数理解析研究所講究録
第 241 巻 1975 年 29-46

非定常問題のF. E. M.近似とTrotter-Katoの定理

電気通信大学　　牛島 照夫

適合性のもとでは、有界性と収束性が同値であることを主張するLaxの同値定理は，線形発展方程式の（差分）近似理論における指導原理と考えられる。Trotter-Katoの半群の近似理論を適切に再構成することによって，F. E. M.近似に対してもこの原理が成立することを，二階の放物型および双曲型の方程式を作用素論的に書き直した発展方程式を例として述べたい．摂動系と、いわゆるlumpingの問題のとりあつかいについても触れたい。

ここで得られる結果は，具体的問題に対しては、既によく知られたことであるが、このような取りあつかい方によると、F. E. M.近似の際の適合性の概念の説明に役立つと思われる。この事情の解明を示唆されたのは藤井宏博士であり、彼の助言に深く感謝申し上げる。

1．線形半群の近似理論

バナッハ空間Xにおける有界線形作用素の全体からなる空間L(X)に値をとるクラスC_0の半群$T(t)$ $(t\geqq 0)$をここでは連続半群とよぶ。（連続半群とその生成作用素に関しては、たとえば［1］を見よ。）

L(X)値関数$T(t)$ $(t\geqq 0)$が時間単位τ (>0)の離散半群であるとは、ある$T(\tau)\in L(X)$が存在して

$$T(t) = T(\tau)^{[t/\tau]}$$

となることをいう．離散半群$T(t)$の生成作用素$A\in L(X)$を

$$A = \tau^{-1}(T(\tau) - 1)$$

によって定義する．

バナッハ空間の列X_n $(n=1,2,\cdots)$が、バナッハ空間Xに K－収束する（$X_n \xrightarrow{K} X$）とは，次の二条件をみたす近似作用素$P_n\in L(X, X_n)$が存在することである．

（K．1）　$\lim_{n\to\infty}\|P_n x\| = \|x\|$　for any $x\in X$.

（K．2）　あるnによらないNがあって

$$\forall x_n \in X_n \ ; \ \exists x^{(n)} \in X \quad \text{s.t. } x_n = P_n x^{(n)} \ \& \ \|x^{(n)}\| \leqq N\|x_n\|.$$

以下$X_n \xrightarrow{K} X$なるバナッハ空間の列$\{X_n\}$を固定する．

列$\{x_n\in X\}$が$x\in X$にK－収束する（$x_n \xrightarrow{K} x$）とは、$\|x_n - P_n x\| \longrightarrow 0$ $(n\longrightarrow\infty)$となることをいい、列$\{x_{\lambda,n}\in X_n\}_{\lambda\in\Lambda}$が$x_\lambda\in X$に$\lambda\in\Lambda$に関して一様にK－収束

するとは，$\| x_{\lambda n} - P_n x_\lambda \| \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty)$ が $\lambda \in \Lambda$ に関して一様なことをいう。列 $\{A_n \in L(X_n)\}$ が $A \in L(X)$ に K－収束する ($A_n \xrightarrow{K} A$) とは，任意の $x \in X$ に対して，$A_n P_n x \xrightarrow{K} Ax$ となることをいう。列 $\{A_{\lambda n} \in L(X_n)\}_{\lambda \in \Lambda}$ が $A_\lambda \in L(X)$ に一様に K－収束するとは，任意の $x \in X$ に関して $\{A_{\lambda n} P_n x\}$ が $A_\lambda x$ に $\lambda \in \Lambda$ に関して一様に K－収束することをいう。

さて，X における閉作用素 A から生成される連続半群 $T(t)$ を固定する。連続半群の列（又は，離散半群の列）$\{T_n(t) \in L(X_n)\}$ が与えられており，その生成作用素を A_n とする。離散半群の列を考えるときは，$T_n(t)$ の時間単位を τ_n とすると，

(4) $$\lim_{n \to \infty} \tau_n = 0$$

がなりたっているとする。次の三条件を考えよう。

(A)（適合性） ある $\lambda \in \mathbb{C}$ に対して，$(\lambda - A_n)^{-1} \in L(X_n)$ $(n = 1, 2, \cdots)$ と $(\lambda - A)^{-1} \in L(X)$ が存在して，

$$(\lambda - A_n)^{-1} \xrightarrow{K} (\lambda - A)^{-1}.$$

(B)（有界性） $\sup_{n,\, 0 \le t \le 1} \| T_n(t) \| < \infty$.

