数理解析研究所講究録
第244巻 1975年 147-176

非線形波動論における摂動法について

京大　数理研　　　川原琢治

1. はじめに

非線形波動の記述に関連する特異摂動法をいくつか取りあげて概観する。　それらの中、すでに良く知られていると考えられるものについては簡単な例を用いて摂動展開の方針を復習するにとどめ、Whithamの方法と derivative expansion の方法とに着目し、両者の関係を論ずる。

さて、パラメター（あるいは座標）に関する‘すなおな展開’、たとえば

$$f(t;\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n(\epsilon) f_n(t),$$

を考えよう。　ただし、$\delta_n(\epsilon)$ は $\epsilon \longrightarrow 0$ のとき $\delta_n(\epsilon) = O[\delta_{n-1}(\epsilon)]$ となるような漸近列とする。

このとき、

$$f(t;\epsilon) = \sum_{n=0}^{N} \delta_n(\epsilon) f_n(t) + R_{N+1}(t;\epsilon),$$

$$R_{N+1}(t;\epsilon) = O[\delta_{N+1}(\epsilon)],$$

がすべての t に対して一様に成立するとき、この展開は uniformly valid であり'regular perturbation'と呼ばれる。これに対し、独立変数のある値や領域においてすなおな展開が破綻し、uniformly valid でなくなる場合には'singular perturbation'と呼ばれる。

singular perturbation の例には次のようなものがある。

i) 独立変数の大きな値に対してすなおな展開が nonuniformity を示す。すなわち、$t \to \infty$ で $f_n(t)/f_{n-1}(t) \to \infty$ となり、いわゆる secular term（永年項）を生じる場合（secular perturbation の問題）である。たとえば、非線形振動方程式 $\ddot{f} + \omega_0^2 f = \epsilon F(f, \dot{f})$ などでよく起る。

ii) 方程式の最高階微係数に微小パラメターがかかっている場合で、これを singular perturbation の問題と呼ぶこともある。たとえば、$\epsilon \ddot{f} + \dot{f} + f = 0$ はその例である。このような場合には、展開が初期層あるいは境界層で nonuniform となり、初期・境界条件のすべてを満すことはできなくなる。

iii) 偏微分方程式の型の変化

たとえば、$\epsilon u_{xx} + u_{yy} - u_y = 0$.

iv) 特異性の出現。 厳密解には存在しない特異性が摂動解に現われ、近似を進めるに従って特異性の程度が深刻になる。

以上は *nonuniform expansion* を与える代表例にすぎない。 実際の問題においては、これらが同時に複雑な形で起ることがあり得る。

2. 種々の特異摂動法

通常の摂動展開が *nonuniform* となる場合に *uniformly valid* な摂動展開を構成する手法のいくつかを次に列挙する。 以下にあげる方法のうち、あるものは同じ手法の異なる表現にすぎなかったり、いくつかの手法の組み合せになっている場合もあるので、分類は便宜的なものである。

(1) *matched asymptotic expansion* 法

従属変数が急激な変化を示す領域に対しては拡大したスケールによる '*inner expansion*' を、他の領域に対してはもとのスケールによる '*outer expansion*' を求め、両者を *matching* により接続し、全領域で成立する漸近表示を構成する方法。 境界層の方法、ＷＫＢ法など。

(2) *strained coordinate* の方法

独立変数を近似恒等変換(*near identity transformation*)によって拡張し、その自由度を利用して *uniformly valid*

な近似を得る。 strained parameter の方法、strained coordinateの方法、 PLK 法などがある。

PLK(Poincaré-Lighthill-Kuo)法については、4節で簡単に述べる。

(3) 平均法

短い周期の項と長い周期の項の分離(短い周期に関する平均により長い周期の変化を取り出す)により、長時間で成立する近似を得る。 5節の KBM(Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky)法、7節の Whithamの方法は平均法に属す。

(4) multiple scale の方法

独立変数をスケールの異なるいくつかの変数に拡張し、その自由度によって摂動の破綻をおさえ、uniformly valid な近似を得る。 Taniuti 他による reductive perturbation法もこの方法に属すると考えられるが、これについては、最近の総合報告(Prog. theor. Phys. Suppl. 55, 1974)に譲り本稿では触れない。 6、8、9節における derivative expansion法は、multiple scale法の代表例である。

以上、いずれの方法においても、現象に応じたスケールの違いを考慮して、uniformly valid な近似を得るとい

う方針においては共通している。(1)は流体力学でよく用いられる方法である。非線形波動の問題(主としてsecular perturbationの問題)においては、(3)、(4)の方法がよく用いられている。本稿では(1)には触れず、(2)〜(4)の概略を記す。

3. secular perturbationの例

Duffing 方程式: $\ddot{f} + f + \epsilon f^3 = 0$, (3.1)

(・は時間微分)

を考え、パラメター ϵ による巾級数展開

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f_n(t), \tag{3.2}$$

を行なうと、ϵ の各オーダーより

$$\left.\begin{aligned} \ddot{f}_0 + f_0 &= 0, \\ \ddot{f}_1 + f_1 &= -f_0^3, \\ \cdots &, \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

を得る。

(3.3)第1式の一般解は

$$f_0 = a\cos(t+\varphi), \tag{3.4}$$

と表わせる。これを(3.3)第2式右辺に代入すると

$$\ddot{f}_1 + f_1 = -\frac{a^3}{4}\left\{\cos 3(t+\varphi) + 3\cos(t+\varphi)\right\}. \tag{3.5}$$

(3.5)式の特解は

$$f_1 = -\frac{3a^3}{8} t \sin(t+\varphi) + \frac{a^3}{32}\{\cos 3(t+\varphi) - \cos(t+\varphi)\}, \qquad (3.6)$$

