数理解析研究所講究録
第 245 巻 1975 年 71-81

トーラス上の保測変換

京大数理研　十時東生

エルゴード理論におけるトピックスの中で，2次元トーラス $\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上に典型的な例をもつ重要な話題として，微分方程式から定まる flow と群同型をとりあげたい。

§1. 微分方程式から定まる flow

2次元トーラス $\mathbb{T}^2$ 上の微分方程式

$$(1)\qquad \frac{dx}{dt}=f(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=g(x,y),$$

（f, g は滑らかで $f^2+g^2>0$）から定まる flow $\{R_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ で，不変（確率）測度

$$(1')\qquad dm(x,y)=M(x,y)\,dx\,dy$$

を持つものは，標準形

$$(2)\qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\gamma,\quad \dfrac{dy}{dt}=1 \\[2ex] d\nu(x,y)=dx\,dy \end{cases}$$

に同型かという問題を考える。(2)から定まる flow を $\{\hat{T}_t\}$ とする。$\{R_t\}$ と $\{\hat{T}_t\}$ が同型というのは，bijection φ があって，$\varphi\circ R_t=\hat{T}_t\circ\varphi$ ($\forall t\in\mathbb{R}$) かつ $m\circ\varphi^{-1}=\nu$ が成りたつことをいう。

系(1)に対し rotation number γ が定まり(γ は無理数と仮定する), (1)は次の系に同型である(Poincaré, Kolmogorov)。

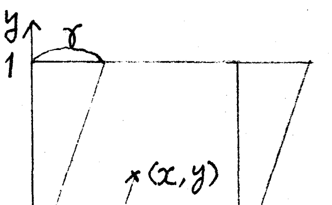
$$
(3)\quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=\dfrac{\gamma}{F(x,y)}, & \dfrac{dy}{dt}=\dfrac{1}{F(x,y)}, \\ d\mu(x,y)=\dfrac{1}{c}F(x,y)\,dx\,dy, & c=\iint F(x,y)\,dx\,dy. \end{cases}
$$

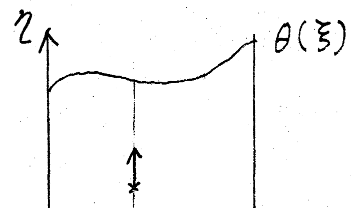
系(3)によって定まる flow を $\{T_t\}$ で表わす。(2)と(3)は時間のつけ方が異なるだけで, 軌道は全く同じである。(3)の方の時間を τ で表わせば, 時間変更の関係

$$
d\tau=F(x,y)\,dt, \qquad T_\tau(x,y)=\hat{T}_t(x,y)
$$

が成りたつ。われわれの問題は, (2)とその時間変更(3)が同型であるかということである。系 $\{T_t\}$ に変換

$$
\xi=x-\gamma y, \qquad \eta=\frac{1}{c}\int_0^y F(\xi+\gamma t, t)\,dt
$$





をほどこせば, special flow $\{S_t\}=(A_\gamma,\theta)$ になる:

$$
A_\gamma\xi=\xi+\gamma \pmod 1, \qquad \xi\in[0,1)
$$

$$
(4)\qquad \theta(\xi)=\frac{1}{c}\int_0^1 F(\xi+\gamma t, t)\,dt,
$$

$$S_t(\xi,\eta)=\begin{cases}(\xi,\eta+t), & -\eta\le t<\theta(\xi)-\eta,\\ (A_\gamma\xi,\eta+t-\theta(\xi)), & \theta(\xi)-\eta\le t<\theta(\xi)+\theta(A_\gamma\xi)-\eta.\end{cases}$$

系(2)は special flow $\{\hat{S}_t\}=(A_\gamma, 1)$ に同型である。

さて Gurevic [4] によれば，homologous equation

(5) $\qquad h(\xi+\gamma)-h(\xi)=\theta(\xi)-1 \qquad$ a.e.

の可測な解 h があれば，$\{S_t\}$ と $\{\hat{S}_t\}$ は同型である。方程式 (5) を Fourier 級数で解こうとすると，良く知られているように“小さい分母”が現われる。

$$\theta(\xi)-1=\sum_{n\neq 0}a_n e^{2\pi i n\xi},\quad h(\xi)=\sum_n b_n e^{2\pi i n\xi},$$

