数理解析研究所講究録
第 241 巻 1975 年 222-233

Stokes方程式の一つの近似解法

電気通信大学　　渡辺 二郎

1. Stokes方程式の定常問題

2次元または3次元空間の有界領域ΩにおいてStokes方程式に対する定常問題を考える:

(1.1)　$-\nu\Delta u = \mathrm{grad}\, p + f \quad (x\in\Omega)$

(1.2)　$\mathrm{div}\, u = 0 \quad (x\in\Omega)$

(1.3)　$u = 0 \quad (x\in S).$

ここでSはΩの境界であり，νは正定数である．uとfはN次元（$N=2$または3）ベクトル値関数であり，pはスカラー値関数である．fが与えられたとき，uとpを求めることがわれわれの問題である．

ヒルベルト空間

$$V = \{v\ ;\ v\in (H_0^1(\Omega))^N \text{ かつ } \mathrm{div}\, v = 0\}$$

において考える．Vにおける内積は

$$[v, w] = \sum_{i=1}^{N}\int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial w}{\partial x_i}\,dx.$$

任意の $f \in (H^{-1}(\Omega))^N$ に対してStokes方程式の定常問題(1.1)−(1.3)の一般化された解 $u \in V$：

(1.4) $\nu[u, v] = \langle f, v \rangle \quad (\forall v \in V)$

が一意的に存在する。

2 関数空間 V の直和分解

Ω を $\mathbb{R}^N$（$N=2$ または 3）の有界な連結開集合とする。Ω の境界 S はたがいにまじわらない有限個の C^{m+2} 級（m は正整数）の連結閉曲面（ただし $N=3$ のとき。$N=2$ のときは閉曲線）$S_0, S_1, \cdots, S_q$ からなり（$q \geq 0$），Ω は S_0 で囲まれる領域に含まれるとする。$N=3$ のとき，S_i の1次元Betti数を $2p_i$ とする（$p_i \geq 0$）。Ω の1輪体の基を $c_1, c_2, \cdots, c_r$ とする。ただし，$N=3$ のとき $r = p_0 + p_1 + \cdots + p_q$；$N=2$ のとき $r = q$。各 c_i に対して，Ω 内のなめらかな境界をもつ細いドーナツ型領域 d_i で，c_i の台を含み，$d_i \cap d_j = \phi$ $(i \neq j)$ をみたすものをとる。d_i をある個所で輪切りにして得られる切り口を σ_i とし，σ_i に向きを定めておく。各 d_i に対して，$v_i \in V \cap (C_0^\infty(\Omega))^N$ で，$\mathrm{supp}\, v_i \subset d_i$ かつ

(2.1) $\int_{\sigma_i} v_i \cdot n_i \, d\sigma = 1$

をみたすものをとる。ここで n_i は σ_i の正の向きの単位法

線ベクトルであり，$d\sigma$ は面素である。各 i $(1 \leqq i \leqq r)$ に対してこのような v_i を一つずつとる。$v_1, \cdots, v_r$ で張られる線形空間を R とする。このとき次の定理がなりたつことを証明する。

定理 1　上のような Ω で，境界 S が C^{m+2} 級ならば $(m \geqq 1)$

$$V \cap (H_0^m(\Omega))^N = R \oplus \mathrm{rot}\,(H_0^{m+1}(\Omega))^M \quad (\text{直和}).$$

ただし，$M = \begin{cases} 1 & (N = 2 \text{のとき}) \\ 3 & (N = 3 \text{のとき}) \end{cases}$

証明　$N = 3$ の場合に証明する。$v \in V \cap (H_0^m(\Omega))^3$ に対して適当に実数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ をとれば，Ω の任意の“切断面” Σ に対して

$$(2.2) \qquad \int_\Sigma \left(v - \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i\right) \cdot n \, d\sigma = 0$$

