

## 無限領域への波動伝播について

川崎重工業 鉄構設計室 坂井藤一

### 1. まえがき

我々が有限要素法で連続体の境界値問題の解析を行なう場合、しばしば無限に近い領域を対象としなければならぬことが多い。通常このような場合、静的な釣合問題や定常的な流れ問題においては、広義の Saint Venant 原理<sup>1)</sup>を適用して仮想的な境界を設け、対象を有限領域に限定することによって、コンピュータ解析を可能にしている。

波動解析においてはどのような仮想境界が考えられるであろうか。これはコンピュータ解析上重要な問題である。非定常波動解析において、従来差分法などで考えられた方法は、かなり離れた位置で仮想的に領域を切断することによって、解析対象を有限化するものであった。この方法ではしかしながら、切断位置に到達した波動はかならず反射を起し、その影響が実際と異なる結果を生

じさせてしまう。したがって、その影響が及ばないように、計算領域を広くとるか、あるいは時間ステップを早期に打切る必要があった。

最近では、しかしながら、差分法においても後述する有限要素法と掃を一にするように、無反射の境界をどのように設定するかの議論がなされつつある<sup>2)</sup>。ここでは、そのような点について有限要素法の立場から若干の考察を試みることにする。

## 2. 準備—初期値問題に対する有限要素法

次の簡単な初期値問題を考える。

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 y = 0, \quad k^2 > 0 \quad (1)$$

$$y(0) = 1, \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0 \quad (2)$$

この解は、 $y = \cos kt$  (3)

これを変分原理により有限要素法近似で求める。

### 2) Hamilton 原理に基づく有限要素法

$$\pi_H = \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \left( \frac{dy}{dt} \right)^2 - k^2 y^2 \right] dt \quad (4)$$

$\delta \pi_H = 0$  より、Euler 方程式は原式(1)となり、自然境

境界  $t = T$  では  $\frac{dy}{dt} = 0$  となる。これは Consistent な境界条件ではない。したがって、これに基づいて数値計算を実行するには、 $T \rightarrow \infty$  にする工夫が必要である。<sup>3)</sup>

b) 最小二乗原理に基づく有限要素法

原題を次のように書き換える。

$$\frac{dv}{dt} + k^2 y = 0, \quad \frac{dy}{dt} - v = 0 \quad (5)$$

$$v(0) = 0, \quad y(0) = 1 \quad (6)$$

$$\pi_{LS} = \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \left( \frac{dy}{dt} - v \right)^2 + \frac{1}{k^2} \left( \frac{dv}{dt} + k^2 y \right)^2 \right] dt \quad (7)$$

$\delta \pi_{LS} = 0$  より、次の諸式を得る。

Euler 方程式は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 y}{dt^2} - 2 \frac{dv}{dt} - k^2 y &= 0 \\ \frac{d^2 v}{dt^2} + 2k^2 \frac{dy}{dt} - k^2 v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

自然境界  $t = T$  では、原式(5)が成立している。これは Consistent な境界条件として  $T$  の任意の値に対して考えられる。

c) 停留二乗原理に基づく有限要素法

次の汎関数を考える。

$$\pi_{ss} = \frac{1}{2} \int_0^T \left[ \left( \frac{dy}{dt} - v \right)^2 - \frac{1}{k^2} \left( \frac{dv}{dt} + k^2 y \right)^2 \right] dt \quad (10)$$

この汎関数は明らかに正値性、最小性は必ずしも保証されないことが分る。したがって、仮に停留=乗原理と呼んでおく。

$$\begin{aligned} \delta \pi_{ss} = & \int_0^T \left[ - \left( \frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 y \right) \delta y \right] dt + \left( \frac{dy}{dt} - v \right) \delta y \Big|_0^T \\ & + \int_0^T \left[ \frac{1}{k^2} \left( \frac{d^2 v}{dt^2} + k^2 v \right) \delta v \right] dt - \left( \frac{dv}{dt} + y \right) \delta v \Big|_0^T \end{aligned} \quad (11)$$

$\delta \pi_{ss} = 0$  より、Euler方程式は原式(7)と一致し、自然境界  $t = T$  では原式(5)が成立している。これは **Consistent** な境界条件である。

