると A が定まる．(4,1) の積分は $\zeta(s,\xi)$ $(0\leqq s\leqq t)$ の軌道に沿うてとる．(4,1) は $t<0$ または $\xi\notin\mathbb{R}$ であっても意味がある限り正しい．言いかえると ζ と A は常微分方程式

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-iP^0(\zeta),\ \zeta(0,\xi)=\xi;\ \frac{\partial A}{\partial t}=-P^1(\zeta)A,\ A(0,\xi)=1, \qquad (4,2)$$

の解として定まったのであり，更に，ξ については次の方程式をみたしている：

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}=P^0(\zeta)/P^0(\xi),\ \frac{\partial A}{\partial\xi}=i\{P^1(\xi)-P^1(\zeta)\}A/P^0(\xi). \qquad (4,3)$$

(4,1) は $\xi=\tau_j$ (P^0 の零点，$1\leqq j\leqq m$) のとき意味をもたないが，

$$\zeta(t,\tau_j)=\tau_j,\quad A(t,\tau_j)=e^{-tP^1(\tau_j)},\ 1\leqq j\leqq m, \qquad (4,4)$$

とするのが (4,2) から考えて妥当である．そして，次の各式も各項に意味がある限り正しい：

$$\begin{cases}\zeta(t,\zeta(s,\xi))=\zeta(t+s,\xi),\\ A(t,\xi)A(s,\zeta(t,\xi))=A(t+s,\xi),\\ t\in\mathbb{R},\ \xi\in\mathbb{R}\text{ のとき，}\zeta(-t,\xi)=\overline{\zeta(t,\xi)}\ (\text{仮定 (4) による}).\end{cases} \qquad (4,5)$$

$\mathrm{Im}\,\xi\leqq 0$ なる ξ から出る $\zeta(t,\xi)$ が $t>0$ では $\mathrm{Im}\,\zeta(t,\xi)<0$ の範囲にあることも (4,2) の第一式から明らかであろう．

さて，Kの評価のためには，ζのglobalな（tは小さな範囲でもよいからξについてglobalな）評価が必要であった。

まず $t=0$ におけるζのTaylor展開を

$$\zeta(t,\xi)=\xi+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-it)^j}{j!}\Phi_j(\xi) \tag{4,6}$$

としてその収束域を調べよう。

補題4.1： $|t|$が小さいとき（$t\in\mathbb{R}$），(4,6)は $|\xi|\leqq C_1|t|^{-\frac{1}{m-1}}$ で収束している。ここでC_1はP^0だけに依存する定数である。

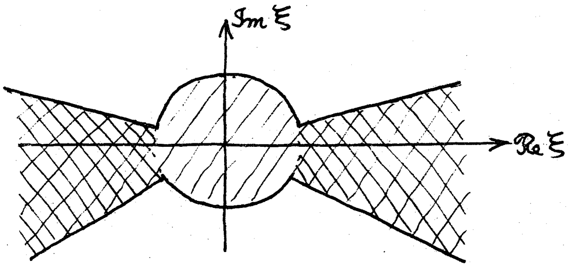
証明： (4,2)の第一式をtについて逐次微分してみるとよい。(4,6)のΦ_jは $z=(z_1,z_2,\cdots,z_\ell,\cdots)$（但し $z_\ell=\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{\ell-1}P^0(\xi)$）の多項式であるから，$\Phi_j=\varphi_j(z)=\sum_\nu a_{j,\nu}z^\nu$ （$\nu=(\nu_1,\nu_2,\cdots,\nu_\ell,\cdots)$）とおくと，$\varphi_j$は次の漸化式によって定まる：

$$\varphi_1=z_1,\quad \varphi_{j+1}=z_1\sum_{\ell=1}^{j} z_{\ell+1}\frac{\partial\varphi_j}{\partial z_\ell}\quad (j\geqq 1).$$