がなりたつようにできる。ここで，Ω の“切断面”とは Ω に含まれる曲面で，その境界は S に含まれるもののことである。$u = v - \sum_{i=1}^r \alpha_i v_i$ とおく。u を Ω の外 Ω^c へ 0 で拡張したものを $\tilde{u}$ とかく。$\tilde{u} \in H_0^m(\mathbb{R}^3)^3$ かつ $\mathrm{div}\,\tilde{u} = 0$ である。したがって

$$\psi(x) = \frac{1}{4\pi} \mathrm{rot} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\tilde{u}(y)}{|x-y|} dy$$

とおけば，$\psi \in H_{loc}^{m+1}(\mathbb{R}^3)^3$ (したがって $\mathbb{R}^3$ で連続) で

あり，

(2.3) $\quad \hat{u}(x) = \mathrm{rot}\,\psi(x) \quad$ a.e.

がなりたつ．したがって，とくに Ω^c で $\mathrm{rot}\,\psi(x) = 0$ a.e.

いま，固定点 $x_0 \in \Omega^c$ から任意の点 $x \in \Omega^c$ への Ω^c 内の折れ線を C_x とし，その上の単位接線ベクトルを t とする．

$$g(x) = \int_{C_x} \psi \cdot t\, ds \qquad (x \in \Omega^c)$$

とおけば，$g(x)$ の値は C_x によらず一意的に定まり，$g \in H^{m+2}_{loc}(\Omega^c)$ であることが，(2.2) と (2.3) からわかる．明らかに，Ω^c において $\mathrm{grad}\, g = \psi$ がなりたつ．g の $\mathbb{R}^3$ 上への一つの拡張を $\tilde{g} \in H^{m+2}_{loc}(\mathbb{R}^3)$ とする．

(2.4) $\quad w = \psi - \mathrm{grad}\, \tilde{g}$

とおけば，$w \in H^{m+1}_{loc}(\mathbb{R}^3)^3$ かつ Ω^c で $w = 0$．ゆえに $w \in H^{m+1}_0(\Omega)^3$．(2.4) と (2.3) から Ω において

$$\mathrm{rot}\, w = \mathrm{rot}\,\psi = u = v - r$$

がなりたつことがわかる．ただし，$r = \sum \alpha_i v_i \in R$．

次に，もし $r \in R$ と $w \in (H^{m+1}_0(\Omega))^M$ に対して

$$r + \mathrm{rot}\, w = 0$$

ならば，$r = \mathrm{rot}\, w = 0$．なぜならば，Ω の“切断面” Σ で，切り口 σ_i を含み，σ_i 以外ではすべてのドーナツ型領域 d_j と交わらないようなものに対して，(2.1), (2.2) より

$0=\int_{\Sigma}(r+\mathrm{rot}\,w)\cdot n\,d\sigma=\int_{\Sigma}r\cdot n\,d\sigma=r$の$v_i$成分

したがって，$r=0$がわかる．$N=3$の場合に定理1が証明された．$N=2$の場合も同様にして証明される．

補題1 （[1]，38－41ページ） 境界SはC^2級とする．任意の$\beta\in H^{1/2}(S)^N$，$\beta\cdot n|_S=0$，に対して$d\in(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))^M$で

$$\mathrm{rot}\,d|_S=\beta$$

をみたすものが存在する．

補題2 境界SはC^3級とする．任意の$v\in V\cap H^2(\Omega)^N$に対して，$\psi\in(H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega))^M$で

$$v-\mathrm{rot}\,\psi\in V\cap H_0^2(\Omega)^N$$

をみたすものが存在する．

証明 $v\in V\cap H^2(\Omega)^N$とする．$\partial v/\partial n|_S\in H^{1/2}(S)^N$かつ$\partial v/\partial n\cdot n|_S=0$である．後者は$v|_S=0$と$\mathrm{div}\,v=0$からわかる．補題1により$d\in(H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))^M$が存在して，$\mathrm{rot}\,d|_S=\partial v/\partial n|_S$をみたす．さて，$\psi\in(H^3(\Omega))^M$で

$$\psi|_S=\frac{\partial\psi}{\partial n}\Big|_S=0\quad\text{かつ}\quad\frac{\partial^2\psi}{\partial n^2}\Big|_S=\frac{\partial d}{\partial n}\Big|_S$$