この場合、境界項を除外して領域  $(0, T)$  のみを考えるならば、(11)式の前半部は **Hamilton 原理** となり、後半部はそれと相補であって **Complementary Hamilton 原理** を示している。この相補原理は **Toupin 原理** と呼ばれることもある。<sup>4)</sup> この **Hamilton 原理** および **Toupin 原理** は前述したように境界項に関し **Consistent** でない面がある。停留=乗原理を動力学に適用すれば、**Hamilton 原理** とその相補原理を導き得ること、ならびに任意の  $T$  における自然境界条件が **Consistent** になることは注目すべ

きことであろう。\*)

表-1  $\cos t$  に対する数値結果

| method / t    | 0.2   | 0.4   | 0.6   | 0.8   | 1.0   | 1.2   | 1.4   | 1.571 | 1.6    |
|---------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| Exact         | 0.980 | 0.921 | 0.825 | 0.697 | 0.540 | 0.362 | 0.170 | 0.000 | -0.029 |
| explicit      | 1.000 | 0.960 | 0.880 | 0.762 | 0.608 | 0.424 | 0.216 | 0.023 | -0.009 |
| FDM implicit  | 0.962 | 0.888 | 0.783 | 0.652 | 0.501 | 0.336 | 0.165 | 0.018 | -0.006 |
| central       | 1.000 | 0.960 | 0.882 | 0.768 | 0.623 | 0.453 | 0.266 | 0.071 | 0.068  |
| Galerkin      | 0.974 | 0.910 | 0.811 | 0.681 | 0.526 | 0.352 | 0.167 | 0.005 | -0.022 |
| FEM Hamilton  | 1.000 | 0.960 | 0.882 | 0.770 | 0.627 | 0.459 | 0.272 | 0.077 | 0.074  |
| FEM least sq. | 0.980 | 0.922 | 0.827 | 0.700 | 0.545 | 0.369 | 0.179 | 0.010 | -0.019 |
| FEM stat. sq. | 0.980 | 0.921 | 0.825 | 0.697 | 0.540 | 0.362 | 0.170 | 0.000 | -0.029 |

\*)この点については、多自由度系においても一般に成立つようである。

以上のような議論の計算例として  $\eta = 1$  とした場合の種々の近似解と正解  $y = \cos t$  を比べたのが表-1である。表-1にはさらに差分法の結果も列挙してある。Central 差分法および Hamilton 有限要素法においては、初期条件  $\frac{dy}{dt}(0) = \frac{y_1 - y_0}{0.2} = 0$  を用いている。有限要素法の結果は同一分割数と同一の内挿関数に基づくものであるが、総体に比較的精度がよく、かつ停留 = 乗原理による結果が最も精度がよい。

### 3. 波動伝播の問題

#### 3.1 非定常の場合

簡単のため一次元の弦を伝わる波を考える。

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad (12)$$

$$\text{ただし、 } c^2 = P/\rho \quad (13)$$

ここで、 $c$  : 波速,  $P$  : 張力,  $\rho$  : 線密度

式(12)はまた一階の波動方程式として、次のようにも書ける。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} \pm c \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (14)$$

ただし、複号は波の進行方向の正負を示す。

上式(12)あるいは(14)は、空間方向および時間方向に関し同形であり、無限連続な空間を考えれば時間に対するのと同様の展開が可能であろう。

a) Hamilton 原理に基づく有限要素法

$$\pi_H = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \right)^2 - c^2 \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx dt \quad (15)$$

これを用いて、空間・時間両軸のなす平面上で有限要素法を展開することができる。例えば、図-1、(f)のようにメッシュを切ることによって有限要素法の立場から、差分法における **Couvan - Friedrichs - Lewy** スキームと同一の形式が得られる。<sup>5)</sup> 自然条件は 2 の a) の場合と同じく **Consistent** でない。

b) 最小二乗原理に基づく有限要素法

$$\pi_{LS} = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} \left( \frac{\partial \eta}{\partial t} \pm c \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx dt \quad (16)$$