となり、求める解は

$$f = a\cos(t+\varphi) + \epsilon a^3 \left[-\frac{3}{8} t \sin(t+\varphi) + \frac{1}{32}\{\cos 3(t+\varphi) - \cos(t+\varphi)\}\right] + O(\epsilon^2) . \qquad (3.7)$$

(3.7) 式の $t\sin(t+\varphi)$ の項が secular term であり、$t \to \infty$ のとき $f_1 / f_0 \to \infty$ となる。 $t \to \infty$ でなくても $t = O(\epsilon^{-1})$ になると (3.7) 式の第2項は第1項と同じオーダーとなり ϵ 展開は破綻する。

ここで、secular term と独立変数（座標）の選び方の関係を見ておこう。

$$f(t;\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f_n[\zeta(t;\epsilon)], \qquad (3.8)$$

のように ϵ に依存する座標系 $\zeta(t;\epsilon)$ による展開を採用し

$$\zeta = \left(1 + \frac{3}{8}\epsilon a^2\right) t, \qquad (3.9)$$

をとると、(3.7) の解は

$$f = a\cos\zeta + \frac{1}{32}\epsilon a^3(\cos 3\zeta - \cos\zeta) + O(\epsilon^2), \quad (3.10)$$

となり、secularity を消すことができる。 uniformly valid な展開を与える (3.9) のような座標は optimal coordinate と呼ばれる。 $\zeta = t$ の特別な場合には展開は

nonuniform となる。

4. strained coordinate の方法

展開
$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f_n(x_1, \cdots, x_m), \tag{4.1}$$
において、*nonuniformity* が x_1 に関して現われるとき、独立変数 x_1 を近次恒等変換により拡張して
$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f_n(s, x_2, \cdots, x_m), \tag{4.2}$$
$$x_1 = s + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \xi_n(s, x_2, \cdots, x_m), \tag{4.3}$$
のように展開し、*nonuniformity* をさける方法は PLK 法と呼ばれている。(4.3)式の ξ_n は *strained function* と呼ばれ、すべての x_1 に対して $f_n / f_{n-1} < \infty$ となるように選ばれる。この方法は、現象に固有のパラメター(たとえば、周波数、波数、波速など)と従属変数とを同時に展開し、展開が *uniformly valid* となるようにパラメターの摂動を決定する *strained parameter* の方法の一般化になっている。*strained parameter* の方法は *Duffing* 方程式
$$\ddot{f} + f + \epsilon f^3 = 0, \tag{4.4}$$
についていえば、次のようになる。$\epsilon = 0$ のときは周波数 $\omega_0 = 1$ であるが、$\epsilon \neq 0$ では非線形性により周波数が変

化すると考え

$$\left.\begin{aligned} f &= f_0(\tau) + \epsilon f_1(\tau) + \cdots , \\ \omega &= 1 + \epsilon\omega_1 + \epsilon^2\omega_2 + \cdots , \\ \tau &= \omega t , \end{aligned}\right\} \quad (4.5)$$

のような展開によって secularity の発生をさけるように ω の摂動を決定する。

PLK法の概略を Duffing 方程式(4.4)を例にして示す。(4.2), (4.3) において、1変数とし $x_1 = t$, $s = \tau$ とおき $\xi_n = \sigma_n \tau$ と仮定すれば

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f_n(\tau) , \quad (4.6)$$

$$t = \tau(1 + \epsilon\sigma_1 + \epsilon^2\sigma_2 + \cdots) = \omega^{-1}\tau . \quad (4.7)$$

(4.7)を(4.4)に用いると

$$(1 + \epsilon\sigma_1 + \epsilon^2\sigma_2 + \cdots)^{-2}\frac{d^2 f}{d\tau^2} + f + \epsilon f^3 = 0 . \quad (4.8)$$

さらに、(4.6)の展開により

$$\frac{d^2 f_0}{d\tau^2} + f_0 = 0 , \quad (4.9)$$

$$\frac{d^2 f_1}{d\tau^2} + f_1 = -f_0^3 - 2\sigma_1 f_0 , \quad (4.10)$$

$$\cdots\cdots$$

(4.9)式の解は

$$f_0 = a\cos(\tau + \varphi) . \quad (4.11)$$

(4.11)を(4.10)に代入すると

$$\frac{d^2f_1}{d\tau^2}+f_1=-\frac{1}{4}a^3\cos 3(\tau+\varphi)$$
$$-\left(\frac{3}{4}a^2+2\sigma_1\right)a\cos(\tau+\varphi). \qquad (4.12)$$

第2項の存在のもとに(4.12)を解けば、f_1 に secular term を生じる。 これをさけるためには $\sigma_1=-\frac{3}{8}a^2$ ととればよく、このとき

$$f_1=\frac{1}{32}a^3\cos 3(\tau+\varphi), \qquad (4.13)$$

を得る。 同様にして、次の近似で $\sigma_2=\frac{51}{256}a^4$ を得る。
以上より、$O(\epsilon)$ まで secular free な解は

$$f=a\cos(\omega t+\varphi)+\frac{1}{32}\epsilon a^3\cos 3(\omega t+\varphi)$$
$$+O(\epsilon^2), \qquad (4.14)$$
$$\omega=(1+\epsilon\sigma_1+\epsilon^2\sigma_2+\cdots)^{-1}$$
$$=1+\frac{3}{8}\epsilon a^2-\frac{15}{256}\epsilon^2a^4+\cdots, \qquad (4.15)$$