と展開すれば (5) により

$$b_n=\frac{a_n}{e^{2\pi i n\gamma}-1},\qquad n\neq 0,$$

だから，もし級数

(6) $$h(\xi)=b_0+\sum_{n\neq 0}\frac{a_n}{e^{2\pi i n\gamma}-1}e^{2\pi i n\xi}$$

が収束すれば，(6)は(5)の解である。

さて，与えられる関数を実解析関数に限ろう。

$\hat{\mathcal{E}}=\{F(x,y)\mid$ real analytic, positive, period 1$\}$

$\mathcal{E}=\{\theta(\xi)\mid$ real analytic, positive, period 1$\}$

$\mathcal{E}_1=\{\theta\in\mathcal{E}\mid\ 2\sum_{n\neq 0}|a_n|<1,\ \int\theta(\xi)d\xi=1\}$

$$\mathcal{E}_2 = \{\theta \in \mathcal{E} \mid a_n \neq 0, \forall n, \int \theta(\xi) d\xi = 1\}$$

とおく。Arnold [2] によれば，γ が有理数で"not too well"に近似される，即ち

(7) $\exists c > 0, \exists d > 1 : \left|\frac{m}{n} - \gamma\right| \geq c|n|^{-d}$ for $\forall m, n \in \mathbb{Z}$

であれば，(5) は任意の $\theta \in \mathcal{E}$ に対し，実解析的な解 h を持つ。したがって，rotation number γ が (7) をみたせば，任意の $F \in \hat{\mathcal{E}}$ に対し系 (4) は系 (2) に同型である。

Sklover [5] によれば，

i) 任意の $\theta \in \mathcal{E}_2$ に対し，無理数 γ があって，$\{S_t\} = (A_\gamma, \theta)$ は連続スペクトルをもつ（即ち，固有関数は定数のみ）。

ii) 任意の $\theta \in \mathcal{E}_1$ に対し，方程式 (4) は解 $F \in \hat{\mathcal{E}}$ をもつ。

一方系 (2) の $\{\hat{T}_t\}$ は純点スペクトルをもつので，標準系 (2) に同型ではない系 (1) の存在がわかる。

§2. 群同型

2次元トーラス $\mathbb{T}^2$ の群同型は行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{ij} \in \mathbb{Z}, \quad \det A = \pm 1,$$

で与えられる。それは Haar 測度 $dm(x, y) = dx\,dy$ を保つので，$(\mathbb{T}^2, m, A)$ は保測変換である。変換 A のエルゴード性を仮定する。それは行列 A の固有値が1の巾根

でない（したがって実数）であることと同値である。Aの固有値をλ_1, λ_2, $|\lambda_2|<1<|\lambda_1|$とし，$(\alpha_i, 1)$を$\lambda_i$に属する$A$の左固有ベクトルとする：

$$(\alpha_i, 1)A=\lambda_i(\alpha_i, 1), \qquad i=1, 2.$$

そうすると，直線族

(1)　$\alpha_1 dx_1+dx_2=0$　（Aのλ_2-固有方向）

(2)　$\alpha_2 dx_1+dx_2=0$　（Aのλ_1-固有方向）

に対し，つぎのことが成りたつ。

i) 各族 (1) と (2) はAによって不変：$\Gamma\in(j)\Rightarrow A\Gamma\in(j)$, $j=1,2$.

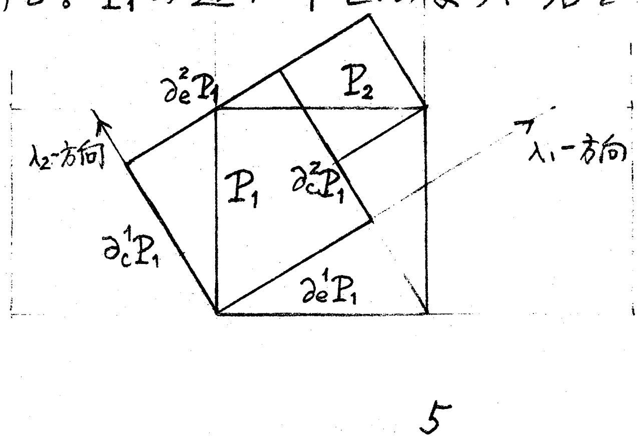
ii) Γ上の線分lに対し

$$\Gamma\in(1) \quad\Rightarrow\quad |Al|=|\lambda_2||l|,$$

$$\Gamma\in(2) \quad\Rightarrow\quad |Al|=|\lambda_1||l|.$$

つまりAはAnosov系である。

上のことがAの保測変換としての性質に反映する様子を見よう。$\mathbb{T}^2$の分割$\alpha=\{P_1, P_2\}$でつぎのようなものを考える。P_1とP_2は平行四辺形で，各辺は原点を通るAの固有方向の線分である。P_1の辺に下図のように名をつけ（P_2にも同様），



$$\Gamma_e(\alpha)=\bigcup_{i=1}^{2}(\partial_e^1 P_i\cup\partial_e^2 P_i),\quad \Gamma_c(\alpha)=\bigcup_{i=1}^{2}(\partial_c^1 P_i\cup\partial_c^2 P_i)$$

