数理解析研究所講究録
第 244 巻 1975 年 190-209

二波相互作用

東大理　　橋本 英典

§1 はじめに

非線型波の相互作用は複雑多岐であるが，ここではもっとも簡単でかつ初期値問題が初等的に求まる２つの場合をとりあげて見たい。ひとつは，非線型媒質中の伝播波で，第２高調波の位相速度が基本波の位相速度に等しいときにあらわれる２倍波共鳴の１側面をあらわすものであり[1]，また生態学において，食物の生産がないところでの移動補食問題[2]にもあらわれるものである。もうひとつはプラズマ中のビームと波の相互作用の議論や[7,8]，生態学の移動補食問題[2-6]などにあらわれ，相互作用が波の強さの積であらわされる。

§2. 2倍波共鳴

たとえば水面に生じる波長 2.44 cm の波では重力と表面張力が共に働くために2倍波数 1.22 cm の波が同一の位相速度を持ち，むしろ両者が共存するくぼみ型の定常伝播波 (Wilton波 1915) が可能なことが予言され Schooly (1960) らによって観測されている．McGoldrick (1965, 1970), Simmons (1969) らはこれを振幅 ，位相が時空的に一様でないもっと一般的な2倍波共鳴相互作用の1つとしてとらえ，若干の特解を論じると共にその実験との比較を行なっている。プラズマ中のななめの磁気流体波については井上，松本，杉本氏等の研究[9]がある(1974)。(Ref. I に総合報告がある)。

一般に従属変数 Ψ を小さいパラメタ ε によって

$$\Psi = \varepsilon\Psi_1 + \varepsilon^2\Psi_2 + \cdots \tag{2.1}$$

の形に展開すると，長さ x と時間 t について一様な実線型微分演算子 $L[p, \epsilon]$, $M_j[p, \epsilon]$ 等を用いて

$$O(\varepsilon) : \quad L[\Psi_1] = 0 \tag{2.2}$$

$$O(\varepsilon^2) : \quad L[\Psi_2] = \Sigma M_j[\Psi_1]N_j[\Psi_1] \tag{2.3}$$

の形に展開できる現象を考えよう．ただし

$$p = \partial/\partial x, \quad \epsilon = \partial/\partial t \tag{2.4}$$

で単一波

$$Z = e^{i(kx-wt)} \tag{2.5}$$

に対し L, M, N は

$$L[Z] = L(ik, -iw)Z \quad \text{など} \tag{2.6}$$

を与えるものとする*. 従って (3.2) の解としては分散関係

$$L_1 \equiv L(ik_0, -iw_0) = 0 \tag{2.7}$$

を満足する波数および振動数が許されるが, 同時に

$$L_2 \equiv L(2ik_0, -2iw_0) = 0 \tag{2.8}$$

と2倍の波数, 振動数で同一位相速度の波が共存しうるときは (2.5) で k, w を k_0, w_0 ととったもの Z_0 を (2.3) の右辺に代入することによってもわかるように右辺に $Z_0^2 = \exp[2i(k_0x - w_0t)]$ があらわれ, いわゆる永年発散を生じる。これを避けるには Ψ_1 として, 基本波と2倍波が共存する

$$\Psi_1 = a_1(X, T)Z + a_2(X, T)Z^2 + \text{複素共役}$$
$$X = \varepsilon t, \quad T = \varepsilon t \tag{2.9}$$

の形をとり, 振幅 u, v が時間的, 空間的にゆっくり変ると すればよい。このとき演算子 L は

$$L = L(p, \epsilon) + \varepsilon[L_p(p, \epsilon)\frac{\partial}{\partial X} + L_\epsilon(p, \epsilon)\frac{\partial}{\partial T}] + O(\varepsilon^2) \tag{2.10}$$