故に，$\varphi_j=\sum_\nu a_{j,\nu}z^\nu$ のνについての和は $\sum_{\ell=1}^{j}\nu_\ell=j$，かつ，$\sum_{\ell=1}^{j}\ell\nu_\ell=2j-1$ の範囲にわたり，$a_{j,\nu}$は非負の整数であって，$\sum_\nu a_{j,\nu}=(j-1)!$ がなりたっている。従って，φ_jはすべてz_1でわりきれ，$|\Phi_j(\xi)|\leqq(j-1)!\,|P^0(\xi)|\,\{C(|\xi|+1)\}^{(m-1)(j-1)}$ （$j\geqq 1$）となる（Cは(j,ξ)によらない）。//

次に，$|t|$が小さく$|\xi|$が大きいときのζの挙動を調べよう。
複素ξ-平面の実軸を含む次のような領域を考える：

$$
\begin{cases}
\Omega_\varepsilon(\tau)=\{\xi\in\mathbb{C};\ \frac{\varepsilon-3}{2m-2}\pi\leqq\arg\xi\leqq\frac{1-\varepsilon}{2m-2}\pi,\ \text{又は},\\
\qquad\qquad \frac{2m-3+\varepsilon}{2m-2}\pi\leqq\arg\xi\leqq\frac{2m+1-\varepsilon}{2m-2}\pi\ \text{又は}\ |\xi|^{m-1}\leqq\frac{1-\varepsilon}{(m-1)\tau}\}, \qquad (4.7)\\
\Omega'_\varepsilon(\tau)=\Omega_\varepsilon(\tau)\cap\{\xi\in\mathbb{C};\ |\xi|^{m-1}\geqq\frac{1-\varepsilon}{(m-1)\tau}\},\ \text{但し}\ 0<\varepsilon<1,\ \tau>0.
\end{cases}
$$



補題4.2: 十分小さな$t_0>0$ および十分大きな$R>0$ をとると, $0<|t|\leqq t_0$, $\xi\in\Omega_\varepsilon(|t|)$ かつ $|\xi|\geqq R$なる限り,

$$\frac{\zeta(t,\xi)+\alpha}{\xi+\alpha}=\{1+i(m-1)t(\xi+\alpha)^{m-1}\}^{-\frac{1}{m-1}}\left[1+O(|\xi|^{-2}+|t|^{\frac{2}{m-1}})\right]. \qquad (4.8)$$

但し, $\alpha=\frac{1}{m}p^0_{m-1}$, 特に, $0<t\leqq t_0$ のとき,

$$\{\zeta(t,\infty e^{i\theta})+\alpha\}\{(m-1)t\}^{\frac{1}{m-1}}=\begin{cases}e^{\frac{-\pi i}{2m-2}}\left[1+O(t^{\frac{2}{m-1}})\right],\ \frac{\varepsilon-3}{2m-2}\leqq\theta\leqq0\ \text{のとき};\\ e^{\frac{2m-1}{2m-2}\pi i}\left[1+O(t^{\frac{2}{m-1}})\right],\ \pi\leqq\theta\leqq\frac{2m+1-\varepsilon}{2m-2}\ \text{のとき}.\end{cases} \qquad (4.9)$$

証明: 十分大きな$R_0>0$をとると, $\xi\in\mathbb{C}$, $|\xi|\geqq R_0$のとき

$$\int_\xi^\infty\frac{d\eta}{P^0(\eta)}=\frac{w^{m-1}}{m-1},\ \text{かつ},\ \xi\to\infty\ \text{のとき}\ w\xi\to1 \qquad (4.10)$$

となる局所変数 $w=w(\xi)$ ($1/\xi$ の整級数) が定まり, 上記のαをとると, $(\xi+\alpha)w=1+O(\xi^{-2})$ である. このR_0に対して, $R>0$を更に大きく, $t_0>0$を小さくとると,

$$\xi\in\mathbb{C},\ t\in\mathbb{R},\ |\xi|\geqq R\ \text{かつ}\ |t|\leqq t_0\ \text{なる限り}\ |\zeta(t,\xi)|\geqq R_0 \qquad (4.11)$$