これを用いて、a)と同様に空間・時間平面上で有限要素法を展開することができる。例えば、図-1、(a)のような任意の三角形要素を適当に組み合わせることによって、(b) **Friedrichs** スキーム、(c) **Godunov** スキーム、(d) **Leap Frog Method**、(e) **Lax - Wendroff** スキームなど差分法と同一の形式を得ることができるの

は興味深い。<sup>5)</sup>

自然境界  $x = x_1$  を考えるとすれば、そこでは原式(14)が成立する。したがって、自然条件は Consistent であり、 $x_1$  の任意の値に対して進行波の条件を与えている。

このことはまた物理的に次のように説明される。いま、境界  $x = x_1$  において特性インピーダンス  $Z$  の物体が存在すれば、次の式が成立つ。

$$Z \frac{\partial \eta}{\partial t} \pm P \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

この時無反射の条件は、 $Z = \sqrt{PP}$  (18)

となることであり、この場合  $Z$  は整合しているという。<sup>\*</sup>したがって、仮想境界においては整合インピーダンスを設ければよいことになる。これは境界上で式(14)が成立つことと同じである。式(14)を境界条件として利用することは、差分法の立場でも導入されている。

---

\*1) このような端を完全終端という。



## 3.2 定常の場合

次のような定常問題を考える。

$$\eta = \bar{\eta} e^{-i\sigma t} \quad (19)$$

これを代入すれば、式(12)および(14)から次のような式を得る。

$$\bar{\eta}_{xx} + k^2 \bar{\eta} = 0 \quad (20)$$

$$\bar{\eta}_x \mp i k \bar{\eta} = 0 \quad (21)$$

$$\text{ただし、} k = \sigma/c \text{ : 波数} \quad (22)$$

式(20)から、 $\bar{\eta}$ を実数として次の汎関数を考える。

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} (\bar{\eta}_x^2 - k^2 \bar{\eta}^2) dx \quad (23)$$

$\delta \mathcal{H} = 0$ より、境界条件として、

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\eta} = \bar{\eta}_p \quad \text{基本条件} \\ \bar{\eta}_x = 0 \quad \text{自然条件} \end{array} \right\} \quad (24)$$

これから分るように、この場合は定在波(重複波)しか表現し得ない。

進行波を表現するには、 $\bar{\eta}$ を複素数と考えて、

$$\bar{\eta} = \bar{\eta}^c + i \bar{\eta}^s \quad (25)$$

とにおいて、式(2.1)から次の式を得る。

$$\left. \bar{\eta}_x^c \pm k \bar{\eta}^s = 0 \right\} \quad (26)$$

$$\left. \bar{\eta}_x^s \mp k \bar{\eta}^c = 0 \right\}$$

これより、次の停留二乗原理を用いる。

$$\pi_{SS} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} \left[ (\bar{\eta}_x^c \pm k \bar{\eta}^s)^2 - (\bar{\eta}_x^s \mp k \bar{\eta}^c)^2 \right] dx \quad (27)$$

$\delta \pi_{SS} = 0$  より、次のような諸式を得る。

Euler 方程式は、

$$\bar{\eta}_{xx}^c + k^2 \bar{\eta}^c = 0, \quad \bar{\eta}_{xx}^s + k^2 \bar{\eta}^s = 0 \quad (28)$$

境界条件は、

$$\bar{\eta}^c = \bar{\eta}_p^c, \quad \bar{\eta}^s = \bar{\eta}_p^s \quad (29)$$

$$\bar{\eta}_x^c \pm k \bar{\eta}^s = 0, \quad \bar{\eta}_x^s \mp k \bar{\eta}^c = 0 \quad (30)$$

なお、自由境界では  $k = 0$  とおけばよい。

上記汎関数は書換えると次のようになる。

$$\begin{aligned} \pi_{SS} = \frac{1}{2} \int_{x_0}^{x_1} & \left[ \bar{\eta}_x^{c2} - k^2 \bar{\eta}^{c2} - (\bar{\eta}^{s2} - k^2 \bar{\eta}^{s2}) \right] dx \\ & \pm k \bar{\eta}^c \bar{\eta}^s \Big|_{x_0}^{x_1} \end{aligned} \quad (31)$$