で与えられる。

5. 平均法

平均法の方針は、速く変化する項とゆっくり変化する項とを平均操作によって分離することにある。 非線形振動論における Van der Pol の方法、Krylov-Bogoliubov の方法などがこの方法の始りであると考えられる。

$$\ddot{f} + f = \epsilon F(f, \dot{f})$$

の形の振動方程式は $\epsilon = 0$ のとき $f = a\cos(t+\varphi)$、(a, φ は一定) が解であるが、$\epsilon \neq 0$ のときには a, φ が一定ではなく、$da/dt = O(\epsilon)$、$d\varphi/dt = O(\epsilon)$ と考え、f に対する式を da/dt, $d\varphi/dt$ に対する式に書き換える。a, φ がゆっくり変化する量であって、振動の1周期 $T = 2\pi/1$ の間では殆んど変化しないとして rapidly rotating phase t に関する平均をとることにより a, φ を決め、解を $f = a\cos(t+\varphi)$ の形で近似する。

このような方法の一般化の一つとしてKBM (Krylov-Bogoliubov-Mitropolsky) 法がある。Duffing方程式にKBM法を適用してみよう。

fとして

$$f = a\cos\theta + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n f_n(a, \theta), \tag{5.1}$$

を仮定する。ここに、f_n は周期 2π をもつ $\theta (= t + \varphi)$ の関数とする。a, φ がゆっくり変化することから、

$$\left.\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n A_n(a), \\ \frac{d\theta}{dt} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n \Theta_n(a). \end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

微分オペレーター $\quad \dfrac{d}{dt} = \dfrac{da}{dt}\dfrac{\partial}{\partial a} + \dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{\partial}{\partial \theta}$

を考慮して

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d^2a}{dt^2} &= \frac{da}{dt}\frac{d}{da}\left(\frac{da}{dt}\right) = \frac{da}{dt}\sum_{n=1}^{\infty}\epsilon^n\frac{dA_n}{da} \\
&= \epsilon^2 A_1\frac{dA_1}{da} + O(\epsilon^3), \\
\frac{d^2\theta}{dt^2} &= \epsilon^2 A_1\frac{d\Theta_1}{da} + O(\epsilon^3).
\end{aligned}\right\} \quad (5.3)$$

以上を Duffing 方程式（4.4）に代入し

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial\theta^2} + f_1 = \left(2\Theta_1 a - \frac{3}{4}a^3\right)\cos\theta + 2A_1\sin\theta - \frac{a^3}{4}\cos 3\theta, \quad (5.4)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f_2}{\partial\theta^2} + f_2 = &\left\{(2\Theta_2 + \Theta_1^2)a - A_1\frac{dA_1}{da}\right\}\cos\theta \\
&+ \left\{2(A_2 + A_1\Theta_1) + aA_1\frac{d\Theta_1}{da}\right\}\sin\theta \\
&- 3f_1 a^2\cos^2\theta - 2\Theta_1\frac{\partial^2 f_1}{\partial\theta^2} - 2A_1\frac{\partial^2 f_1}{\partial a\partial\theta}. \quad (5.5)
\end{aligned}$$

f_1 が周期的であるためには（5.4）から

$$\left.\begin{aligned}
A_1 &= 0, \qquad \Theta_1 = \frac{3}{8}a^2, \\
f_1 &= \frac{1}{32}a^3\cos 3\theta.
\end{aligned}\right\} \quad (5.6)$$

同様に、f_2 が周期的であることから

$$\left.\begin{aligned}
A_2 &= 0, \qquad \Theta_2 = -\frac{15}{256}a^4, \\
f_2 &= -\frac{1}{1024}a^5(21\cos 3\theta - \cos 5\theta).
\end{aligned}\right\} \quad (5.7)$$

従って

$$\begin{aligned}
f = &\ a\cos\theta + \frac{1}{32}\epsilon a^3\cos 3\theta \\
&- \frac{1}{1024}\epsilon^2 a^5(21\cos 3\theta - \cos 5\theta) + O(\epsilon^3). \quad (5.8)
\end{aligned}$$

(5.2)式にもどって

$$\frac{da}{dt} = 0 \quad \text{より} \quad a = 一定 \tag{5.9}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 + \frac{3}{8}\epsilon a^2 - \frac{15}{256}\epsilon^2 a^4 + O(\epsilon^3) \quad \text{より}$$

$$\theta = (1 + \frac{3}{8}\epsilon a^2 - \frac{15}{256}\epsilon^2 a^4)t + \theta_0 + O(\epsilon^3). \tag{5.10}$$

これは前節のPLK法による結果(4.14),(4.15)と一致する。

KBM法の偏微分方程式系への拡張は Montgomery と Tidman (1964)、Tidman と Stainer (1965), Kakutani と Sugimoto (1974)等により議論された。拡張は、$\epsilon = 0$ の解として $f = a\cos\theta$, $(\theta = k_0 x - \omega_0 t + \varphi)$ をとり、(5.1)と同様に $f = a\cos\theta + \sum_{n=1} \epsilon^n f_n(a, \theta)$ を仮定し、(5.2)の代りに

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial a}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n A_n(a), \\
\frac{\partial a}{\partial x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n B_n(a), \\
\frac{\partial \theta}{\partial t} &= -\omega_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n C_n(a), \\
\frac{\partial \theta}{\partial x} &= k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n D_n(a),
\end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

を用いることによってなされる。

平均法には、解析力学において正準変数を用いるハミルト

ニアンによる記述がある。正準変数を用いずLagrangianの平均から変分によってEuler-Lagrangian方程式を導き、ゆっくりした変化を記述する方法がWhitham(1965, 1967)により開発された。Whithamの方法については7節で述べる。