をみたすものをとれば，ψ は

$$\frac{\partial}{\partial n}\operatorname{rot}\psi\Big|_S = \frac{\partial v}{\partial n}\Big|_S$$

をみたすことが容易に示される。証明終り．

定理２ 境界 S は C^4 級であるとする．このとき

$$V\cap(H^2(\Omega))^N = R \oplus \operatorname{rot}(H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega))^M \ (\text{直和})$$

がなりたつ．

証明 補題２により，任意の $v\in V\cap H^2(\Omega)^N$ に対して $\psi\in(H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega))^M$ で

$$v-\operatorname{rot}\psi \in V\cap H_0^2(\Omega)^N$$

をみたすものが存在する。このとき定理１により，$r\in R$ と $\varphi\in(H_0^3(\Omega))^M$ が存在して

$$v-\operatorname{rot}\psi = r+\operatorname{rot}\varphi.$$

$\varphi+\psi\in(H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega))^M$ であるから，定理が証明された．

3 関数空間 V の近似

関数空間 $(H^m(\Omega))^N$ （m は非負整数）の内積とノルムを次のようにとる：

$$(v,w)_{m,N} = \sum_{|\alpha|\le m}\int_\Omega \frac{\partial^\alpha v}{\partial x^\alpha}\cdot\frac{\partial^\alpha w}{\partial x^\alpha}\,dx,\quad \|v\|_{m,N} = \sqrt{(v,v)_{m,N}}.$$

さて，直積空間

$$X = R\times(H_0^2(\Omega)\cap H^3(\Omega))^M$$

の各元 (r, ψ)，$r \in R$，$\psi \in (H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega))^M$，のノルムを

(3.1) $\quad \|(r, \psi)\| = \|r\|_{2,N} + \|\psi\|_{3,M}$

により定義する．X から $\nabla \cap (H^2(\Omega))^M$ の上への連続な線形作用素 K を

$$K(r, \psi) = r + \mathrm{rot}\,\psi$$

により定義する．ある定数 $C(N) > 0$ が存在して

(3.2) $\quad \|K(r, \psi)\|_{2,N} = \|r + \mathrm{rot}\,\psi\|_{2,N}$

$$= \|r\|_{2,N} + \|\mathrm{rot}\,\psi\|_{2,N} \leqq C(N)\|(r, \psi)\|.$$

$\overline{K}$ を商空間 $X/\ker K$ から $\nabla \cap (H^2(\Omega))^N$ の上への，K から導入された写像とする：

$$\overline{K}\,\overline{x} = Ky \quad (y \in \overline{x} = x + \ker K).$$

各 $\overline{x} \in X/\ker K$ のノルムは

(3.3) $\quad \|\overline{x}\| = \inf_{y \in \overline{x}} \|y\|$

により定義される．(3.2) と (3.3) から

$$\|\overline{K}\,\overline{x}\|_{2,N} \leqq C(N)\|\overline{x}\|.$$

$\overline{K}$ はヒルベルト空間 $X/\ker K$ からヒルベルト空間 $\nabla \cap (H^2(\Omega))^N$ の上への連続な線形写像であり，しかも1対1である．したがって $\overline{K}$ は逆写像 $\overline{K}^{-1}$ をもち，$\overline{K}^{-1}$ は全空間 $\nabla \cap (H^2(\Omega))^N$ で定義された閉作用素であるから，閉グラフ定理により $\overline{K}^{-1}$ は連続である．その作用素ノルムを $\|\overline{K}^{-1}\|$ とかけば

(3.4)　$\|\overline{K}^{-1}v\| \leqq \|\overline{K}^{-1}\|\cdot\|v\|_{2,N}$　$(\forall v \in V \cap (H^2(\Omega))^N)$.