これは Bai, K.W.<sup>6)</sup> が仮想境界の条件として、次の Sommerfeld 放射条件

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} (\bar{\eta}_x \mp i k \bar{\eta}) = 0 \quad (32)$$

を利用して導いた汎関数と一致する。

二次元あるいは三次元の波動に対しても同様のことが成立する。デカルト座標を  $x_1, x_2, x_3$  とする時、各軸方向の進行波は次のように表わされる。

$$\bar{\eta}_{,l} \pm k_l \bar{\eta} = 0 \quad (l = 1, 2, 3) \quad (33)$$

ここで、 $( )_{,l}$  は  $x_l$  に関する偏微分を表わし、 $k_l$  は  $x_l$  方向の波数で次の関係がある。\*)

$$k_l k_l = k^2 \quad (34)$$

停留二乗原理を適用する。

$$\begin{aligned} \pi_{ss} &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ (\bar{\eta}_{,l}^c \pm k_l \bar{\eta}^s) (\bar{\eta}_{,l}^c \pm k_l \bar{\eta}^s) \right. \\ &\quad \left. - (\bar{\eta}_{,l}^s \mp k_l \bar{\eta}^c) (\bar{\eta}_{,l}^s \mp k_l \bar{\eta}^c) \right] dV \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ \bar{\eta}_{,l}^c \bar{\eta}_{,l}^c - k^2 \bar{\eta}^{c2} - (\bar{\eta}_{,l}^s \bar{\eta}_{,l}^s - k^2 \bar{\eta}^{s2}) \right] dV \\ &\quad \pm \int_S n_l k_l \bar{\eta}^c \bar{\eta}^s dS \quad (35) \end{aligned}$$

---

\*) 以下総和規約を用いる。

ただし、 $\Omega$  は対象とする内部領域であり、 $S$  は仮想境界表面を表わし、 $n_e$  はその外方向法線ベクトルの  $z$  軸方向成分である。

今、波の進行方向を  $r$  とすると、

$$k_e = k \cos(r, \alpha_e) \quad (36)$$

なる関係があり、また表面  $S$  において  $n$  と  $r$  の方向が一致すれば、上の関係より、

$$n_e k_e = k n_e n_e = k \quad (37)$$

となるから、式 (35) の最後の項は、

$$\pm \int_S k \bar{\eta}^s \bar{\eta}^c dS$$

となる。この時、自然条件は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\eta}^c}{\partial n} \pm k \bar{\eta}^s &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\eta}^s}{\partial n} \mp k \bar{\eta}^c &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

これは、Bai の示したものと同一結果となり、次の Sommerfeld の放射条件に対応する。

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} - i k \bar{\eta} \right) = 0 \quad (39)$$

なお、Bai は二次元の場合の進行波を表現する Hankel

関数の性質を利用して、次の補正を行なっている。すなわち、仮想境界条件として、次の式を用いている。

$$\frac{\partial \bar{\eta}}{\partial r} + \frac{1}{2\sqrt{r}} \bar{\eta} - ik\bar{\eta} = 0 \quad (40)$$

この点については、Green 関数の観点からも説明が行なわれている。<sup>7)</sup>

以上のような波動伝播問題の計算例として、図-2 以下に示すように、直角に屈曲した水路を伝わる長波の解析を行なった。図中  $d$  は水路の中を表わし、有限要素法の結果(実線)が桃井<sup>6)</sup>の2重フーリエ級数解破線と比較されている。