と書ける。このとき

* 簡単のために $L(-p, -\epsilon) = L(p, \epsilon)$, $L(0, 0) \neq 0$ とする。

$$O(\varepsilon):\ L(p,\epsilon)[\Psi] = 0 \tag{2.11}$$

で，(2.10)の第2項に相当する $O(\varepsilon)$ の項が(2.3)におくりこまれて(2.3)は

$$O(\varepsilon):\ L(p,\epsilon)[\Psi_2] = -[L_p(p,\epsilon)\frac{\partial}{\partial X} + L_\epsilon(p,\epsilon)\frac{\partial}{\partial T}][\Psi_1] + \Sigma M_j[\Psi_1]N_j[\Psi_1] \tag{2.12}$$

と書ける。

さて，(2.7)，(2.8)の w_0 は k_0 の関数として定まるので，両者をまとめて

$$L[ik, -iw(k)] = 0 \tag{2.13}$$

と書き，k について微分し $k = mk_0$ $m = 1, 2$ とおけば

$$L_{p,m} = V_{gm} L_{\epsilon,m} \tag{2.14}$$

を得る．ただし

$$L_{p,m} = L_p(imk_0, -iw(mk_0)),\ L_{\epsilon,m} = L_\epsilon(imk_0, -iw(mk_0)) \tag{2.15}$$

$$V_{gm} = \frac{dw(k)}{dk}\Big|_{k=mk_0} \tag{2.16}$$

は，$m = 1, 2$ に応じて基本波と2倍波の群速度をあらわす。

(2.9)を(2.12)に代入し(2.6)，(2.14)などを考慮すれば

$$\begin{aligned} -L(p,\epsilon)[\Psi_2] = {} & L_{\epsilon,1}\{(\frac{\partial}{\partial T} + V_{g_1}\frac{\partial}{\partial X})a_1 - \kappa_1\bar{a}_1a_2\}Z \\ & + L_{\epsilon,2}\{(\frac{\partial}{\partial T} + V_{g_2}\frac{\partial}{\partial X})a_2 - \kappa_2 a_1^2\}Z^2 \\ & + z^2 \text{の項} \\ & + \text{以上の複素共役} \end{aligned} \tag{2.17}$$

が得られる．ただし

$$\kappa_1 L_{\epsilon,1} = \Sigma(M_{j,-1} N_{j2} + M_{j,2} N_{j,-1})$$

$$\kappa_2 L_{\epsilon,2} = \Sigma M_{j,1} N_{j,1}$$

である．(2.17)の右辺の Z および Z^2 の永年項が消えるようにすれば u，v の長時間にわたる変化を支配する方程式として

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + V_{g_1}\frac{\partial}{\partial X}\right)a_1 = \kappa_1 \bar{a}_1 a_2 \qquad (2.19)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial T} + V_{g_2}\frac{\partial}{\partial X}\right)a_2 = \kappa_2 a_1^2 \qquad (2.20)$$

を得る．表面張力 — 重力波の場合には

$V_{g_1} = 5w_0/(6k_0)$, $V_{g_2} = 7w_0/(6k_0)$, $w_0^2 = 1.5k_0$, $k_0 = \sqrt{g/(2\gamma)}$

で a_1, a_2 を水面の盛り上りとすれば，

$\kappa_1 = -iw_0k_0$, $\kappa_2 = -\frac{i}{2} w_0k_0$ となる．

(2.19)〜(2.20)の任意の初期値問題に対する解を求めることは困難で，i) $\partial/\partial T = 0$，ii) $\partial/\partial x = 0$，iii) $x - vt$ だけによる永久波解が求まっている．iv) さて表面張力ー重力波のときなどのように κ_1, κ_2 の位相の和が π の整数倍ならば，

$$a_j = |a_j|e^{i\theta j}, \quad \kappa_j = |\kappa_j|e^{i\delta j}$$

とおけば θ_1, θ_2 が一定で $2\theta_1 - \theta_2 = \delta j = \pi$ の整数倍となる解が新に可能であり，しかも初期値問題にして解ける場合