6. multiple scaleの方法

空間・時間変数に速いスケールのものと遅いスケールのものとを導入することによって永年項発生の困難を取り除く。スケール導入の仕方にはいくつかのバリエーションが可能であるが、最も形式的に多くのスケールを導入する方法としてderivative expansion法をあげておく。この方法では、独立変数をスケールの異なる多くの変数に拡張し、従属変数はそれらの関数であると考えて漸近展開する。このことは、微分オペレータを多変数で展開することと同等であるためderivative expansion法と呼ばれる。この方法は、Sturrock(1957, 1963)に始まり、Frieman(1963)、Sandri(1965, 1967), Nayfeh(1965, 1968)等により発展させられた。

Duffing方程式に対してderivative expansion法を適用してみよう。

独立変数 t をスケールの異なる多数の変数

$$t_0 = t, \quad t_1 = \epsilon t, \quad t_2 = \epsilon^2 t, \cdots, \tag{6.1}$$

に拡張する。 次に、$f(t;\epsilon)$ を

$$f(t;\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f_n(t_0, t_1, t_2, \cdots), \tag{6.2}$$

の形に漸近展開する。

(6.2) のように多変数に拡張した結果、微分オペレータは

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t_0} + \epsilon\frac{\partial}{\partial t_1} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots, \tag{6.3}$$

と考えればよい。

(6.2), (6.3) を Duffing 方程式 (4.4) に代入すると

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 f_0}{\partial t_0^2} + f_0 = 0, \\
&\frac{\partial^2 f_1}{\partial t_0^2} + f_1 = -2\frac{\partial^2 f_0}{\partial t_0 \partial t_1} - f_0^3, \\
&\frac{\partial^2 f_2}{\partial t_0^2} + f_2 = -2\frac{\partial^2 f_1}{\partial t_0 \partial t_1} - \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} + 2\frac{\partial^2}{\partial t_0 \partial t_2}\right) f_0 \\
&\qquad\qquad - 3f_0^2 f_1 .
\end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

(6.4) 第1式より

$$f_0 = a\cos(t_0 + \varphi), \tag{6.5}$$

ただし、a, φ は $t_1, t_2, \cdots$ の関数と考える。

(6.5) を (6.4) 第2式に代入すると

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t_0^2} + f_1 = 2\frac{\partial a}{\partial t_1}\sin(t_0 + \varphi) + \left(2a\frac{\partial \varphi}{\partial t_1} - \frac{3}{4}a^3\right)\cos(t_0 + \varphi)$$

$$-\frac{a^3}{4}\cos 3(t_0+\varphi)\ . \tag{6.6}$$

f_1 が secular free で求まるためには

$$\frac{\partial a}{\partial t_1}=0\ ,\quad \frac{\partial \varphi}{\partial t_1}=\frac{3}{8}a^2\ . \tag{6.7}$$

(6.7) より、a は t_1 によらない(一般には $t_2, t_3, \cdots$ の関数である)ことが言える。 また、(6.7) 才2式より

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{3}{8}a^2 t_1 + \varphi_0(t_2, t_3, \cdots)\\ &= \frac{3}{8}a^2 \epsilon t + \varphi_0\ .\end{aligned} \tag{6.8}$$

以下同様に近似を進めることができる。 いま、$O(\epsilon)$ までの変化を考えるとすると、(6.5), (6.6), (6.8) より

$$\left.\begin{aligned} f &= a\cos\theta + \frac{1}{32}\epsilon a^3\cos 3\theta + O(\epsilon^2)\ ,\\ \theta &= \left(1+\frac{3}{8}\epsilon a^2\right)t + \varphi_0\ ,\end{aligned}\right\} \tag{6.9}$$

となり、他の方法で得られた結果と一致する。

derivative expansion 法は 8 節で Whitham の方法と対比して述べる。

7. Whitham の方法

基礎方程式系に対応する Lagrangian 密度 L を求め, L の変分原理に周期解を代入し、1 周期 (rapidly rotating phase) にわたって平均し、平均された Lagrangian 密度

$\mathcal{L} = \bar{L}$ から、振幅、波数、周波数等のゆっくりした変動を記述する *Euler* 方程式を導くのが *Whitham* の方法である。 例として、次の方程式を考える。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + u = \epsilon u^3 . \qquad (7.1)$$

(7.1) に対する *Lagrangian* 密度は

$$L = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2 - \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{4}\epsilon u^4 , \qquad (7.2)$$

で与えられる。

変分原理 $\quad \delta \iint L\left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u\right) dx\, dt = 0 , \qquad (7.3)$

で u に関する変分から導かれる *Euler* 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)}\right) - \frac{\partial L}{\partial u} = 0 , \qquad (7.4)$$

となり、これは(7.2) を用いるとすぐわかるように基礎方程式 (7.1)を表わす。

(7.1) で $\epsilon = 0$ の場合の進行波解は

$$u = a \cos(\theta + \beta) , \qquad \theta = kx - \omega t , \qquad (7.5)$$

で与えられる。 ただし、k, ω は線形分散関係式

$$\omega^2 = k^4 - k^2 + 1 , \qquad (7.6)$$

をみたす。〔 (7.6) は $k^2 = 1/n$ のとき、n 倍波の位相速度が基本波の位相速度と一致し、高調波共鳴が起るが、この

場合はここでは考えない。]

(7.5) 第2式より

$$k = \frac{\partial \theta}{\partial x}, \qquad \omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}. \tag{7.7}$$

(7.7) の連続微分可能性より、

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \tag{7.8}$$

を得る。 これは、波の個数の保存を表わす。

さて、uとして局所平面波を第1近似とする展開

$$u = a\cos(\theta+\beta) + \epsilon\sum_{n=2}^{\infty} a_n \cos(n\theta+\beta_n) + O(\epsilon^2), \tag{7.9}$$

を仮定し、a, k, ω, β, a_n, β_n が x, t の slowly varying function とする。 $\partial a/\partial t$, $\partial a/\partial x$, $\partial\omega/\partial t$, $\partial\omega/\partial x$ などが $O(\epsilon)$ であるとすれば