(C)（収束性） 任意の $T < \infty$ に対して $t \in [0, T]$ につき

$$T_n(t) \xrightarrow[\text{一様に}]{K} T(t).$$

定理 1.　(A−B−C 定理, [2])　条件 (A) と (B) が同時になりたつことと，条件 (C) がなりたつことは同値である。

2. 抽象放物型方程式の近似解の収束性

ヒルベルト空間 X で稠密に定義され，ヒルベルト空間 Y の中への閉線形作用素 T で，ある $\delta > 0$ に対して

(5)　$\|Tu\|_Y \geqq \delta \|u\|_X \qquad for \ \forall u \in D(T)$

となるものを固定して考える。便宜上，X を X^0 とも書き，$D(T)$ に，$(u, v)_1 = (Tu, Tv)_Y$ で内積をいれてできるヒルベルト空間を X^1 と書く。$A = T^*T$ は X における正定値 $(\geqq \delta^2)$ 自己共役作用素である。したがって，その平方根 $A^{1/2} \geqq \delta$ が存在して

$$D(A^{1/2}) = D(T), \qquad \|A^{1/2}u\|_X = \|Tu\|_Y$$

をみたす。作用素 B は，$D(B) \supset D(T)$ をみたす X における閉作用素とする。このことは，ある定数 β が存在して，

(6)　$\|Bu\| \leqq \beta \|A^{1/2}u\| \qquad for \ \forall u \in D(T)$

を意味する。

次の発展方程式を考えよう。

$$(E) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}u + Au + Bu = 0, & t > 0 \\ u(0) = u_0 \in X. \end{cases}$$

定義域を，D(T) とする二次形式

(7) $\quad c(u, v) = -(Tu, Tv) - (Bu, v)$

は，閉じた角形式（[1] 参照）であるから，$C = -A - B$，$D(C) = D(A)$ によって定まる作用素 C は，解析的半群 $T(t)$ を生成する。さらに，ある実数 ω に対して

(8) $\quad \| T(t) \| \leqq e^{t\omega} \qquad \text{for } {}^\forall t \geqq 0$

と評価されることもわかる。(E) の（広義の）解 $u(t)$ は，$u(t) = T_t u_0$ と書ける。

仮定 任意の $h > 0$ に対して $D(T)$ に含まれる X の閉部分空間 X_h があって

$$\lim_{h \to 0} \| P_h^i u - u \|_{X^i} = 0 \qquad \text{for } {}^\forall u \in X^i$$

となる。ここで P_h^i は，X^i から X_h への直交射影である $(i = 0, 1)$。

空間 X_h に X から導びかれたヒルベルト構造を入れて考えると，近似作用素を，$P_h = P_h^0$ として

(9) $\quad X_h \xrightarrow{K} X$

である。作用素 T の X_h の上への制限を T_h と書くと，$T_h \in L(X_h, Y)$ であり，その共役作用素を T_h^* とし，$A_h = T_h^* T_h$ とおく。すなわち，

(10) $\quad (A_h u, v)_X = (Tu, Tv)_Y \qquad \text{for } {}^\forall u, v \in X_h$

によって，X_h での有界自己共役作用素 A_h が定められる。

(11) $\quad \alpha_h = \| A_h \| < \infty$

とおこう。A_h のスペクトルは、区間 $[\delta^2, \alpha_h]$ の外には存在しない。作用素 B の近似作用素を、$B_h = P_h B$ とする。すなわち、

(12) $\quad (B_h u, v)_X = (Bu, v)_X \quad$ for $\forall u, v \in X_h$

によって、X_h 上の有界作用素 B_h を定める。(6) より

(13) $\quad \| B_h u \| \leqq \beta \| A_h^{1/2} u \| \quad$ for $\forall u \in X_h$