に属するので詳しく調べてみることにしよう．

独立変数

$$\xi = X - V_{g_2} t, \quad \eta = X - V_{g_1} t \tag{2.21}$$

を導入すれば (2.19), (2.20) は本質的に

$$u_\xi = \alpha uv \tag{2.22}$$

$$v_\eta = \beta u^2 \tag{2.23}$$

に帰着する．ただし

$$u = |a_1|, \ v = |a_2|, \ \alpha = |\kappa_1|/(V_{g_1} - V_{g_2})$$

$$\beta = \pm|\kappa_2|/(V_{g_1} - V_{g_2}) \tag{2.24}$$

である．

§3. 移動補食問題[2)] I.

一次元の食物分布密度 $V(x,t)$ の中でこれを食って増殖する密度 $U(x,t)$ の生物群が x の正の方向に a の速度で進行するものとしよう．無次元化した補食者の増殖率を νUV，死亡率を νU，単位時間の個体当りの摂取量を k とすれば，U, V は偏微分方程式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)U = \nu(V - 1)U \tag{3.1}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -kU \qquad V > 0 \tag{3.2}$$

を満足する．$V=0$ になったところでは $V=0$ とおく。
独立変数として

$$\xi = x \qquad \eta = x - at \tag{3.3}$$

を導入すれば (3.1), (3.2) は

$$U_\xi = \nu'(V-1)U \tag{3.4}$$

$$V_\eta = k'U \tag{3.5}$$

に帰着する．ただし

$$\nu' = \nu/a, \quad k' = k/a \tag{3.6}$$

である．

§4. Liouville の方程式

いま (2.22), (2.23) で

$$u = \exp(\Phi) \tag{4.1}$$

(3.4), (3.5) で

$$\begin{aligned} &U = \exp(2\Phi), \quad V = 1 + v \\ &\nu' = 2\alpha, \quad k' = \beta \end{aligned} \tag{4.2}$$

とおけば両者は共に，同一式

$$\Phi_\xi = \alpha v, \quad v_\eta = \beta e^{2\Phi} \tag{4.3}$$

あるいは v を消去して Liouville の方程式

$$\Phi_{\xi\eta} = \alpha\beta e^{2\Phi} \tag{4.4}$$

によって支配されることになる．独立変数の変換

$$\phi = \phi(\xi), \ \psi = \psi(\eta) \tag{4.5}$$

によって　(4.4) は

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi\partial\psi} = \alpha\beta e^{[2\Phi - \log\phi' - \log\psi']} \tag{4.6}$$

と書け，

$$\chi = \Phi - \frac{1}{2}[\log\phi'(\xi) + \log\psi'(\eta)] \tag{4.7}$$

が

$$\frac{\partial^2}{\partial\phi\partial\psi}\chi = \alpha\beta e^{2\chi} \tag{4.8}$$

の解であることを示す．

これは逆にいえば (4.8) の任意の解 $\chi(\phi,\psi)$ が求まれば (4.7) によって Φ を任意関数 $\phi(\xi)$, $\psi(\xi)$ を含む形，すなわち (4.4) の一般解としてあらわすことができることを示す．(4.8) の一番簡単な解として平面波解

$$\chi = f(\phi + \psi) \tag{4.9}$$

をとろう．これは常微分方程式

$$f'' = \alpha\beta e^{2f} \tag{4.10}$$

の解として

$$\chi = -\log(\phi + \psi) + \frac{1}{2}\log\frac{1}{\alpha\beta} \tag{4.11}$$

の形に与えられる．

(4.11)を(4.7)に代入すれば結局(4.4)の一般解として

$$\Phi = \frac{1}{2}[\log\phi'(\xi) + \log\psi'(\eta)] - \log[\phi(\xi) + \psi(\eta)]$$

$$+ \frac{1}{2}\log\frac{1}{\alpha\beta} \tag{4.12}$$

あるいは

$$e^{2\Phi} = \frac{\phi'(\xi)\psi'(\eta)}{\alpha\beta[\phi(\xi) + \psi(\eta)]^2} \tag{4.13}$$