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a\omega\sin(\theta+\beta) - a\frac{\partial\beta}{\partial t}\sin(\theta+\beta) + \frac{\partial a}{\partial t}\cos(\theta+\beta) + \epsilon\omega\sum_{n=2} n a_n \sin(n\theta+\beta_n) + O(\epsilon^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -ak\sin(\theta+\beta) - a\frac{\partial\beta}{\partial x}\sin(\theta+\beta) + \frac{\partial a}{\partial x}\cos(\theta+\beta) - \epsilon k\sum_{n=2} n a_n \sin(n\theta+\beta_n) + O(\epsilon^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \quad \cdots \quad . \tag{7.10}$$

(7.10) を (7.2) に代入すると L は θ, k, ω, a, β, a_n, β_n を通して x, t に依存する。 そのうち、θを通しての x, t への依存性は他のパラメターを通してのものよりずっと速い。 従って、θが $(0, 2\pi)$ 間を変化するとき、他の

パラメターは殆んど変化しないと考え、それらを一定として L を θ に関して $(0,\ 2\pi)$ で平均する。平均を $\overline{}$ で表わすと

$$\left.\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2} &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 d\theta = \frac{1}{2}a^2\omega^2 - a^2\omega\frac{\partial\beta}{\partial t} + O(\epsilon^2),\\
\overline{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2} &= \frac{1}{2}a^2k^2 + a^2k\frac{\partial\beta}{\partial x} + O(\epsilon^2),\\
\overline{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^2} &= \frac{1}{2}a^2k^4 + 2a^2k^3\frac{\partial\beta}{\partial x} + O(\epsilon^2),\\
\overline{u^2} &= \frac{1}{2}a^2 + O(\epsilon^2),\\
\overline{u^4} &= \frac{3}{8}a^4 + O(\epsilon^2).
\end{aligned}\right\} \quad (7.11)$$

従って

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = \overline{L} = &\frac{1}{4}(\omega^2 - k^4 + k^2 - 1)a^2\\
&-\frac{1}{2}\left\{\omega\frac{\partial\beta}{\partial t} + (2k^3 - k)\frac{\partial\beta}{\partial x}\right\}a^2 + \frac{3}{32}\epsilon a^4. \quad (7.12)
\end{aligned}$$

$\mathcal{L}$ は a と θ ($k,\ \omega$ を通して) の関数である。$a,\ \theta$ に関する変分から Euler 方程式を導く。

a に関する変分 $\quad \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial a} = 0 \quad \longrightarrow$

$$\underbrace{\frac{1}{2}(\omega^2 - k^4 + k^2 - 1)}_{O(1)} - \underbrace{\left\{\omega\frac{\partial\beta}{\partial t} + (2k^3 - k)\frac{\partial\beta}{\partial x}\right\} + \frac{3}{8}\epsilon a^2}_{O(\epsilon)} = 0, \quad (7.13)$$

を得る。θ に関する変分は

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}\right)}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)}\right) = 0, \quad (7.14)$$

であるが、 $\omega = -\partial\theta/\partial t$, $k = \partial\theta/\partial k$ を考慮すると

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k}\right) = 0. \qquad (7.15)$$

(7.12) より $\partial\mathcal{L}/\partial\omega$, $\partial\mathcal{L}/\partial k$ を求めて (7.15) に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega a^2) + \frac{\partial}{\partial x}\{(2k^3-k)a^2\} \qquad O(\epsilon)$$
$$\underbrace{+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\beta}{\partial t}a^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left\{(6k^2-1)\frac{\partial\beta}{\partial x}a^2\right\}}_{O(\epsilon^2)} = 0, \qquad (7.16)$$

を得る。

$$\frac{d\omega}{dk} = \frac{2k^3-k}{\omega} = v_g \quad (群速度)$$

であるから、(7.16)の $O(\epsilon)$ 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t}(\omega a^2) + \frac{\partial}{\partial x}(v_g \omega a^2) = 0, \qquad (7.17)$$

と書ける。 また、(7.8) 式で $\omega = \omega(k)$ とすれば

$$\frac{\partial k}{\partial t} + v_g \frac{\partial k}{\partial x} = 0. \qquad (7.18)$$

従って、 a, ω, k の空間・時間変化は $O(\epsilon)$ の近似で、(7.13)、(7.17), (7.18)式で記述される。 まとめて書くと

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial k}{\partial t} + v_g \frac{\partial k}{\partial x} = 0, \\
&\frac{\partial}{\partial t}(\omega a^2) + \frac{\partial}{\partial x}(v_g \omega a^2) = 0, \\
&\frac{\partial\beta}{\partial t} + v_g \frac{\partial\beta}{\partial x} = \frac{3}{8\omega}\epsilon a^2, \\
&\omega^2 = k^4 - k^2 + 1 .
\end{aligned}\right\} \qquad (7.19)$$

以上が Whitham の方法による最低次の近似である。(7.19)式は $O(\epsilon)$ までの近似を与えるが、高次近似へ進むには、k, ω, a, β 等の空間・時間変化のオーダーを陽に導入すると見通しがよくなる。 このような方向として、Luke (1966) あるいは Whitham (1970) は two timing による形式的な摂動展開 (multiple scale 展開) が低次近似で Whitham の結果 (7.19) と一致することを示した。より高い近似への修正は Davey (1972), Dysthe (1974) 等によって扱われている。