である。

まず、次の方程式で記述される半離散近似を考察しよう。

$$
(E_h)\begin{cases} \dfrac{d}{dt}u_h + A_h u_h + B_h u_h = 0, & t>0 \\ u_h(0) = u_{h0} \in X_h \end{cases}
$$

空間 X_h において、$C_h = -A_h - B_h$ の生成する半群 $T_h(t)\ (= e^{tC_h})$ が、

(14) $\quad \| T_h(t) \| \leqq e^{t\omega} \quad$ for $\forall t \geqq 0$

をみたすと仮定してよいのは、(8) が成立するのと同じ理由である。評価 (13) によって、ω は h に依存しないでとれるから、列 $\{T_h(t)\}$ は、条件 (B) をみたしている。次に列 $\{C_h\}$ と C が、条件 (A) をみたしていることを調べる。

始めに、$B=0$ の場合を考えよう。

<u>補題 1.</u> 仮定のもとで $\forall f \in X$ に対して

$$A_h u_h = P_h f, \qquad Au = f$$

をみたす $u_h \in X_h$ と $u \in X$ は、一意的に存在して

$$\| u_h - u \| \longrightarrow 0 \qquad (h \longrightarrow 0),$$

$$\| T(u_h - u) \| \longrightarrow 0 \qquad (h \longrightarrow 0).$$

証明　u_h, u の一意存在は (5) が保証する。

(15)　$$A_h u_h = P_h^0 f \iff u_h = P_h' u$$

なる関係に注目すると、仮定より

$$\| u_h - u \| \leqslant \delta^{-1} \| T(u_h - u) \| = \| u_h - u \|_1 \longrightarrow 0.$$

補題1から、$A_h^{-1} \xrightarrow{K} A^{-1}$ が直ちに得られ、A－B－C定理により

$$e^{-tA_h} \xrightarrow{K} e^{-tA}$$

が、$t \in [0, T]$ で一様になりたつ。$\| e^{-tA_h} \| \leqslant 1$ であるから、逆に

(16)　$$(\lambda + A_h)^{-1} \xrightarrow{K} (\lambda + A)^{-1} \quad \text{for } \forall \lambda \geqslant 0$$

が成立つことはすぐにわかる。

次に、$B \neq 0$ の場合に進む。まず、

(17)　$$B_h (\lambda + A_h)^{-1} \xrightarrow{K} B(\lambda + A)^{-1} \quad \text{for } \forall \lambda \geqslant 0$$

である。実際

$$\begin{aligned}
&\| B_h (\lambda + A_h)^{-1} P_h f - P_h B(\lambda + A)^{-1} f \| \\
=\ &\| P_h B \{(\lambda + A_h)^{-1} P_h f - (\lambda + A)^{-1} f\} \| \\
\leqslant\ &\beta \| T \{(\lambda + A_h)^{-1} P_h f - (\lambda + A)^{-1} f\} \|
\end{aligned}$$

$$= \beta \| T \{ A_n^{-1} (1 - \lambda(\lambda + A_n)^{-1}) P_n f$$
$$- A^{-1}(1 - \lambda(\lambda + A)^{-1}) f \} \|$$
$$\leqq \beta \| T \{ A_n^{-1} P_n f - A^{-1} f \} \|$$
$$+ \lambda\beta \| T \{ A_n^{-1} [(\lambda + A_n)^{-1} P_n f - P_n (\lambda + A)^{-1} f] \} \|$$
$$+ \lambda\beta \| T \{ A_n^{-1} P_n (\lambda + A)^{-1} f - A^{-1}(\lambda + A)^{-1} f \} \|$$

である。第一項において　$u = A^{-1} f$ とすると、$A_n^{-1} P_n f = u_n = P_n' u$。したがって、補題1によって，第一項 $\longrightarrow 0$。

同様に、$u = A^{-1}(\lambda + A)^{-1} f$　とおくと，第三項 $\longrightarrow 0$　がわかる。

(16)より

$$\text{第二項} = \lambda\beta \| A_n^{1/2} A_n^{-1} [(\lambda + A_n)^{-1} P_n f - P_n (\lambda + A)^{-1} f] \|$$
$$\leqq \frac{\lambda\beta}{\delta} \| (\lambda + A_n)^{-1} P_n f - P_n (\lambda + A)^{-1} f \|$$
$$\longrightarrow 0.$$