を得る。この形はフォーサイスに与えられているものと一致するが導出法としてはより簡単である。

このとき(4.3), (2.22), (2.23), (4.2)は

$$U = u^2 = e^{2\Phi} = \frac{\phi'(\xi)\psi'(\eta)}{\alpha\beta[\phi(\xi) + \psi(\eta)]^2} \tag{4.14}$$

$$V - 1 = v = \frac{1}{\alpha}(\log u)_\xi = \frac{1}{\alpha}\left[\frac{\phi''(\xi)}{2\phi'(\xi)} - \frac{\phi'(\xi)}{\phi(\xi) + \psi(\eta)}\right] \tag{4.15}$$

を与える。これは特別な場合として，

$$\phi(\xi) = \Sigma b_j e^{\mu_j \xi}, \quad \psi(\eta) = \Sigma c_j e^{\nu_j \eta}$$

$$b_j,\ c_j,\ \mu_j,\ \nu_j > 0 \tag{4.16}$$

とおけばすぐわかるように，階段波やパルス波の衝突現象を記述するものである．特に $j=1$ だけのときには

$$U = u^2 = \frac{1}{\alpha\beta} \frac{2bc\mu\nu e^{\mu\xi+\nu\eta}}{(be^{\mu\xi} + ce^{\nu\eta})^2} \tag{4.17}$$

$$V - 1 = v = \frac{\mu}{2\alpha}\left[\frac{ce^{\nu\eta} - be^{\mu\xi}}{be^{\mu\xi} + ce^{\nu\eta}}\right] \tag{4.18}$$

で基本波については包絡パルス波，2倍波については位相のとびを持つ包絡くびれ波を与え，McGoldrick等が論じたものに一致する．

また捕食問題についてはピークを持つ捕食者の集団が，一定密度の食物分布 $1+\frac{\mu}{2\alpha}$ に侵入し，これを食って後に $1-\frac{\mu}{2\alpha}$ の一様分布を残す場合をあらわす．ただし $\mu \leqq 2\alpha$.

§5. 初期値問題

初期条件：

$$t = 0: \quad u = u_0(x),\ v = v_0(x) \tag{5.1}$$

を満足する解を求めるには，$t=0$ で $\xi = \eta = x$ となることに着目し (4.14)(4.15)から得られる $\phi(x)$, $\psi(x)$ に対する連立常微分方程式

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\phi'\psi'}{(\phi + \psi)^2} = \alpha\beta u_0^2 && (5.2) \\ &\frac{\phi''}{\phi'} - \frac{2\phi'}{\phi + \psi} = 2\alpha v_0 && (5.3) \end{aligned}\right.$$

を解けばよい。いま

$$P \equiv \phi'/(\phi + \psi), \quad Q \equiv \psi'/(\phi + \psi) \tag{5.4}$$

を導入すれば(5.2),(5.3)は

$$PQ = \alpha\beta u_0^2 \tag{5.5}$$

$$\frac{P'}{P} \equiv \frac{\phi''}{\phi'} - \frac{\phi' + \psi'}{\phi + \psi} = 2\alpha v_0 + P - Q \tag{5.6}$$