8. derivative expansion 法

微小パラメター ϵ によって、空間・時間スケール $x_n = \epsilon^n x$, $t_n = \epsilon^n t$ ($n = 0, 1, 2, \cdots$) を導入する。局所平面波を第1近似にとるとし、位相変数

$$\theta = k(x_1, t_1, \cdots) x_0 - \omega(x_1, t_1, \cdots) t_0, \tag{8.1}$$

を導入する。 すなわち、速いスケール x_0, t_0 に対しては、k, ω はほぼ一定とみなし、遅いスケール x_1, t_1, $\cdots$ の関数と考える。

一方、従属変数は θ, x_1, t_1, $\cdots$ の関数であると考えて

$$u(x, t; \epsilon) = \sum_{n=0} \epsilon^n u_n(\theta, x_1, t_1, x_2, t_2, \cdots), \tag{8.2}$$

のように展開する。独立変数の拡張に対応して、微分オペレータは

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= -\omega\frac{\partial}{\partial\theta} + \sum_{n=1}\epsilon^n\frac{\partial}{\partial t_n} \quad , \\ \frac{\partial}{\partial x} &= k\frac{\partial}{\partial\theta} + \sum_{n=1}\epsilon^n\frac{\partial}{\partial x_n} \quad , \end{aligned}\right\} \qquad (8.3)$$

と考える。微分オペレータの繰り返し演算においては、k, ω が $(x_1, t_1, ---)$ の関数であることを考慮すればよい。

微分オペレータの交換可能性 $\partial^2/\partial t\partial x = \partial^2/\partial x\partial t$ より

$$\frac{\partial k}{\partial t_1} + \frac{\partial\omega}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial k}{\partial t_2} + \frac{\partial\omega}{\partial x_2} = 0, \; ---, \qquad (8.4)$$

を得る。これは、各オーダーでの波の位数保存((7.8)式参照)を表わしている。

前節と同じ方程式(7.1)に(8.2),(8.3)を用いると

$$\left(\omega^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + k^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + k^4\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} + 1\right)u_0 = 0, \qquad (8.5)$$

$$\begin{aligned} &\left(\omega^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + k^2\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + k^4\frac{\partial^4}{\partial\theta^4} + 1\right)u_1 \\ &= \left\{\frac{\partial\omega}{\partial t_1}\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\omega\frac{\partial^2}{\partial t_1\partial\theta} - \left(\frac{\partial k}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial\theta} + 2k\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial\theta}\right)\right. \\ &\qquad \left. - \left(4k^3\frac{\partial^4}{\partial x_1\partial\theta^3} + 6k^2\frac{\partial k}{\partial x_1}\frac{\partial^3}{\partial\theta^3}\right)\right\}u_0 + u_0^3 \quad . \end{aligned} \qquad (8.6)$$

(8.5)の解は

$$u_0 = A(x_1, t_1, ---)\,e^{i\theta} + c.c. \quad , \qquad (8.7)$$

(A は複素振幅, c.c. は複素共役項を表わす)

ただし、 $\omega^2 = k^4 - k^2 + 1$. (8.8)

(8.7) を (8.6) に代入し、nonsecularity の条件 ($e^{i\theta}$ の係数 = 0、∵ (8.6) の右辺に $e^{i\theta}$ に比例する項があると u_1 に secular term が現れる) を求めると

$$i\left[2\omega\frac{\partial A}{\partial t_1} + 2(2k^3 - k)\frac{\partial A}{\partial x_1} + \left\{\frac{\partial \omega}{\partial t_1} + (6k^2 - 1)\frac{\partial k}{\partial x_1}\right\}A\right] + 3|A|^2 A = 0, \tag{8.9}$$

を得る。 ここで $A = \frac{1}{2} a e^{i\beta}$ とおくと (8.9) 式は

$$\frac{\partial}{\partial t_1}(\omega a^2) + \frac{\partial}{\partial x_1}(v_g \omega a^2) = 0, \tag{8.10}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t_1} + v_g \frac{\partial \beta}{\partial x_1} = \frac{3a^2}{8\omega}, \tag{8.11}$$

となる。 (8.4), (8.8) および (8.10), (8.11) は Whitham の方法による結果 (7.19) と一致する。

以上では、局所平面波を仮定したが、第1近似の平面波解 (8.7) の位相変数 $\theta = kx_0 - \omega t_0$ において k, ω が x_1 t_1, ・・・に依らない特別な場合には、(8.10)、(8.11) は

$$\frac{\partial a}{\partial t_1} + v_g \frac{\partial a}{\partial x_1} = 0, \tag{8.12}$$

$$\frac{\partial \beta}{\partial t_1} + v_g \frac{\partial \beta}{\partial x_1} = \frac{3a^2}{8\omega}, \tag{8.13}$$

となる。

このように、少くとも低次近似の範囲では Whitham の方

法による結果と一致する。 derivative expansion法によれば、高次近似に進むことは容易である。

9. 水の波への応用

derivative expansion 法を水面波の記述に応用した結果を以下に示す。 2次元・非回転・非粘性・非圧縮流体における表面張力・重力波を考える。 媒質に非一様性がある場合の例として、水深 h がゆっくり変化するとする。基礎方程式は

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = 0 \qquad -h \leqq y \leqq \eta(x,t),\\
&\frac{\partial\eta}{\partial t} - \frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x} = 0 \qquad y = \eta(x,t),\\
&\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2\right\} + g\eta\\
&\qquad - T\frac{\partial^2\eta}{\partial x^2}\left\{1 + \left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\right\}^{-\frac{3}{2}} = 0 \qquad y = \eta(x,t),\\
&\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} = 0 \qquad y = -h(x_1, t_1, \cdots).
\end{aligned}\right\} \quad (9.1)$$