ところで(3.3)から

$$\|\overline{K}^{-1}v\| = \inf\{\|(r,\psi)\|;\ K(r,\psi) = v\}.$$

したがって(3.1)と(3,4)から，任意の $v \in V \cap (H^2(\Omega))^N$ に対して

(3.5)　$\inf_{v=r+\mathrm{rot}\,\psi}(\|r\|_{2,N}+\|\psi\|_{3,M}) \leqq \|\overline{K}^{-1}\|\cdot\|v\|_{2,N}$

がなりたつ．

さて，$(H_0^2(\Omega))^M$ に対する有限要素空間 E^h, $h>0$, が与えられているとする．すなわち E^h は $(H_0^2(\Omega))^M$ の有限次元部分空間であり，$(H_0^2(\Omega))^M$ から E^h の上への連続な線形写像 π^h があって，次の条件をみたすとする：$0 \leqq k < m \leqq 3$ のとき，正定数 C が存在して，各 $\psi \in (H_0^2(\Omega) \cap H^m(\Omega))^M$ に対して

(3.6)　$\|\pi^h\psi - \psi\|_{k,M} \leqq C\,h^{m-k}\|\psi\|_{m,M}$　$(h>0)$

および各 $\psi \in (H_0^2(\Omega))^M$ に対して

$$\lim_{h\downarrow 0}\|\pi^h\psi - \psi\|_{2,M} = 0$$

がなりたつ．

このとき各 $h>0$ に対して，次のように S^h を定義する：

$$S^h = R \oplus \mathrm{rot}\,E^h \quad (\text{直和}).$$

V から S^h の上への，内積 $[\ ,\ ]$ に関する直交射影を P_V^h とかく．また，$(L^2(\Omega))^N$ から S^h の上への，内積 $(\ ,\ )_{0,N}$ に

関する直交射影を P_0^h とかく．このとき次の定理がなりたつ．

定理３　境界 S は C^4 級であるとする．ある正定数 C が存在して，すべての $v \in V \cap H^2(\Omega)^N$ に対して

(3.7)　$\|P_V^h v - v\|_V \leqq C h \|v\|_{2,N}$　$(h > 0)$

(3.8)　$\|P_0^h v - v\|_{0,N} \leqq C h^2 \|v\|_{2,N}$　$(h > 0)$

がなりたつ．また，S が C^3 級であるとき，正定数 C が存在して，すべての $v \in V$ に対して

(3.9)　$\|P_0^h v - v\|_{0,N} \leqq C h \|v\|_V$　$(h > 0)$

がなりたつ．

証明　(3.7) の証明．定理１により，$v \in V \cap H^2(\Omega)^N$ は

$$v = r + \mathrm{rot}\,\psi, \quad r \in R,\ \psi \in (H_0^2(\Omega) \cap H^3(\Omega))^M$$

と表わされる．したがって

$$\begin{aligned}\|P_V^h v - v\|_V &= \inf\{\|(r' - r) + \mathrm{rot}(\psi' - \psi)\|_V ;\ r' \in R,\ \psi' \in E^h\} \\ &\leqq \|\mathrm{rot}\,(\pi^h \psi - \psi)\|_V \\ &\leqq C(N)\,\|\pi^h \psi - \psi\|_{2,M}.\end{aligned}$$

したがって (3.6) と (3.5) により

$$\begin{aligned}\|P_V^h v - v\|_V &\leqq C \cdot C(N) \cdot h \cdot \inf_{v = r + \mathrm{rot}\,\psi} \|\psi\|_{3,M} \\ &\leqq C \cdot C(N) \cdot \|K^{-1}\| \cdot h \cdot \|v\|_{2,N}.\end{aligned}$$