これらから、(17)がなりたつことがわかった。次に、nによらず一様に、$\lambda \longrightarrow +\infty$ のとき

(18)　　$\| B_n (\lambda + A_n)^{-1} \| \longrightarrow 0$

であることに注意する。実際

$$\| B_n (\lambda + A_n)^{-1} \| \leqq \beta \| A_n^{1/2} (\lambda + A_n)^{-1} \|$$
$$\leqq \beta \sup_{\mu \geqq \delta} \frac{\mu^{1/2}}{\lambda + \mu} \leqq \frac{\beta}{2\lambda^{1/2}} \longrightarrow 0.$$

レゾルヴェントの展開式：

$$(\lambda - C_n)^{-1} = (\lambda + A_n + B_n)^{-1}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} (-1)^n (\lambda + A_h)\{B_h(\lambda + A_h)^{-1}\}^n + \sum_{n \geq N+1} {}''$$

と(17), (18) に注意すれば、十分大きな全てのλに対して

$$(19) \qquad (\lambda - C_h)^{-1} \xrightarrow{K} (\lambda - C)^{-1}$$

であることがわかる。

次に、離散近似を考察する。陰公式

$$u_h(t + \tau_h) = (1 - \tau_h A_h - \tau_h B_h)^{-1} u_h(t)$$

は、$\lim_{h \to 0} \tau_h = 0$ なる限り、常に収束することは、半群の近似の一般論からしたがう([2]参照)。陽公式

$$(E_h^{\tau_h}) \begin{cases} u_h(t + \tau_h) = (1 - \tau_h A_h - \tau_h B_h) u_h(t), \\ \qquad : k\tau_h \leq t < (k+1)\tau_h, \quad k = 0, 1, 2, \cdots \\ u_h(t) = u_{0h} \in X_h, \\ \qquad : 0 \leq t < \tau_h \end{cases}$$

の収束性に関しては次の結果を述べることができる。

定理2. $\lim_{h \to 0} \tau_h = 0$ かつ

$$(20) \qquad \sup_h \tau_h \alpha_h = \gamma < 2$$

とし, $u_{0h} \longrightarrow u_0$ (in X) とする。このとき差分方程式 $(E_h^{\tau_h})$ の解 $u_h(t)$ は, 方程式 (E) の広義解 $u(t)$ に, $t \in [0, T]$ で一様に収束する。なお $B=0$ の場合は, $\gamma = 2$ でもよい.

証明. 時間単位をτ_hとする. C_h から生成される離散半群 $T_h(t)$ に関して、条件(A), (B) を確かめればよい。

条件（A）は、すでに（19）で調べたから，条件（20）の下で、（$E_{\tau h}^{\tau h}$）の解の有界性がしめせればよい。以下しばらく添字hを省略して計算する。

$$\begin{aligned}\|u(t+\tau)\|^2 &= \|(1-\tau A)u(t)\|^2 + \tau^2\|Bu(t)\|^2 \\ &\quad -2\tau\,\mathrm{Re}(Bu(t), u(t)) + 2\tau^2\mathrm{Re}(Bu(t), Au(t)) \\ &\leqq \|(1-\tau A)u(t)\|^2 + \tau^2\beta^2\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 \\ &\quad +2\tau\beta\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|\,\|u(t)\| \\ &\quad +2\tau\beta\gamma\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|\,\|u(t)\| \\ &\leqq \|(1-\tau A)u(t)\|^2 + \tau\beta^2\gamma\|u(t)\|^2 \\ &\quad +\tau\beta(1+\gamma)(\varepsilon\|A^{\frac{1}{2}}u(t)\|^2 + \varepsilon^{-1}\|u(t)\|^2) \\ &= \int_\delta^\alpha\{(1-\tau\lambda)^2 + \varepsilon\cdot\beta(1+\gamma)\cdot\tau\lambda\}\,d(E(\lambda)u(t), u(t)) \\ &\quad +\tau\left(\beta^2\gamma + \frac{\beta(1+\gamma)}{\varepsilon}\right)\|u(t)\|^2\end{aligned}$$