を与える。(5.5)から得られるQを(5.6)に入れ

$$P \equiv -\frac{F'}{F} \tag{5.7}$$

あるいはその対数微分

$$\frac{P'}{P} = \frac{F''}{F'} + P \tag{5.8}$$

を(5.6)に入れればFに対して

$$F'' - 2\alpha v_0 F' - \alpha\beta u_0^2 F = 0 \tag{5.9}$$

を得る。

$$H = F \exp(-\alpha \int v_0 dx) \tag{5.10}$$

とおって1階微分を消去すれば

$$H'' + \alpha[v_0' - \alpha v_0^2 - \beta u_0^2]H = 0 \tag{5.11}$$

が得られ,(5.11)の解Hを用いればPは(5.7)−(5.10)から

$$-P = \frac{F'}{F} = \frac{G}{H} = \frac{H'}{H} + \alpha v_0 \tag{5.12}$$

ただし

$$G = H' + \alpha v_0 H \tag{5.13}$$

によって与えられる。一方(5.6)の第2,3項に(5.4)を入れ(5.12)を考慮すれば

$$\frac{\phi''}{\phi'} = 2(\alpha v_0 + P) = -2\frac{H'}{H} \tag{5.14}$$

で，積分すれば

$$\phi' = \frac{1}{H^2}, \quad \phi = \frac{\tilde{H}}{H} \tag{5.15}$$

を得る。ただし $\tilde{H}$ は(5.11)の H と独立な解

$$H = \tilde{H}\int\frac{dx}{H^2} \tag{5.16}$$

で，H と $\tilde{H}$ は

$$W[H, \tilde{H}] \equiv H\tilde{H}' - H'\tilde{H} = 1 \tag{5.17}$$

を満足する。(5.15)(5.12)を(5.4)の第1式に入れ，ψ を求めれば，(5.17)を考慮して

$$\psi = -\frac{\tilde{G}}{G}\ , \tag{5.18}$$

を得る。ただし

$$G = H' + \alpha v_0 H \tag{5.19}$$

で，(5.11)と(5.13)から

$$W[G,\tilde{G}] = -\alpha\beta u_0{}^2 \tag{5.20}$$

従って

$$\psi' = \frac{-W[G,\ \tilde{G}]}{G^2} = \frac{\alpha\beta u_0{}^2}{G^2} \tag{5.21}$$

が得られる．(5.15)，(5.13)，(5.15)，(5.19)，(5.21)から
われわれの初期値問題が(5.11)の(5.17)で規格化された2つの独立な解Hと$\tilde{H}$さえわかれば完全に解けて

$$u(\xi,\ \eta) = u_0(\eta)/R(\xi,\ \eta) \tag{5.22}$$

$$v = \frac{1}{\alpha}(\log u)_\xi = -\frac{1}{\alpha}\frac{R_\xi}{R} \tag{5.23}$$

ただし

$$R(\xi,\ \eta) = \begin{vmatrix} H(\xi), & G(\eta) \\ \tilde{H}(\xi), & \tilde{G}(\eta) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H(\xi), & H'(\eta) + \alpha v_0(\eta)H(\eta) \\ \tilde{H}(\xi), & \tilde{H}'(\eta) + \alpha v_0(\eta)\tilde{H}(\eta) \end{vmatrix} \tag{5.24}$$

で与えられることを知る．$t=0$，すなわち $\xi = \eta = x$ では(5.17)から $R = 1,\ R_\xi = -\alpha v_0(x)$ となり，初期値をたしかに満足することがわかる．

(5.22)−(5.24)は任意の場での値を与えるが，特に$t=0$に$x=\theta$から出発する特性曲線 $\xi = \theta$ あるいは $\eta = \theta$ の上の値を知るには(5.10)，(5.16)の下限をθにとり

$$H(\theta) = 1,\ H'(\theta) = 0,\ \tilde{H}(\theta) = 0,\ \tilde{H}'(\theta) = 1 \tag{5.25}$$

となるような独立解Hと$\tilde{H}$をとるのが便利である。

このとき(5.23)，(5.24)から

$$u(\xi,\ \theta) = \frac{u_0(\theta)}{H(\xi) - \alpha v_0(\theta)\widetilde{H}(\xi)}\ ,\quad v(\xi,\ \theta) = \frac{1}{\alpha}(\log u)_\xi \tag{5.26}$$

$$u(\theta,\ \eta) = \frac{u_0(\eta)}{\widetilde{G}(\eta)}\ ,\quad v(\theta,\ \eta) = -\frac{1}{\alpha}\frac{\widetilde{G}'(\eta)}{\widetilde{G}(\eta)} \tag{5.27}$$