有限要素法の結果は十分な精度を有し、このような水路の例に見られるように無限に続く任意形状の領域の波動伝播問題に対して実用性があることが分る。

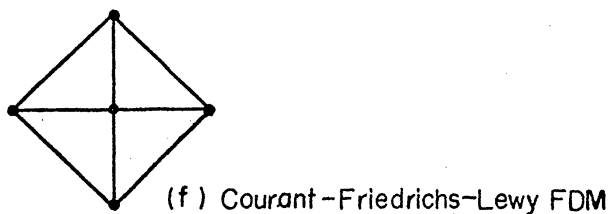
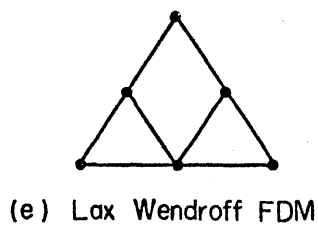
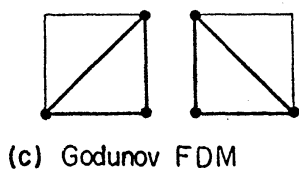
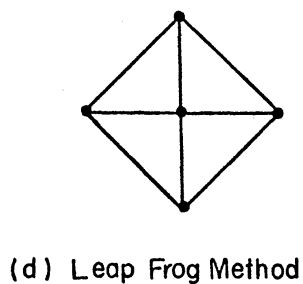
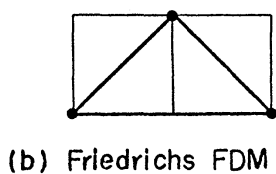
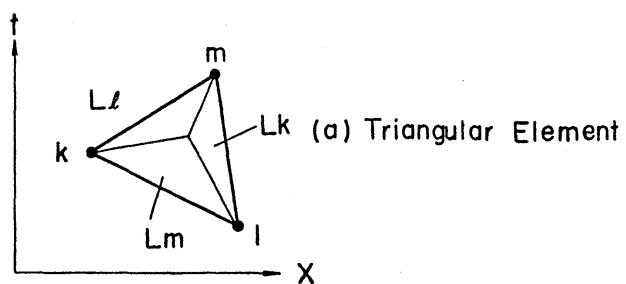