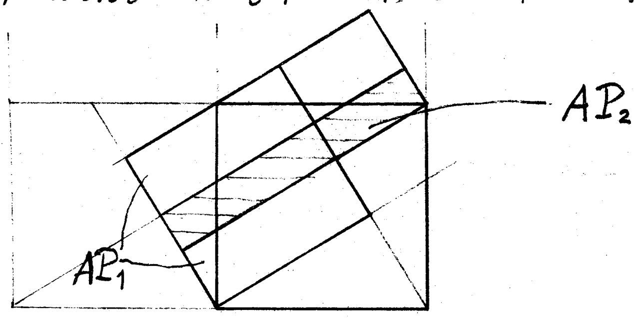
とおく。辺の長さを

$$r_e^i=|\partial_e^1 P_i|=|\partial_e^2 P_i|,\quad r_c^i=|\partial_c^1 P_i|=|\partial_c^2 P_i|,\quad i=1,2,$$

とする。ii) により

$$\Gamma_e(A^{-1}\alpha)\subset\Gamma_e(\alpha),\quad \Gamma_c(A\alpha)\subset\Gamma_c(\alpha)$$

をみたす $\alpha=\{P_1,P_2\}$ の存在が分る。つまり α は order 1 の Markov 分割である。Markov 分割に特



徴的なことは

iii) $\forall n>0$, $\forall P_{i_s}\in\alpha$ $(0\leq s\leq n)$ に対し

$$\bigcap_{s=0}^{n}A^s P_{i_s}\neq\phi \iff P_{i_s}\cap AP_{i_{s+1}}\neq\phi,\quad 0\leq s<n.$$

この性質を用いて，A を記号力学系で表現することを考える。分割 α は A の generator ($\bigvee_{-\infty}^{\infty}A^n\alpha=\varepsilon$: 各点への分割) ではないので，分割をとりかえる。$\alpha\vee A\alpha$ の元 $P_i\cap AP_j$ の連結成分 (正確には $\mathring{P}_i\cap A\mathring{P}_j$ の連結成分に適当に境界をつけたもの) は，長さ r_e^i の expanding な線分と長さ $|\lambda_2|r_c^j$ の contracting な線分を辺とする小平行四辺形である (これらの線分は原点を通る固有方向にある)。その

個数を k_{ij} とするとつぎの関係が成りたつ：

$$(3)\ \begin{cases} |\lambda_1| r_e^1 = k_{11} r_e^1 + k_{21} r_e^2, & |\lambda_1| r_c^1 = k_{11} r_c^1 + k_{12} r_c^2, \\ |\lambda_1| r_e^2 = k_{12} r_e^1 + k_{22} r_e^2, & |\lambda_1| r_c^2 = k_{21} r_c^1 + k_{22} r_c^2. \end{cases}$$

これらの $k = \sum_{i,j} k_{ij}$ 個の小平行四辺形への $\mathbb{T}^2$ の分割を $\beta = \{Q_1, \cdots, Q_k\}$ とすると，β も Markov 分割で，$\beta \vee T\beta$ の各元は連結であり，したがって β は A の generator になる。各点 $z \in \mathbb{T}^2$ は $z = \bigcap_{-\infty}^{\infty} A^n Q_{i_n}$，$Q_{i_n} \in \beta$ と表わされる。

さて，$1 \leq i, j \leq k$ に対し

$$m(i,j) = \begin{cases} 1, & Q_i \cap AQ_j \neq \emptyset, \\ 0, & その他, \end{cases}$$

とおき，$k \times k$ 行列 $M = (m(i,j))$ を定める。$\Omega_n = \{1, \cdots, k\}$ とし，$\Omega = \prod_{-\infty}^{\infty} \Omega_n$ の閉部分集合

$$\Omega_M = \{\omega \in \Omega \mid m(\omega_n, \omega_{n+1}) = 1,\ {}^\forall n \in \mathbb{Z}\}$$

を定めれば，Ω の shift T

$$(T\omega)_n = \omega_{n-1}$$

に関して不変である。Ω_M を Markov subset，M をその構造行列，T の Ω_M への制限（それを再び T と書く）を Markov subshift と呼ぶ。mapping

$$\varphi : \Omega_M \longrightarrow \mathbb{T}^2, \quad \varphi(\omega) = \bigcap_{-\infty}^{\infty} A^n Q_{\omega_n}$$