を得る．

特に $x=\theta$ が u_0，v_0 の唯一の不連続点であるときには，初期条件を満足し $x=\theta$ の両側で別々の方程式 (5.11) を満足する解をとるのが便利である．

一般には (5.9) の解とその微分が連続となることに着目し，(5.10) を用いて $x=\theta$ でのとびの条件

$$\{H\} \equiv H(\theta+0) - H(\theta-0) = 0,\ \{\widetilde{H}\} = 0,\ \{H'\} = -\alpha\widetilde{H}\{v_0\},$$

$$\{\widetilde{H}'\} = -\alpha\widetilde{H}\{v_0\} \tag{5.28}$$

を満足する (5.11) の解を用いることになる．このとき

$$\{W\} = \{H\widetilde{H}' - \widetilde{H}H'\} = 0 \tag{5.29}$$

で W はいつも 1 となる．

§6. 例

具体的な計算例の詳しい記述は別の機会にゆずるとして若干の結果をのべると

i) 初期値． $u_0 = u_\infty \operatorname{sech} kx,\quad v_0 = v_\infty \tan hkx$

に対して，(5.11) は形式的にポテンシャル $W(x)$ に対する

シュレーディンガーの方程式

$$H'' + (E - W(x))H = 0 \tag{6.2}$$

ただし

$$E = -\mu^2k^2 = -\alpha^2 v_\infty^2, \quad W = -\nu(\nu+1)k^2 \operatorname{sech}^2 kx$$

$$\nu(\nu+1)k^2 = \alpha(kv_\infty + \alpha v_\infty^2 - \beta u_\infty^2) \tag{6.3}$$

に帰し，その解はルジャンドルの球関数を用いて

$$H = P_\nu^{u}(z), \quad \tilde{H} = \frac{1}{k}\frac{\Gamma(1+\nu-\mu)}{\Gamma(1+\nu+\mu)} Q_\nu^{u}(z), \quad z = \tanh kx \tag{6.4}$$

に書ける。これからたとえば，

a) $\nu=0$; $W\equiv 0$, のときは H, $\tilde{H}$ が指数関数で (4.17), (4.18) の孤立波解が得られる.

b) $\mu=\frac{1}{2}$, $\nu=\frac{1}{2}$ のとき特性曲線 $\xi=0$ にそって

$$u/u_\infty = (\cos hk\eta)^{3/2}, \quad v/v_\infty = \sin hk\eta$$

$t\to\infty$ で指数関数的な発散がおこる.

c) $\mu=1$, $\nu=1$: $\xi=0$ に沿って. $u/u_\infty = v/(2v_\infty \tanh k\eta)$

$= (1 - k\eta \tanh k\eta)^{-1}$, （有限時間内の代数的発散）

などの結果を生じる．これらの原因が (5.26), (5.27) の分母の0点の（∞点を含めて）出現によるものであることは明らかである．u, v の値に不連続があるとき，あるいは u, v の初期値乃至 α, β の値の正負によっても事情は異なるが，同様なことがあらわれる．これらの議論は別の機会に

ゆずりたい。また分散のさらに高い次数をとり，振幅をそれに応じてスケール変換をした相互作用だけに話を限ればどうなるかはまた次の問題である．また移動補食問題についていえば，食物の生産のないところで移動しなければ減衰すべき生物群が移動によって平衡値を保てるばかりでなく，場合によっては人口の爆発をひきおこす可能性にも結びついている*。この事情は§7の餌との出合による増殖の場合にもあらわれる。なお$\nabla=0$となれば別のとりあつかいが必要になる。

§7. 移動補食問題 II. 積に比例する相互作用の場合.