(8.1) と同じ位相変数を導入し、(9.1) 式の ϕ および η を (8.2) の形に展開し、(8.3) を考慮すれば、 ϵ について各オーダーの方程式系を得る。 $O(\epsilon)$ の解として平面波解をとれば、それは線形分散関係

$$\omega^2 = (gk + Tk^3)\tanh kh, \qquad (9.2)$$

をみたす。　この問題では、水深 h がゆっくり変化するとしているので、(9.2)式は

$$\omega = \omega[k,\ h(x_1, t_1, \cdots)], \tag{9.3}$$

とみなせる。　(9.3)を x_1, t_1 に関して微分すると

$$\frac{\partial k}{\partial t_1} + v_g \frac{\partial k}{\partial x_1} = -\frac{d\omega}{dh}\frac{\partial h}{\partial x_1}, \tag{9.4}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t_1} + v_g \frac{\partial \omega}{\partial x_1} = \frac{d\omega}{dh}\frac{\partial h}{\partial t_1}. \tag{9.5}$$

(9.4), (9.5) 式は(8.4)式と異なり、媒質の非一様性のために群速度に関する特性線に沿って見たとき k, ω が右辺の量だけ変化することを示している。

以下では、h が $O(\epsilon)$ あるいは $O(\epsilon^2)$ のゆっくりした変化をする場合について結果だけを示す。

(i)　<u>$h(x_1, t_1)$ の場合</u>

$O(\epsilon^2)$ の nonsecularity 条件より

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + v_g \frac{\partial A}{\partial x_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_g}{\partial x_1} A$$
$$- \frac{h}{4\sigma}(1-\sigma^2)\left(\frac{\partial h}{\partial t_1} + \frac{2Tk^2\sigma}{\omega}\frac{\partial h}{\partial x_1}\right)A = 0, \tag{9.6}$$
$$(\ \sigma = \tanh kh\ )$$

$A = \frac{1}{2}ae^{i\beta}$ とおくと

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{E}{\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(v_g \frac{E}{\omega}\right) = 0,$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial\beta}{\partial t_1} + v_g\frac{\partial\beta}{\partial x_1} = 0 ,\\ &E = \frac{1}{2}\rho(g + Tk^2)a^2 . \end{aligned}\right\} \quad (9.7)$$

非一様媒質においては 'wave energy density' E ではなく、'wave action density' E/ω が群速度に関して保存量となることを (9.7) は表わしている。

(ii) $h(x_2, t_2)$ の場合

$O(\epsilon^2)$ の nonsecularity 条件より

$$\frac{\partial A}{\partial t_1} + v_g\frac{\partial A}{\partial x_1} = 0 , \quad (9.8)$$

ただし、v_g は x_2, t_2 に依存すると考える。

$O(\epsilon^3)$ の nonsecularity 条件は

$$i\left\{\frac{\partial A}{\partial t_2} + v_g\frac{\partial A}{\partial x_2} + \frac{1}{2}\frac{\partial v_g}{\partial x_2}A - \frac{h}{4\sigma}(1-\sigma^2)\left(\frac{\partial h}{\partial t_2} + \frac{2Tk^2\sigma}{\omega}\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)A\right\} + \frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}\frac{\partial^2 A}{\partial x_1^2} + \nu|A|^2A + \gamma A = 0 . \quad (9.9)$$

$A = \frac{1}{2}a e^{i\beta}$ とおいて書き換えると

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{E}{\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(v_g\frac{E}{\omega}\right) + \frac{dv_g}{dk}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{E}{\omega}\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right) = 0 ,\\ &\frac{\partial\beta}{\partial t_2} + v_g\frac{\partial\beta}{\partial x_2} - \frac{1}{2}\frac{dv_g}{dk}\left\{\frac{1}{\sqrt{E/\omega}}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\sqrt{\frac{E}{\omega}} - \left(\frac{\partial\beta}{\partial x_1}\right)^2\right\}\\ &\quad - \tilde{\nu}\frac{E}{\omega} - \gamma = 0 ,\\ &E = \frac{1}{2}\rho(g + Tk^2)a^2 . \end{aligned}\right\} \quad (9.10)$$

(9.9)式は nonlinear Schrödinger 方程式の非一様媒質への拡張形になっている。(9.10)からわかるように、wave action density E/ω の伝播は、分散によって影響を受け第3項が加わる。

同様な方法で、長波長における波動伝播を記述することができる。長波長の場合には、位相変数 θ は $kx_1-\omega t_1$ であり、k, ω は $x_2, t_2, \cdots$ に依存すると考える。従って微分オペレータを

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= -\epsilon\omega\frac{\partial}{\partial\theta} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial t_2} + \cdots, \\ \frac{\partial}{\partial x} &= \epsilon k\frac{\partial}{\partial\theta} + \epsilon^2\frac{\partial}{\partial x_2} + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{9.11}$$

として、あとは全く同様に近似を進めることができる。分散関係式(9.2)に対応して、第1近似解の consistency 条件は

$$\omega^2 = ghk^2, \tag{9.12}$$

となる。h が (x_2, t_2) あるいは (x_3, t_3) に依存する場合の結果を以下に示す。

(i) $h(x_2, t_2)$ の場合

$$\begin{gathered} \frac{\partial f}{\partial t_2} + \sqrt{gh}\frac{\partial f}{\partial x_2} + \frac{1}{4h}\left(\frac{\partial h}{\partial t_2} + \sqrt{gh}\frac{\partial h}{\partial x_2}\right)f = 0, \\ \left(f \equiv \frac{\partial\phi_1}{\partial\theta} = \frac{g}{\omega}\eta_2 \right) \end{gathered} \tag{9.13}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t_2}\left(\frac{E'}{\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\sqrt{gh}\,\frac{E'}{\omega}\right) = 0\,, \\ &\qquad E' = \frac{1}{2}\rho g \eta_2^2\,. \end{aligned}\right\} \tag{9.14}$$

