数理解析研究所講究録
第 241 巻 1975 年 103-107

摩擦境界条件の取扱い

神戸大 工学部 瀬口靖幸

摩擦のすべり法則(Sliding Rule of Friction)を次の式で与える.

$$[\mathbb{v}] = \frac{1}{L} n_g (\dot{\mathbb{F}} n_g), \quad g=0, \ \dot{g}>0, \ F^3<0 \qquad (1)$$

ここで[$\mathbb{v}$]は摩擦すべり面上の1点における摩擦すべり速度ベクトル, $\dot{\mathbb{F}}$はその点に働く単位面積あたりの接触面力の速度ベクトル, gは$\mathbb{F}$の空間において, すべり始める限界を与えるすべり限界曲面, n_gはその曲面と, 摩擦面の法線応力平面F^3=constとの交線がなす閉曲線に立てたもののうち, F^3 = const. 面内にある外向単位法線ベクトルである. [$\mathbb{v}$], $\mathbb{F}$はそれぞれ接触面上のすべり速度成分[v_α]と接触面上の接線力成分F^αとF^3に分解され, 接触面で定義された基本ベクトル$\mathbb{G}_\alpha$, $\mathbb{G}^\alpha$ (α=1, 2), $\mathbb{G}^3$を用いて

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{F} &= F^\alpha \mathbb{G}_\alpha + F^3 \mathbb{G}_3 \\ [\mathbb{v}] &= [v_\alpha]\, \mathbb{G}^\alpha \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

と表わされるものとすると，式(1) は

$$\left.\begin{array}{l}[v_\alpha] = h_{\alpha\beta}\dot{F}^\beta, \quad h_{\alpha\beta} = \dfrac{1}{L}\dfrac{g_\alpha g_\beta}{g_\delta g^\delta}, \quad g_\alpha = \dfrac{\partial g}{\partial F^\alpha} \\ \qquad g = 0,\ \dot{g} > 0,\ F^3 < 0\end{array}\right\} \quad (3)$$

と書かれる．

g の形式を任意に選ぶことにより，種々の摩擦の法則が得られる．たとえば

$$g = (aG_{\alpha\beta}F^\alpha F^\beta)^{\frac{1}{2}} + F^3,\quad a：定数,\ G_{\alpha\beta} = G_\alpha G_\beta \quad (4)$$

は Amontons の法則を2軸すべりに拡張した限界曲面となる．また，1軸すべり（$\alpha = 1$）に対して

$$\left.\begin{array}{l}F^3 = 0 \text{ のとき},\ g = F^1 = 0 \\ F^3 < 0 \text{ のとき},\ g = F^1 \pm F^0,\ F^0：定数\end{array}\right\} \quad (5)$$

とおけば，塑性加工の工具摩擦でよく用いられる摩擦力一定の仮定に相当するものとなる．

式(1)のかわりに，ベクトル$[v]$はその方向のみが規定されるものとし，

$$[v] = \frac{1}{L}n_g \quad (6)$$

とおけば，すべり限界曲面はすべりの状態にあるとき，その形が不変であるような制限された摩擦すべりを与える．一般的に g の形式として

$$g = (a_{\alpha\beta}F^\alpha F^\beta)^n + F^3 \quad (7)$$

を仮定すれば，式(6) は

$$F_\alpha = \lambda[v_\alpha] \ , \ g = 0 \ , \ \dot{g} = 0 \ , \ F^3 < 0 \qquad (8)$$

の形式で書かれることになり，クーロン摩擦の一般化となる.[1]
式(8) において，摩擦面の潤滑剤の粘性係数を η，膜厚を δ として，$\lambda = \eta/\delta$ とおけば流体潤滑の式が得られる．なお，式(1)，(6) いずれの場合においても，$L \to \infty$ で固着の状態，$L \to 0$ で拘束のない接触面状態を表わしている．

提案された摩擦のすべり法則は，形式上は複雑であるが，従来のように，接触面上の速度場を仮定して摩擦応力を求めたり，前もって摩擦係数等の摩擦応力場に存在する関係を仮定したりする必要はなく，本法則をサブシステム方程式として，たがいに接触する固体全体のシステム方程式に組込み，その解を求めることにより，固体の応力とひずみ場を決定すると同時に，接触面上の応力場と速度場，すべり域等を決定することができる．

以下において，摩擦のすべり法則の有限要素モデル化を試みる．接触面において厚さのない接触面要素を考えると，そこでの摩擦仕事 $\dot{w}$ は次式で与えられる．

$$\dot{W} = \int_S F^\alpha [v_\alpha] \, dS \qquad (9)$$

ここで dS は微小接触面素である．接触面要素の節点 N における摩擦力を P_N^α，すべり速度を $[v_\alpha^N]$ とし，内そう関数 $\Omega_N = \Omega^N$ を導入して

$$[v_\alpha] = \Omega_N [v_\alpha^N] \tag{10}$$

とすれば，式(9) より

$$P_N^\alpha = \int_S F^\alpha \Omega_N \, dS \tag{11}$$

を得る．微小時間後の量

$$\bar{P}_N^\alpha = P_N^\alpha + \Delta P_N^\alpha \, , \qquad \bar{F}^\alpha = F^\alpha + \Delta F^\alpha \tag{12}$$

に対しては，同様に

$$\bar{P}_N^\alpha = \int_S \bar{F}^\alpha \Omega_N \, dS \tag{13}$$

となり，式(12) を考慮して式(13) から (11) を差引き，増分形で書いた式(3)を代入すると

$$\Delta P_N^\alpha = \int_S \Delta F^\alpha \Omega_N \, dS = K_{NM}^{\alpha\beta} [v_M^\alpha] \Delta t \tag{14}$$

を得る．ここで

$$K_{NM}^{\alpha\beta} = \int_S k^{\alpha\beta} \Omega_N \Omega_M \, dS \, , \quad k^{\alpha\beta} = inv(h_{\alpha\beta}) \tag{15}$$

である．

現在，提案された法則の妥当性を検証すると同時に，それに用いられたパラメータの実験的検討を行なっている段階であるが，[2] 塑性加工における基本的な加工形態に対して本法則を適用した有限要素法による数値結果は，定性的にではあるが，接触面の複雑なすべりモードをよく表わしていることが確かめられている．詳しくは文献(3)を参照されたい．

なお，このノートをまとめるにあたり，種々の討論をいただき，また，文献(1) をご教示下さった京都産大の藤井　宏

助教授に深く感謝の意を表したい.

文献

(1) G. Duvaut and J. L. Lions, Les Inéquations en Mécanique et en Physique, (1972), Dunod

(2) 瀬口 ほか, 摩擦のすべりとすべり限界に関する2,3の検討, (昭49-5), 塑性加工春季講演会, p. 61

(3) 瀬口 ほか, 工具摩擦におけるすべり法則と圧縮加工への応用, 塑性と加工, 14巻 153号, (昭48-10), p. 796