となる. このような(ξ,t)に対して, $w(\zeta(t,\xi))=W(t,w)$

とおくと，(4.1)は W，w および t の間の関係

$$W(t,w)^{m-1} = w^{m-1} + i(m-1)t \ , \quad W(0,w) = w \ , \tag{4.12}$$

と同値である． W と w を ζ と ξ について解けば証明すべき式(4.8)が得られる．//

補題4.3：　ある T_0 $(0<T_0 \leqq +\infty)$ が存在して，$0<\tau \leqq T_0$ かつ $\xi \in \Omega_\varepsilon(\tau)$ なる限り，$\zeta(t,\xi)$ は $-\tau \leqq t \leqq \tau$ までは接続できる．

これは補題4.2からの系である．

所で，一般に $\mathrm{Im}\,\xi \leqq 0$ なる ξ から出る $\zeta(t,\xi)$ が t についてどこまで接続できるかを考えると，次のことがわかる：

補題4.4：　$\zeta(t,\xi)$ が $t=+\infty$ まで接続できないような点 ξ で $\mathrm{Im}\,\xi \leqq 0$ であるものの全体を $\mathcal{L}$ とする． $\mathcal{L}$ は丁度 $(b-1)$ 個の互いに交わらない曲線 $\mathcal{L}_1, \cdots, \mathcal{L}_{b-1}$ の和集合である（ $b=1$，つまり $m=2$ なら $\mathcal{L}=\phi$）． 各 $\mathcal{L}_q$ に，$\zeta(t,\xi)$ の t の増大する方向に正の向きを与え，$\mathcal{L}_q$ の始点を X_q，終点を Y_q $(1 \leqq q \leqq b-1)$ とすると，$Y_q = \infty\, \exp\left(\frac{1-4q}{2m-2}\pi i\right)$ であり，X_q は $\mathbb{R}$ 上の点又は P^0 の零点又は $\infty\, \exp\left(\frac{3-4j}{2m-2}\pi i\right)$ $(1 \leqq j \leqq b)$ のいずれかである． 従って，$\overline{\mathbb{R}} \cap \mathcal{L}$ は $\pm\infty$ も含めて高々 $(b-1)$ 個の点からなる． そして，$\overline{\mathbb{R}} \setminus \mathcal{L}$ の各連結成分に属する ξ に対しては，$\zeta(+\infty,\xi)$ が存在してそれは成分ごとに同一の P^0 の零点である（証明略）．

一般に $\operatorname{Im}\xi<0$ のときは，$\xi\in\mathbb{C}$ であっても $\zeta(+\infty,\xi)$ が存在するとは限らない。 実際，τ_j が $P^0(\xi)=0$ の単根であって $\frac{dP^0}{d\xi}(\tau_j)\in\mathbb{R}$ であるときを考えると，$\xi=\tau_j$ のある近傍 $\mathcal{O}_j$ が定まり，$\xi\in\mathcal{O}_j$ (但し $\xi\neq\tau_j$) に対する $\zeta(t,\tau_j)$ は τ_j のまわりを周期的にまわる (しかし，この $\overline{\mathcal{O}_j}$ は $\overline{\mathbb{R}}$ とは共有点をもたない)。

最後に，$A(t,\xi)$ ((4.1)式をみよ) のもうひとつの表示を与えておこう：

$$A(t,\xi)=\left\{\frac{P^0(\xi)}{P^0(\zeta(t,\xi))}\right\}^{\rho/m}B(t,\xi),\quad \rho=ip^{1}_{m-1}, \tag{4.13}$$

とかくと，ある定数 $M\geqq 1$ が存在して

$$0\leqq\tau\leqq T_0,\ |t|\leqq\tau,\ \xi\in\Omega_\varepsilon(\tau) \text{ なる限り } \frac{1}{M}\leqq|B(t,\xi)|\leqq M. \tag{4.14}$$