ここで、Aのスペクトル分解　$A=\int_\delta^\alpha \lambda\, dE(\lambda)$　を用いた。

さて，$\eta \geqq 0$ とし，$f_\eta(x) = (1-x)^2 + \eta x$ が、$0\leqq x\leqq \gamma$ で　$0\leqq f_\eta \leqq 1$　をみたすための十分条件を考えることにより、次の主張を得る。

“$\beta \neq 0$ のとき、εを十分小さくとれば，

$$0 < \tau\lambda \leqq \gamma \qquad (0<\gamma<2)$$

なる　$\tau\lambda$　に対して

$$(1-\tau\lambda)^2 + \varepsilon\beta(1+\gamma)\tau\lambda \leqq 1$$

となるようにできる。”

そのような、εを固定すると、(20)より、$\tau\alpha \leqq \gamma$ であるから、適当な 実数 $\omega = \omega_\varepsilon$ に対して

$$\| u(t+\tau) \|^2 \leqq (1+2\tau\omega) \| u(t) \|^2$$

となる。これから

$$\| u(t) \|^2 \leqq (1+2\tau\omega)^{[t/\tau]} \| u(0) \|^2$$

結局 hによらずに、

$$\| u_h(t) \| \leqq e^{t\omega} \| u_h(0) \| \qquad \text{for } {}^\forall t \geqq 0$$

が成立つことになる。

$\beta = 0$ のときは、$0 \leqq \tau\lambda \leqq 2$ であれば、$(1-\tau\lambda)^2 \leqq 1$ であるから、

$$\| u_h(t) \| \leqq \| u_h(0) \| \qquad \text{for } {}^\forall t \geqq 0$$

が成立っている。

3. 波動方程式型発展方程式の場合

空間X^0, X^1 と、作用素Aは、2. で考えたものとする。さらに、2. における仮定もなりたっているとしよう。次の二階の発展方程式を考える。

$$(E) \quad \begin{cases} \dfrac{d^2}{dt^2} u + A u = 0, & t > 0 \\ u(0) = u^1, \quad \left(\dfrac{d}{dt} u\right)(0) = u^0, & u^i \in X^i \end{cases}$$

近似方程式は、

$$(E_h)\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}u_h + A_h u_h = 0, & t>0 \\ u_h(0) = u_h^1, \quad (\frac{d}{dt}u_h)(0) = u_h^0, & u_h^i \in X_h \end{cases}$$

である。さて

$$\mathfrak{X} = \begin{matrix} X^1 \\ \times \\ X^0 \end{matrix}, \quad \mathfrak{X}_h = \begin{matrix} X_h^1 \\ \times \\ X_h^0 \end{matrix}, \quad \mathcal{P}_h = \begin{pmatrix} P_h^1 & 0 \\ 0 & P_h^0 \end{pmatrix}$$

とおく。ただし、X_h に X^i から導びかれるヒルベルト構造をいれたヒルベルト空間を、X_h^i $(i=0,1)$ と書いた。仮定より近似作用素を $\mathcal{P}_h$ として、

$$\mathfrak{X}_h \xrightarrow{K} \mathfrak{X}$$

となる。(E)，(E_h)は、それぞれ、$\mathfrak{X}$，$\mathfrak{X}_h$ における一階方程式：

$$(\mathcal{E}) \qquad \frac{d}{dt}\mathfrak{u} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{u}, \quad \mathfrak{u}(0) \in \mathfrak{X},$$

$$(\mathcal{E}_h) \qquad \frac{d}{dt}\mathfrak{u}_h = \mathfrak{A}_h \mathfrak{u}_h, \quad \mathfrak{u}_h(0) \in \mathfrak{X}_h,$$

と同等である。ここで

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} u \\ \frac{d}{dt}u \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -A & 0 \end{pmatrix}, \quad D(\mathfrak{A}) = \begin{matrix} D(A) \\ \times \\ D(T) \end{matrix}$$