$$\frac{Du}{Dt_a} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} \right) u = \alpha uv \tag{7.1}$$

$$\frac{Dv}{Dt_b} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + b \frac{\partial}{\partial x} \right) v = - \beta uv \tag{7.2}$$

によって支配される現象を考えよう．これは補食者u，餌vの増加減少が，両者の出合の率によって定まるVolterra-Lotkaのモデル（ただし自然死，自然発生なし）を山口教授らが移動問題に拡張され，詳しい性質を論じられたものである[3-5]。またuを波のエネルギー密度，aをその群速度，vはX射ビームの密度，bをその速度と解釈することができる。(7.2)の一般解は2つの任意関数F，Gを用いて

* frontでの増殖については(7.10)を見よ。

$$u = \frac{-1}{\beta'}\frac{F'(X_a)}{F(X_a) + G(X_b)}\ , \quad v = -\frac{1}{\alpha'}\frac{G'(X_b)}{F(X_a) + G(X_b)} \tag{7.3}$$

ただし

$$X_a = x - at,\ X_b = x - bt,\ \alpha' = \frac{\alpha}{a - b}\ ,\ \beta' = \frac{b}{a - b} \tag{7.4}$$

と書ける[2,6)]。

たとえば $F(x)$, $G(x)$ として単調関数

$$F(x) = \sum_1^p \mu_j e^{-\sigma_j x}\ , \quad G(x) = \sum_1^q \nu_j e^{-\tau_i x}$$

$$\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \cdots \geqq \mu_p > 0,\ \nu_1 \geqq \nu_2 \cdots \geqq \nu_q > 0 \tag{7.5}$$

を用いれば階段波(含ピーク波)の組合わせの相互作用が導かれ，特に $F \propto e^{-\sigma x}$, $G(x) = e^{-\tau x}$ のときは，圧縮(補食者)，稀薄(餌)波の相互作用を示す解[8)]が得られる。任意の初期値

$$u(x,0) = u_0(x),\quad v(x,0) = v_0(x) \tag{7.6}$$

に対する解も propagator

$$H(x_0,x) = \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} [\beta' u_0(x) + \alpha' v_0(x)]\,d\xi\right\} \tag{7.7}$$

$$H(x,x) = 1\ , \qquad H(x_1,x_2)\,H(x_2,x_3) = H(x_1,x_3) \tag{7.8}$$

を用いて，たとえば u について

$$u(x,t) = \frac{u_0(X_a)}{1 - \alpha'\int_{X_a}^{X_b} H(Xa,\xi)v_0(\xi)d\xi} = \frac{H(X_b,X_a)\ u_0(X_a)}{1 + \beta'\int_{X_a}^{X_b} H(X_b,\xi)u_0(\xi)d\xi} \tag{7.9}$$

の形に得られる[6]。特に $a-b=c>0$，$x>0$ で $u_0(x)=0$ の場合を考えれば，波頭 $x=at$ では $X_a=0$，$X_b=ct$ で (7.10)の第2式の分母が1，となり

$$u(at,t) = H(ct,0)\ u_0(0) = \exp\ [\alpha'\int_0^{ct} v_0(\xi)d\xi]u_0(0) \tag{7.10}$$

で $\alpha' v_0$ の分布次第では u が補食者未踏の波頭の近くで $t\to\infty$ で発散する可能性を示す。（逆の starvation effect !）[3,6]。
また $x>0$ を占める一様初期密度 $u_0\ \mathrm{sgn}(x)$ で群速度0の振動の中に，一様密度 v_0 のビームが $t=0$ で始めて入って来た（$v=v_0(x)\ \mathrm{sgn}(-x)$）とすれば $X_a = x > 0$，

$X_b = x - bt < 0$ の両で $H(X_a,\xi) = \exp\ [-\alpha' v_0\xi + \beta' u_0 X_a]$ (7.11)