Figure 1 - 1 Element Combinations for various Finite Differences

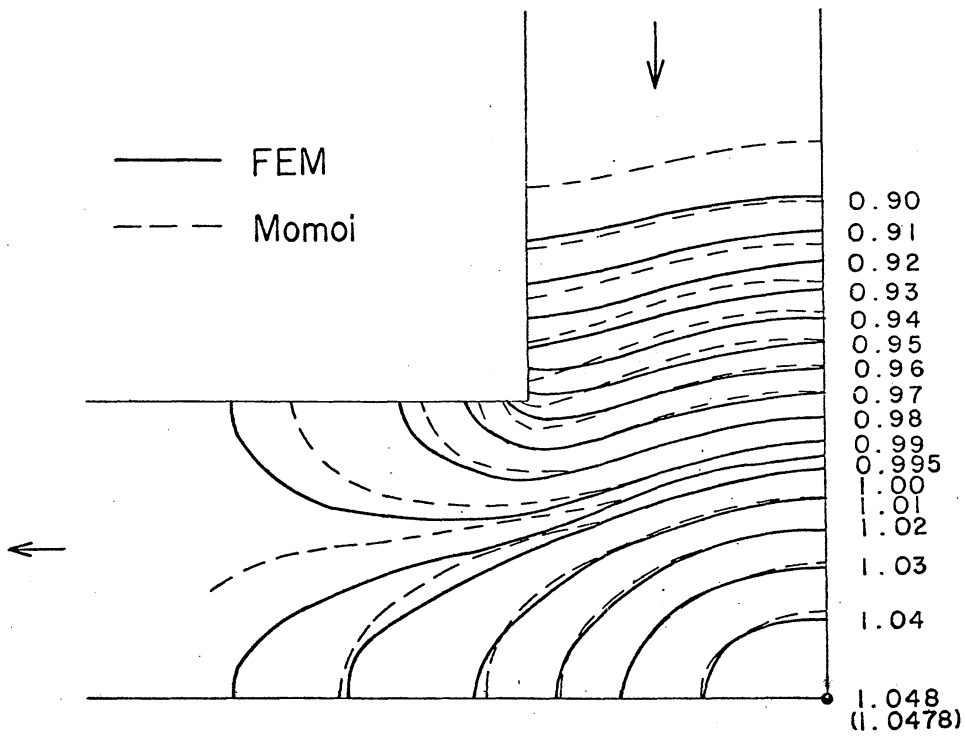


图-2 Variation of the Amplitude for  $kd=0.3$

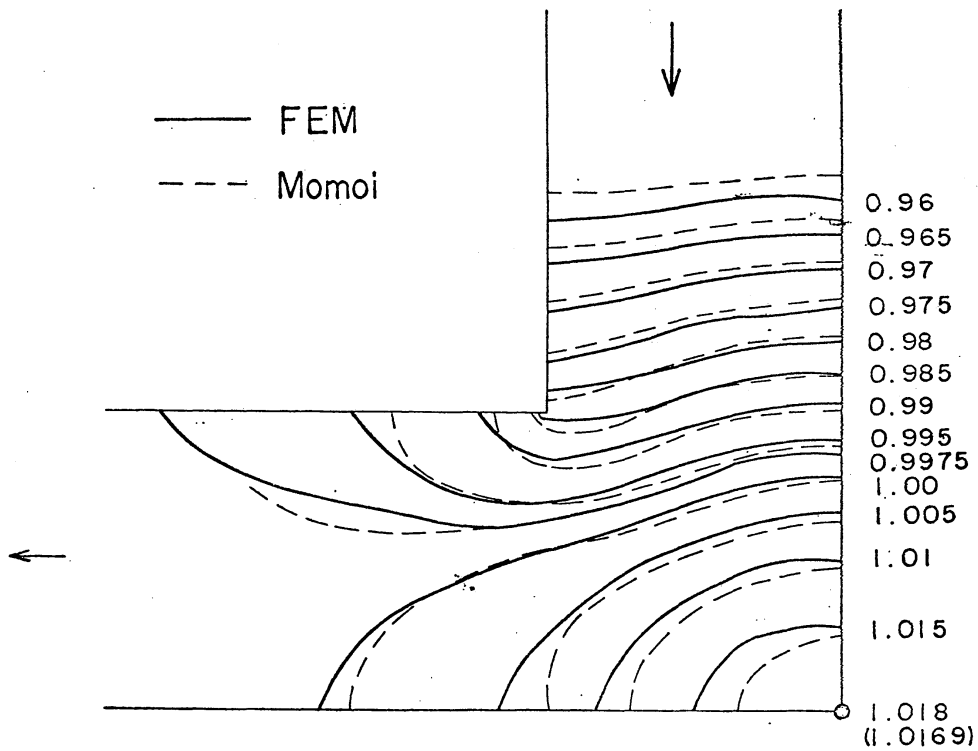


图-3 Variation of the Amplitude for  $kd=0.5$

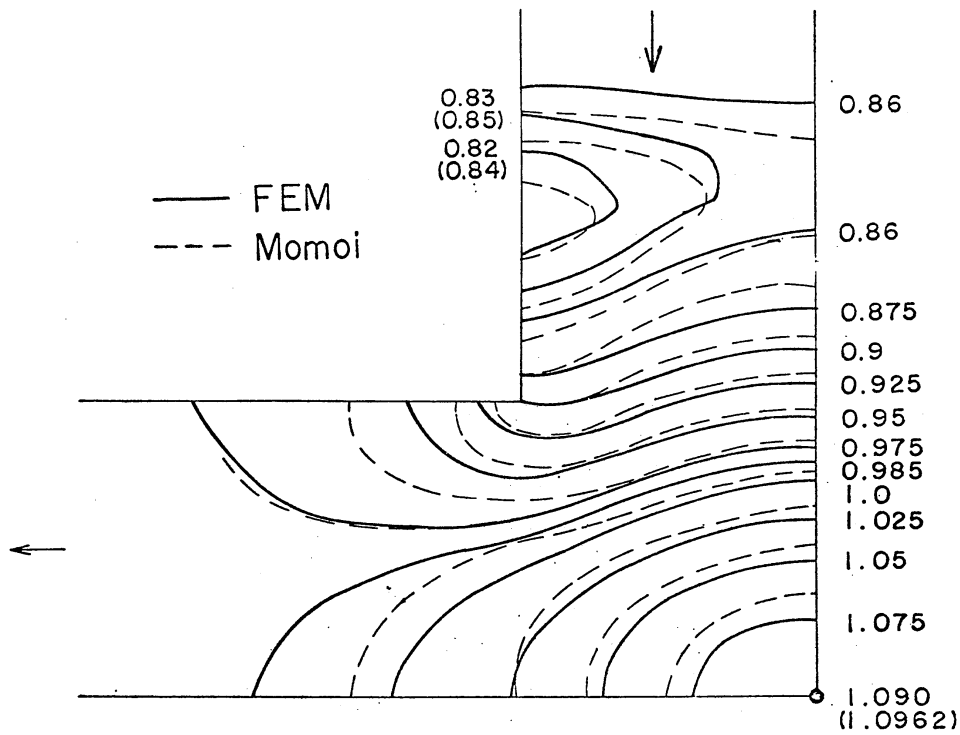


图-4 Variation of the Amplitude for  $kd=0.7$

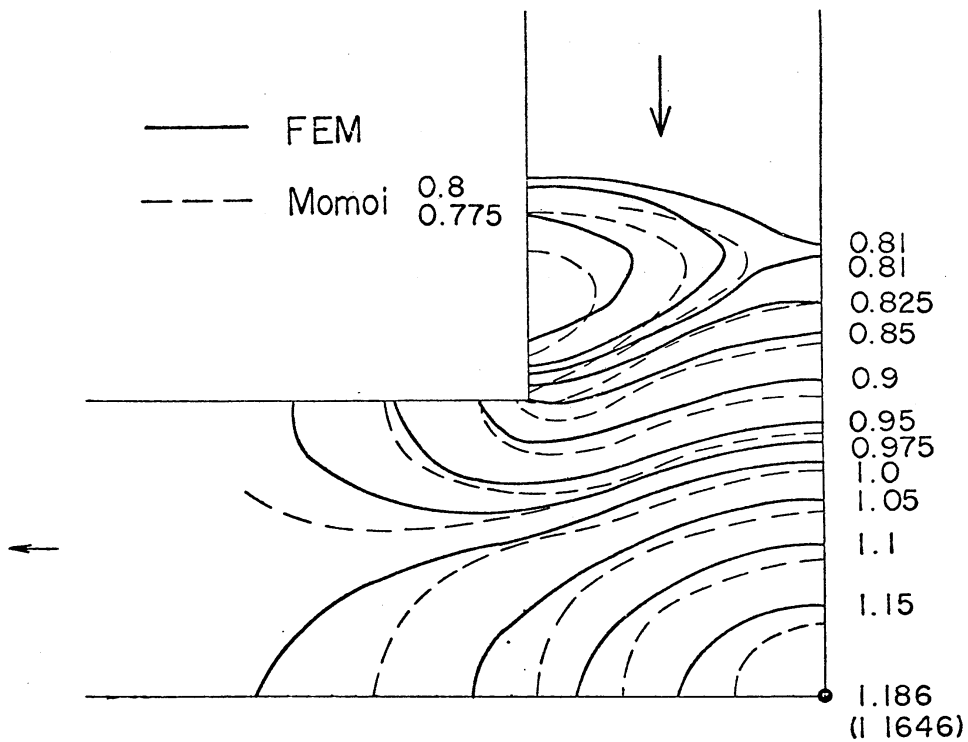


图-5 Variation of the Amplitude  $kd=0.9$



## 参考文献

- 1) Fung, Y. C. : Foundations of Solid Mechanics, Prentice-Hall, 1965
- 2) 伊藤剛：非定常の境界条件について，才18回水理講演会論文集，1974
- 3) Noble, B. : Variational Finite Element Methods for Initial Value Problems, in the Mathematics of Finite Elements and Applications, edited by J. R. Whiteman, Academic Press, 1973
- 4) Toupin, R. A. : A Variational Principle for Mesh-type Analysis of a Mechanical System, Trans. A. S. M.E., Vol. 74, 1952
- 5) 坂井藤一：有限要素法と差分法の等価性およびある離散化手法，土木学会論文報告集第220号，1973
- 6) Bai, K. J. : A Variational Method in Potential Flows with a Free Surface, Univ. of California, Rep. NA 72-2, Sept. 1972
- 7) 瀬戸秀幸：自由表面をもつ外部流体問題への有限要素法の応用，日本鋼構造協会STAN基礎研究班資料，1973
- 8) 桃井高夫：L字水路における津波，東大地震研究所報告，1965