などである。作用素 $\mathfrak{A}$，$\mathfrak{A}_h$ は，それぞれ，$\mathfrak{X}$，$\mathfrak{X}_h$ において、ユニタリ作用素の群を生成するから，$e^{t\mathfrak{A}}$と，$e^{t\mathfrak{A}_h}$ に対して、条件（B）がみたされている。補題1から

$$\mathfrak{A}_h^{-1} \xrightarrow{K} \mathfrak{A}^{-1}$$

となるから，A－B－C定理より，$t \in [-T, T]$ で一様に，

$$e^{t\mathfrak{a}_h} \xrightarrow{\ K\ } e^{t\mathfrak{a}}$$

となる。これを、(E) と (E_h) に翻訳すれば、

$\| u_h^i - u^i \|_i \longrightarrow 0 \quad (i=0,1)$ ならば、(E_h) の解 $u_h(t)$ は、(E) の広義解 $u(t)$ に次の意味で収束することがわかる。

$$(21)\quad \begin{cases} \| u_h(t) - u(t) \|_1^2 + \| \frac{d}{dt} u_h(t) - \frac{d}{dt} u(t) \|_0^2 \\ \longrightarrow 0, \qquad t \in [0,\ T] \text{ で一様。} \end{cases}$$

さて、$(D_\tau u)(t) = \tau^{-1}(u(t+\tau) - u(t))$, $(D_{\bar\tau} u)(t) = (D_\tau u)(t-\tau)$, $D_{\tau\bar\tau} = D_\tau D_{\bar\tau}$ とおく。

定理3. $\tau_h \longrightarrow 0$ かつ $\sup_h \tau_h \| T_h \| = \gamma < 2$ とし、$\| u_h^i - u^i \|_i \longrightarrow 0 \quad (i=0,1)$ とする。このとき差分方程式：

$$D_{\tau_h\bar\tau_h} u_h(t) + A_h u_h(t) = 0$$
$$: k\tau_h \leqq t \leqq (k+1)\tau_h, \quad k = 0, 1, 2, \cdots$$
$$u_h(t) = u_h^1, \quad D_{\bar\tau_h} u_h(t) = u_h^0, \quad u_h^i \in X_h$$
$$: 0 \leqq t < \tau_h$$

の解 $u_h(t)$ は、方程式 (E) の広義解 $u(t)$ に (*) の意味で収束する。ただし $\frac{d}{dt} u_h(t)$ は、$(D_{\bar\tau_h} u_h)(t)$ におきかえる。

略証 $\mathfrak{u}_h = \begin{pmatrix} u_h \\ D_{\bar\tau_h} u_h \end{pmatrix}$ に対する差分方程式は、

$$\mathfrak{u}_h(t+\tau_h) = (1 + \tau_h \mathfrak{a}_h + \tau_h^2 \mathfrak{B}_h)\, \mathfrak{u}_h(t), \quad \mathfrak{B}_h = \begin{pmatrix} -A_h & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

である。$\tau_h \| T_h \| = O(1)$ のとき十分大きな λ に対しては、

$$\|(\lambda-\mathfrak{A}_h-\tau_h\mathfrak{B}_h)^{-1}-(\lambda-\mathfrak{A}_h)^{-1}\| = O(\tau_h)$$

となることが、$\mathfrak{A}_h$, $\mathfrak{B}_h$ の消散性より得られる。

$e^{t\mathfrak{A}_h} \xrightarrow{K} e^{t\mathfrak{A}}$ より、$(\lambda-\mathfrak{A}_h-\tau_h\mathfrak{B}_h)^{-1} \xrightarrow{K} (\lambda-\mathfrak{A})^{-1}$ を得る（条件(A)）。

$\tau_h\|T_h\| \leqq \gamma < 2$ なることより

$$\|u_h(t)\| \leqq \left(\frac{1+\gamma/2}{1-\gamma/2}\right)^{1/2}\|u_h(0)\| \qquad \forall t \geqq 0$$

が得られる（条件(B)）。離散半群に対する A－B－C 定理より定理3を得る。

具体的な方程式を扱うためには、さらに、摂動系

$$\frac{d^2}{dt^2}u + C\frac{du}{dt} + Au + Bu = 0$$
$$B \in L(X^1, X^0), \quad C \in L(X^0)$$