なので

$$u/u_0 = [1 - \alpha' v_0\int_0^{X_b} H(X_a,\ \xi)d\xi]^{-1} = [1 - e^{-\beta' u_0 x} + e^{\beta' u_0 X_a - \alpha' v_0 X_b}]^{-1} \tag{7.12}$$

を得るが，これは (7.6) を考慮すればこのような条件下で Tsytovich が得た特解[7]（6.117）と一致した結果であり，$x=0$ で振動の pile up を生じる。

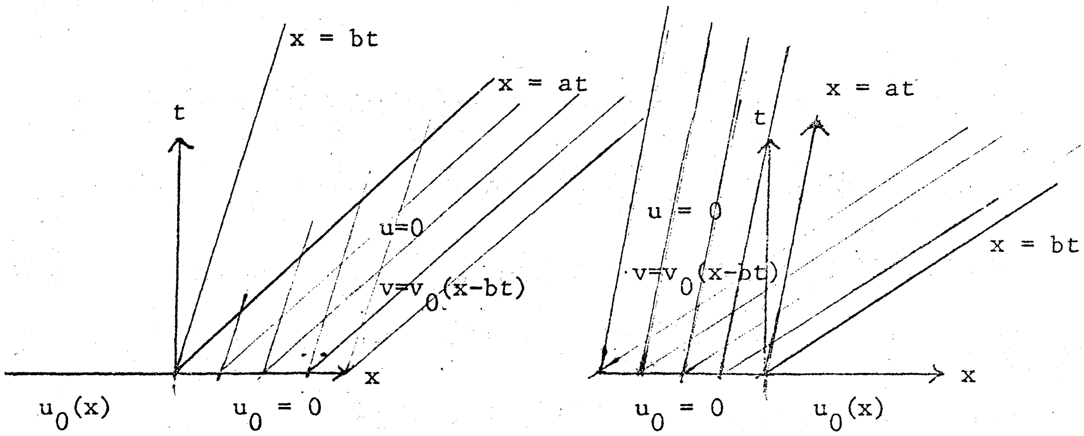
$$(u/u_0 = \exp \alpha' v_0 X_b = \exp(\alpha t))$$

一般にこのようにfront あるいはbackfrontでの増大現象は基礎式をI, II 共に

$$\frac{Du}{Dt_a} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + a\frac{\partial}{\partial x}\right)u = \alpha_0 uv \tag{7.13}$$

$$\frac{Dv}{Dt_b} \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t} + b\frac{\partial}{\partial x}\right)v = \beta_0 u^2 \text{ or } \beta_0 uv \tag{7.14}$$

の形に書きかえx, t面で考察すれば自明である。



a > b　　　　a < b

すなわち時刻$t=0$に$a \gtrless b$に応じて$x \gtrless 0$で$u_0=0$であれば図の$x=at$と$x \gtrless 0$にはさまれた領域では(7.13)から$u=0$, 従って$Dv/Dt_b \equiv 0$で$v=v_0(x-bt)$となる。従って(7.13)から$a>b$のときはfront, $a<b$ではbackfront $x=at$での増幅率が

$$\frac{1}{u}\frac{du}{dt} = \alpha v_0((a-b)t)$$

として定まり α v_0 の値によっては $t\to\infty$ で u が発散する可能性を与える．

References

1) 川原琢治： Nagare 6 (1974) 5

2) 橋本英典： 数理科学 138 (1975) 59

3) 山口昌哉： 数理解析研講究録 174 (1973) 130

4) 吉川敦： 同上 195 (1973) 1

5) A. Yoshikawa and M. Yamaguti : Publ. RIMS, 9 (1974) 577

6) H. Hasimoto : Proc. Japan Acad., 50 (1974) 623

7) V. N. Tsytovich : Nonlinear Effects in Plasma (Plenum Press, New York-London 1970) p. 179

8) A. Hasegawa : Phys. Letters A 47 (1974) 165

9) 井上良紀，松本安二，杉本信正； 日本物理学会年会予稿集 4 (1974) 31