数理解析研究所講究録
第 245 巻 1975 年 68-70

「トーラス上の微分方程式」へのコメント.

京大 教養　今西英器

1. 余次元1の現象について.

力学系を、群Gの多様体Mへの作用として考える。$G=\mathbb{R}$, $\dim M=2$ の時は Poincaré-Bendixon, Denjoy-Siegel の理論があるが、ここで本質的なのは、Mの中でのorbitの余次元が1であることである。$M=\mathbb{R}$(又は円周S^1), GはMに局所微分同相として作用するpseudo-group として、Gの作用の極小集合の性質をSacksteder [4] が調べている。この結果は、余次元1のfoliation の定性的研究で本質的な役割を果している. 例えば、ホロノミーのない余次元1のfoliation は、閉1形式ωにより$\omega=0$で定義されたfoliation と同値である(正確な定式化と証明は[1]), Polynomial growth のn次元Lie群(例えば$\mathbb{R}^n$)が$(n+1)$-次元多様体に局所的に自由に作用していれば、orbitは、正規部分多様体であるか、局所的にdense になる. (Plante

[2]). --- 等の結果が得られている。これ等は、Denjoy-Siegel の理論の最も自然な拡張と考えられる。

2. T^2 上の volume preserving flow について.

(1) $\dfrac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2)$, $i=1,2$, $f_1^2 + f_2^2 > 0$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} = 0$

を $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 上の volume preserving flow の方程式とする。(1)の解曲線は同相写像 $\varphi: T^2 \longrightarrow T^2$ により、$\dfrac{dx_i}{dt} = a_i$, $i=1,2$, の解曲線にうつるが、f_i が C^r-級, $r=1,2\cdots,\infty$, の時、φ は C^r-級微分同相にとれる。

石井氏より、この命題は Sternberg, Amer. J. Math. 79 (1957) にあるが、証明は怪しい、とお教え頂いたが、以下のように考えると(少くとも topologist には)容易に証明できる。

$\omega = f_2\,dx_1 - f_1\,dx_2$ とおくと、$\omega = 0$ の積分多様体が、(1)の解曲線であり、ω は閉1形式である。従って問題は、non-singular な閉1形式で定義された foliation の分類ということになる。これは高次元では難しいが、2次元では殆んど自明である。explicit に書いたものでは次の結果がある。

定理 (Roussarie [3]) $M = V \times S^1$, V は開多様体で、$\dim V = 1$ or 2. ω_1 と ω_2 が M 上の non-singular な閉1形式で、同じコホモロジー類に属する。この時、恒等写像と

isotopic な微分同相 $\varphi: M \longrightarrow M$ が存在し，φ は $\omega_1=0$ の積分多様体を ω_2 のそれにうつす．

Roussarie は C^∞-級の場合をやっているが，C^r-級 $r \leqq \infty$ も同様である．$M=T^2$，実解析的の場合も，多分 O.K. である．

なお，2次元多様体上の volume preserving flow の理論は，上の様に閉1形式の形に直すと見通しが良くなる．例えば，T. Ura. Ann. Ecole. Norm. Sup. Paris (1952) の結果は，コホモロジーできれいに解釈できる．しかしそれでも，M の genus が大きくなると相当面倒なようである．

[1] H. Imanishi, On the theorem of Denjoy-Sacksteder ---- ,
J. Math. Kyoto Univ. 1974, 607–634.

[2] J. F. Plante, On the existence of exceptional minimal sets----,
J. Diff. Equations. 1974, 178–194.

[3] R. Roussarie, Plongement dans les variétés feuilletées ---
Publ. Math. I.H.E.S. 43 (1973), 101–141.

[4]. R. Sacksteder, Foliations and pseudo-groups.
Amer. J. Math. (1965), 79–102.