を考える必要がある。そのために必要な抽象論を述べておく。

今1. の条件(C)が成立っているとし、列 $\{B_n \in L(X_n)\}$ がある $B \in L(X)$ に対して、$B_n \xrightarrow{K} B$ であるとする。作用素 $A+B$ は連続半群 $S(t)$ を生成する。同様に作用素 A_n+B_n は連続半群（$T_n(t)$ が離散半群のときは、離散半群）$S_n(t)$ を生成する。（離散半群 $S_n(t)$ は、$S_n(t) = (T_n(\tau_n)+\tau_n B_n)^{[t/\tau_n]}$ で与えられる。）このとき、

<u>定理4.</u>　$t \in [0, T]$ につき一様に、$S_n(t) \xrightarrow{K} S(t)$.

4. lumped mass 型の近似

2. で論じた方程式 (E) で $B=0$ のときに話をかぎる。X_h の他に、X の閉部分空間 $\overline{X}_h$ で次の三条件をみたすものを考えよう。

(L.1) $\exists J_h \in L(X_h, \overline{X}_h)$, $K_h \in L(\overline{X}_h, X_h)$

$$K_h J_h = 1/X_h, \quad J_h K_h = 1/\overline{X}_h$$

(L.2) $\|J_h\|, \|K_h\| \leq N$ (hによらない).

(L.3) $\lim_{h \to 0} \|J_h^* J_h P_h^0 u - u\|_0 = 0$ for $\forall u \in X^0$.

ここで、共役作用素 J_h^* は、$u \in X_h$ と $v \in \overline{X}_h$ に対して

$$(J_h u, v)_X = (u, J_h^* v)_X$$

がなりたつように定めたものである。新たな近似方程式として、

$$(\widetilde{E}_h) \begin{cases} \frac{d}{dt} J_h^* J_h u_h(t) + A_h u_h(t) = 0 \\ u_h(0) = u_h \in X_h \end{cases}$$

又は、同じことであるが、$\overline{u_h}(t) = J_h u_h(t)$ に対して

$$(\overline{E}_h) \begin{cases} \frac{d}{dt} \overline{u_h}(t) + \overline{A}_h \overline{u_h}(t) = 0 \\ \overline{u_h}(0) = \overline{u}_h \in \overline{X}_h \end{cases}$$

を考えることにする。ここで、$\overline{A}_h = K_h^* A_h K_h \in L(\overline{X}_h)$ は、$\overline{X}_h$ での正値自己共役作用素である。

さて、条件 (L, 1)〜(L, 3) の下では、近似作用素を、$\overline{P}_h = J_h P_h^0$ として

$$\overline{X}_h \xrightarrow{K} X$$

であることがわかる。さらに

$$\overline{A}_h^{-1} \xrightarrow{K} A^{-1}$$

もしたがう((A))。一方、$\| e^{t\overline{A}_h} \| \leqq 1$ ((B)).

したがって、A－B－C定理により

$$e^{t\overline{A}_h} \xrightarrow{K} e^{tA}$$

が、$t \in [0, T]$ で一様になりたつ。半離散近似に対する結果の定理2も、$\alpha_h = \| \overline{A}_h \|$ と改めれば、そのまゝ成立する。又振動系に対する考察もできる。波動方程式型の場合も平行して論じることができる。なお、条件 (L, 3) は、次の条件におきかえてもよい。

(L, 3)′ $\| J_h u_h - u_h \|_0 \leqq \varepsilon(h) \| u_h \|_1$ for $u_h \in X_h$

ここで $\varepsilon(h)$ は、$h \longrightarrow 0$ のとき $\varepsilon(h) \longrightarrow 0$ となる。

5. 空間1次元の場合の例

$$(F) \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} a(x) \dfrac{\partial}{\partial x} + b(x) \dfrac{\partial}{\partial x} + c(x) \right) u(t, x) \\ \qquad : t > 0 \quad 0 < x < 1, \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x} - \sigma_0 \right) u(t, 0) = \left(\dfrac{\partial}{\partial x} + \sigma_1 \right) u(t, 1) = 0 \\ \qquad : t > 0, \\ u(0, x) = u(x). \end{cases}$$