(3.7) が示された．同様にして，(3.8) と (3.9) を示すことができる．しかし (3.9) の証明には，(3.5) の代り

に次の（3.10）を用いる．ある正定数 C が存在して，すべての $v \in V$ に対して

(3.10) $\quad \inf_{v=r+\mathrm{rot}\,\psi} (\|r\|_V + \|\psi\|_{2,M}) \leqq C\|v\|_V$

がなりたつ．

次の定理は，近似解の誤差評価の際に基本的である．

定理 4　境界 S が C^3 級ならば，ある正定数 C が存在して，すべての $v \in V$ に対して

(3.11) $\quad \|P_V^h v - v\|_{0,N} \leqq C h \|v\|_V \quad (h>0)$

がなりたつ．また，S が C^4 級ならば，すべての $v \in V \cap (H^2(\Omega))^N$ に対して

(3.12) $\quad \|P_V^h v - v\|_{0,N} \leqq C h^2 \|v\|_{2,N} \quad (h>0)$

がなりたつ．

証明　まず次のことに注意する．任意の $g \in (L^2(\Omega))^N$ に対して，$w \in V \cap (H^2(\Omega))^N$ で

(3.13) $\quad [w, u] = (g, u)_{0,N} \quad (\forall u \in V)$

をみたすものが存在し

(3.14) $\quad \|w\|_{2,N} \leqq C' \|g\|_{0,N}$

がなりたつ．ここで C' は g，w によらない正定数である．例えば，[1]，102ページ，定理 3 または [2]，33ページ，定理 2.4 をみよ．

さて，$v \in V$ とする．$[P_V^h w, P_V^h v - v] = 0$ と（3.13）

から

$$(g, P_V^h v - v)_{0,N} = [w - P_V^h w, P_V^h v - v].$$

したがって

(3.15) $|(g, P_V^h v - v)_{0,N}| \leqq \|w - P_V^h w\|_V \cdot \|P_V^h v - v\|_V$

がなりたつ。一方，w に対して (3.7) を適用して，(3.14) を用いれば

$$\|w - P_V^h w\|_V \leqq Ch\|g\|_{0,N}.$$

したがって (3.15) から容易に

$$\|P_V^h v - v\|_{0,N} \leqq Ch\|P_V^h v - v\|_V$$

が得られるが，これから，(3.7) と

$$\|P_V^h v - v\|_V \leqq \|v\|_V \quad (\forall v \in V)$$

とを考慮にいれれば，(3.11) が得られる．(3.12) も同様にして，(3.8) を適用することにより得られる．証明終り．

4. 近似解と誤差評価

第1節の (1.4) で与えられる真の解 u に対して，S^h における近似解 u^h は

$$u^h \in S^h, \quad \nu[u^h, v^h] = \langle f, v^h \rangle \quad (\forall v^h \in S^h)$$

で与えられる．容易に $u^h = P_V^h u$ であることがわかる．

さて，$f \in (H^{-1}(\Omega))^N$ のとき，真の解 u が存在して V に属する．したがって，境界 S が C^3 級ならば，定理4により

近似解 u^h に対する次のような誤差評価がなりたつ：

$$\|u^h - u\|_{0,N} \leqq C h \|u\|_V \quad (h > 0).$$

さらに，境界 S が C^2 級で，$f \in (L^2(\Omega))^N$ ならば，真の解 u は $(H^2(\Omega))^N$ に属する（[1]，102ページ定理3 または [2]，33ページ定理2.4）．したがって境界 S が C^4 級ならば，$f \in (L^2(\Omega))^N$ のとき，近似解 u^h に対する次のような誤差評価がなりたつことが定理4と定理3からわかる：

$$\|u^h - u\|_{0,N} \leqq C h^2 \|u\|_{2,N} \quad (h > 0)$$

$$\|u^h - u\|_V \leqq C h \|u\|_{2,N} \quad (h > 0).$$

文献

1. Ладыженская, О. А., Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, Издание второе, Наука, 1970.
2. Temam, R., On the theory and numerical analysis of the Navier–Stokes equations, Lecture note, Université Paris XI, 1973.