((4.13)における巾 $\{\ \}^{\rho/m}$ は $t=0$ のとき 1 となる分枝をとる)。

この表示ならたとえば次のことがわかる：

$$\begin{cases} 0<|t|\leqq t_0,\ 0<|s|\leqq t_0 \text{ とすると,} \\ \dfrac{A(t,+\infty)}{A(s,+\infty)}=\left(\dfrac{|t|}{|s|}\right)^{\frac{\rho}{m-1}}\exp\left[\dfrac{\pi i\rho}{2m-2}(\operatorname{sign}t-\operatorname{sign}s)\right]\cdot\left(1+O\left(|t|^{\frac{2}{m-1}}+|s|^{\frac{2}{m-1}}\right)\right), \\ \dfrac{A(t,-\infty)}{A(s,-\infty)}=\left(\dfrac{|t|}{|s|}\right)^{\frac{\rho}{m-1}}\exp\left[\dfrac{2m-1}{2m-2}\pi i\rho(\operatorname{sign}s-\operatorname{sign}t)\right]\cdot\left(1+O\left(|t|^{\frac{2}{m-1}}+|s|^{\frac{2}{m-1}}\right)\right). \end{cases} \tag{4.15}$$

($A(t,\pm\infty)$, $A(s,\pm\infty)$ のそれぞれは意味をもたなくても，$\frac{A(t,\xi)}{A(s,\xi)}$ は $\xi\to\pm\infty$ のとき意味をもつ)。

§5 補足

(1) P^0 に対して(4) ($\xi\in R$ のとき $P^0(\xi)>0$ であること) を仮定する代りに, $\xi\in R$ のとき $P^0(\xi)\neq 0$ かつ $|\arg P^0(\xi)|\leq \frac{\varepsilon\pi}{2}$ $(0<\varepsilon<1)$, としても結果はほとんど変らない.

(2) L が形式的に自己共役であれば (x,y) に関して対称な基本解が得られるであろう. 又そうでなくても (t,x,y) の位置関係によってはよりよい評価があり得よう.

(3) L が R^n の半空間 (たとえば $x_1>0$) で定義された作用素で, $Lu(x)=P^0(D_x)(xu(x))+P^1(D_x)u(x)$ (P^0 は m 階楕円型, P^1 は $(m-1)$ 階以下) の場合, 同様の結果を導くには, 補助函数 $\zeta(t,\xi)$ の t についても global な情報 (補題4.4 のような) が必要であろう. 従ってこのような多変数化には未だ問題がある. $m=2$ の場合は [2],[3] で部分的に扱ってある.

(4) 定理の不等式 (5) の右辺第二項に複雑な項があらわれたのは, 境界条件による補正をしていない (つまり $K(t;x,y)$ が Green 函数でない) こともその一因であろう.

(5) 境界条件の設定について. $\mathrm{Re}\,\rho<1-m$ のときと $\mathrm{Re}\,\rho\geq 1-m$ のときとでは設定が異なる (得られる境界値問題の解に対するなめらかさの要請によっては, $\mathrm{Re}\,\rho=\frac{1}{2}-m$ の前後で場合をわけてもよい). 前者の場合, $x=0$ で, b 個, 後者の場合 $(b-1)$ 個 ($b=m/2$) の境界条件を選ばなくてはならない.

楕円型作用素に対する境界条件の設定は[4]（部分的には[1]）でなされている。

（6） 退化した放物型作用素の基本解を，擬微分作用素を用いて，構成する研究は堤氏によってなされている（[5]）。

文献

[1] N.Shimakura : Problèmes aux limites généraux du type elliptique dégénéré. J.Math.Kyoto Univ.,9-2(1969) 275-335.

[2] 〃 : Les fonctions de Green pour certains opérateurs paraboliques dégénérés dans le demi-espace. Proc.Japan Acad.47(1971)699-704.

[3] 〃 : Sur les ζ-fonctions d'Epstein pour des opérateurs elliptiques dégénérés. Tohoku Math.J.26(1974) 95-131.

[4] M.I.Vishik & V.V.Grushin : Boundary problems for elliptic equations degenerating at the boundary of the domain. Math.Sbornik 80(122)(1969)455-491.

[5] C.Tsutsumi : The fundamental solution for a degenerate parabolic pseudo-differential operator. Proc.Japan Acad. 50(1974)11-15.