なる混合問題を考える。ここで、$a(x) \in C^1([0,1])$ は、正値で、$b(x)$, $c(x)$ は、有界可測関数とし、σ_0, σ_1 は正数とする。

さて、$X = L^2([0,1])$, $Y_0 = L^2([0,1], a(x)dx)$（重みつき L^2 空間）, Y_1 を、$\mathbb{C}^2$ に内積 $\left(\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}\right) = a(0)\sigma_0 u_0 \overline{v_0} + a(1)\sigma_1 u_1 \overline{v_1}$ をいれたものとし、$Y = Y_0 \oplus Y_1 \oplus X$（直和ヒルベルト空間）とする。次に、$D(T) = H^1([0,1])$ として、$u \in D(T)$ に対して、

$$Tu = \left(\frac{d}{dx}u(x), \begin{pmatrix} u(0) \\ u(1) \end{pmatrix}, u(x)\right)$$

とおくと

$$D(T^*) = \left\{ \mathbb{V} = \left(v, \begin{pmatrix} \frac{v(0)}{\sigma_0} \\ \frac{v(1)}{\sigma_1} \end{pmatrix}, u\right) : v \in H^1, u \in L^2 \right\},$$

$$T^*\mathbb{V} = -\frac{\partial}{\partial x}(a(x)v(x)) + u(x), \quad \mathbb{V} \in D(T^*)$$

となる。$A = T^*T$ は、$-\frac{d}{dx}a(x)\frac{d}{dx} + 1$ に、境界条件 $\left(\frac{\partial}{\partial x} - \sigma_0\right)u(0) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \sigma_1\right)u(1) = 0$ を、考えた作用素の実現になっている。さらに、

$$Bu = -b(x)\frac{\partial}{\partial x}u(x) - (d(x)+1)u(x)$$

とおけば、(F) は 2. で扱った (E) の形になっている。

最も簡単な、折れ線近似を考えよう。

$$\lambda(x) = \begin{cases} |1-x| : & |x| \leqq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}, \quad \bar{\lambda}(x) = \begin{cases} 1 : & |x| \leqq 1/2 \\ 0 : & |x| > 1/2 \end{cases},$$

に対して、$h = 1/n$ として

$$\lambda_j^h(x) = \lambda\left(\frac{x - jh}{h}\right), \quad \bar{\lambda}_j^h(x) = \bar{\lambda}\left(\frac{x - jh}{h}\right)$$

とする。

$$X_h = \left\{ \sum_{j=0}^{n} \varphi_j^h \lambda_j^h \right\}, \quad \bar{X}_h = \left\{ \sum_{j=0}^{n} \varphi_j^h \bar{\lambda}_j^h \right\}$$

とおくと、X_hは、仮定をみたす．さらに

$$J_h : \sum_{j=0}^{n} \varphi_j^h \lambda_j^h \longleftrightarrow \sum_{j=0}^{n} \varphi_j^h \bar{\lambda}_j^h : K_h$$

と見なせば、条件 (L, 1)〜(L, 3) をみたすことも容易にわかる。ちなみに $a(x) \equiv 1$ のときは

$$\| T_h \| \leqq 2\sqrt{3}/h + \sqrt{6\max(\sigma_0, \sigma_1)/h} + 1$$

$$\| \bar{T}_h \| = \| T_h K_h \| \leqq 2/h + \sqrt{2\max(\sigma_0, \sigma_1)/h} + 1$$

となる。これから

$$\alpha_h = \| \bar{A}_h \| = \| \bar{T}_h \|^2 = 4/h^2 + O\left(\frac{1}{h}\right)$$

定理2によって、$\tau_h/h^2 < 1/2$ ならば、我々のAに対して考えた近似方程式$(\bar{E}_h)$の解の収束性がいえる。この場合$(\bar{E}_h)$は、次の方程式を、陽に差分近似したものである：

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t, x) - u(t, x).$$

[1] Kato, T. Perturbation theory for linear operators, (Springer, Berlin, 1966).

[2] Ushijima, T. Approximation theory for semi-groups of linear operators and its application to approximation of wave equations, (pre-print).