(ii) $h(x_3, t_3)$ の場合

$$\frac{\partial f}{\partial t_2} + \sqrt{gh}\,\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0\,, \tag{9.15}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t_3} + \sqrt{gh}\,\frac{\partial f}{\partial x_3} + \frac{1}{4h}\left(\frac{\partial h}{\partial t_3} + \sqrt{gh}\,\frac{\partial h}{\partial x_3}\right) f + \frac{k^4 h}{2\omega}\left(\frac{gh^2}{3} - T\right)\frac{\partial^3 f}{\partial \theta^3} + \frac{3}{2}k^2 f\,\frac{\partial f}{\partial \theta} = 0, \tag{9.16}$$

あるいは

$$\frac{\partial}{\partial t_3}\left(\frac{E'}{\omega}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\sqrt{gh}\,\frac{E'}{\omega}\right) + \frac{k^4 h}{\omega}\left(\frac{gh^2}{3} - T\right)\sqrt{\frac{E'}{\omega}}\,\frac{\partial^3}{\partial \theta^3}\sqrt{\frac{E'}{\omega}} + \frac{3\sqrt{2g}\,k^2}{2\sqrt{\omega\rho}}\sqrt{\frac{E'}{\omega}}\,\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{E'}{\omega}\right) = 0\,. \tag{9.17}$$

(9.16)は Korteweg-de Vries 方程式の非一様媒質への一般化になっている。 長波長の波の伝播に対しても wave action density E'/ω が重要な量となることがわかる。

10. むすび

7, 8 節で示されたように、Whitham の方法、derivative expansion の方法ともに、低次の近似に於ては同等な結果を与えることがわかる。 摂動展開法としての優劣は

高次近似が如何に系統的に与えられるか、あるいは、取り扱われる問題の性質に応じて決まるであろうが、これまでの議論と関連して次のような指摘ができる。

derivative expansion 法では微小パラメター ϵ が導入されているため、'ゆっくりした変化' の程度が明らかである。 また、系統的な摂動展開法であるから、任意のオーダーまで近似を進めることが可能であり、波動の漸近的振舞は、各オーダーの nonsecularity 条件より決定することができる。 一般の方程式系に対して Lagrangian を求める一般論はないようであるから、Lagrangian に関する知識を前提としない derivative expansion 法は、複雑な波動系の記述にも適用可能である点で優れていると言えよう。

さらに、前節で述べたように、derivative expansion 法によれば、長波長の波に対する近似も同様な手順で得ることができる。

Lagrangian 密度が求まる系に対しては、Whitham の方法は見通しよい近似法となる。 Whitham の方法の高次近似の構造はゆっくりした変化の程度を表わす微小パラメターを陽に導入することによって明らかにできると考えられる。

この点は検討中であるが、局所平面波の変調の問題に関しては、Whitham の方法, derivative expansion の方法

ともに同等な結果を与えることが言える。
最後に、これらの方法は、才1近似が周期解であるならば、平面波に限らず、*full nonlinear* な周期解のゆっくりしたスケールに関する変化を記述する問題にも適用可能であることをつけ加えておきたい。

参 考 文 献

M.D.Van Dyke: Perturbation Methods in Fluid Mechanics. (Academic, New York, 1964).

J.D.Cole: Perturbation Methods in Applied Mathematics. (Blaisdell,Waltham,Mass., 1968).

A.H.Nayfeh: Perturbation Methods. (John Wiley & Sons,New York, 1973).

G.B.Whitham: Linear and Nonlinear Waves. (John Wiley & Sons, New York, 1974).

T.Taniuti et al.: Reductive Perturbation Method for Nonlinear Wave Propagation. Prog.Theor.Phys. Suppl.55 (1974).

KBM法

N.N.Bogoliubov and Y.A.Mitropolsky: Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations. (Hindustan,Delhi, 1961).

D.Montgomery and D.A.Tidman: Phys.Fluids 7 (1964)242.

D.A.Tidman and H.M.Stainer: Phys.Fluids 8 (1965)345.

T.Kakutani and N.Sugimoto: Phys.Fluids 17 (1974)1617.

Whithamの方法

G.B.Whitham: J.Fluid.Mech. 22 (1965)273; 27(1967)399; 44 (1970) 373, Proc.Roy.Soc. A283 (1965)238; A299 (1967)6.

M.J.Lighthill: J.Inst.Math.Appl. 1 (1965)269. Proc.Roy.Soc. A299 (1967)28.

J.C.Luke: Proc.Roy.Soc. A283 (1966)403.

F.Bisshopp: J.Diff.Eq. 5 (1969)592.

F.P.Bretherton and C.J.R.Garrett: Proc.Roy.Soc. A302 (1969)529.

A.Davey: J.Fluid Mech. 53 (1972)796.

W.D.Hayes: Proc.Roy.Soc. A332 (1973)199.

K.B.Dysthe: J.Plasma Phys. 11(1974)63.

R.M.Miura and M.D.Kruskal: SIAM J.Appl.Math. 26 (1974)376.

multiple scaleの方法

P.A.Sturrock: Proc.Roy.Soc. A242 (1957)277.

G.Sandri: Ann.Phys. 24 (1963)332; 380, Nuovo Cimento 36 (1965) 67.

E.A.Frieman: J.Math.Phys. 4 (1963)410.

A.H.Nayfeh: J.Math.& Phys. 44 (1965)368, Phys.Fluids 8 (1965) 1896, J.Fluid Mech. 48 (1971)385.

A.H.Nayfeh and S.D.Hassan: J.Fluid Mech. 48 (1971)463.

T.Kawahara: J.Phys.Soc.Japan 35 (1973)1537; 38 (1975)

Y.Inoue and Y.Matsumoto: J.Phys.Soc.Japan 36 (1974)1446.