を定めると，β が iii) をみたすことより，φ は bijection に

なる。明らかに，

(4) $\qquad \varphi\circ T = A\circ\varphi$

が成りたつ。容易に分るように

$$\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{cccc} \overbrace{}^{k_{11}} & \overbrace{}^{k_{12}} & \overbrace{}^{k_{21}} & \overbrace{}^{k_{22}} \end{array} \\
M= & \left(\begin{array}{cccc} 1\cdots1 & 0\cdots0 & 1\cdots1 & 0\cdots0 \\ 1\cdots1 & 0\cdots0 & 1\cdots1 & 0\cdots0 \\ 0\cdots0 & 1\cdots1 & 0\cdots0 & 1\cdots1 \\ 0\cdots0 & 1\cdots1 & 0\cdots0 & 1\cdots1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} k_{11}+k_{12} \\ \left.\begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\right\} k_{21}+k_{22} \end{array}
\end{array}$$

である。この形と(3)により，Mの固有値は$|\lambda_1|, |\lambda_2|, 0$であることが分る。最大固有値$|\lambda_1|$はsimpleで，右と左の固有ベクトル$(x_1,\cdots,x_k)$, $(y_1,\cdots,y_k)$の成分はすべて正であることがFrobeniusの定理から分る。$\sum_i x_i y_i = 1$と規格化して

$$p_{ij} = \frac{m(i,j)\,x_j}{|\lambda_1|\,x_i}, \qquad \pi_i = x_i y_i, \quad 1 \le i, j \le k,$$

とおけば，推移確率とその定常分布

$$\sum_j p_{ij} = 1, \quad \sum_i \pi_i = 1, \quad \sum_i \pi_i p_{ij} = \pi_j$$

になっている。したがって，$\{p_{ij}\}$と$\{\pi_i\}$によってΩ_Mに定まるMarkov測度をμとすれば，μはT-不変でエルゴード的である。Ω_M上のT-不変な確率測度μ'に対し，Tのμ'によるエントロピーを$h(T;\mu')$と書けば，つぎのことが成りたつ([1])。

iv) 上の μ に対し $h(T;\mu)=\log|\lambda_1|$ であり，$\mu'\neq\mu$ ならば $h(T;\mu')<\log|\lambda_1|$ である。

つまり μ は topological entropy $\log|\lambda_1|$ を attain する唯一の不変測度である。

一方，Sinai [6] によれば

v) $h(A;m)=\log|\lambda_1|$

である。$h(T;m\circ\varphi)=h(A;m)=\log|\lambda_1|$ だから，iv) により，$m\circ\varphi=\mu$ である。(4) と合わせると

vi) $(\mathbb{T}^2, m, A)$ は Markov 変換 (Ω_M, μ, T) と同型であることが分る。Markov 変換の間の同型を直接作ることによって，vi) の系としてつぎの Adler-Weiss [1] の結果が得られる。

vii) $\mathbb{T}^2$ の2つのエルゴード的な群同型において，エントロピーが等しい（固有値の絶対値が等しい）ならば，それらは同型である。

また (Ω_M, μ, T) は混合的でもあるので，Friedman-Ornstein [3] の結果を使えば，

viii) $\mathbb{T}^2$ のエルゴード的な群同型は Bernoulli 変換であることも vi) の系として得られる。

付記 討論の中で，「時間変更によってエントロピーはどうなるか」という質問が江川氏から出された。測度によるエントロピーについては知られていて，エントロピーが0であること（したがって正であること）また有限であること（したがって無限大であること）は時間変更によって保存される，ということはその時にお答えした．その後，位相的なエントロピーについても，同じことが成りたつことが大野泰治郎氏によって示された。

文　献

〔1〕 R.L.Adler and B.Weiss: Entropy,a complete metric invariant for automorphisms of the torus, Proc.Nat.Acad.U.S.A. 57 (1967),1573-1576.

〔2〕 V.I.Arnold: Small denominators.I, Amer.Math.Soc.Translations Ser.2,46(1965),213-284.

〔3〕 N.A.Friedman and D.S.Ornstein: On isomorphism of weak Bernoulli transformations, Adv.in Math. 5(1970),365-394.

〔4〕 B.M.Gurevich: Construction of increasing partitions for special flows, Theory Prob.Appl. 10(1965),627-645.

〔5〕 M.D.Sklover: Classical dynamical systems on the torus with continuous spectrum, Izv.Vysš.Učebn.Matematika 1967,no.10 (65),113-124.

〔6〕 Ya.G.Sinai: On the notion of the entropy of dynamical systems, Dokl.Akad.Nauk SSSR 124(1959),768-771.

〔7〕 A.N.Kolmogorov: General theory of dynamical systems and classical mechanics, Proc.International Congress Math. in Amsterdam,VI(1954),315-333. (R.Abraham:Foundations of mechanics,Appendix D,Benjamin(1967).)

〔7〕 ―――― : On dynamical systems with an integral invariant on the torus, Dokl.Akad.Nauk SSSR 93(1953),763-766.

〔8〕 V.I.Arnold and Ya.G.Sinai: Small perturbations of the automorphisms of a torus, Sov.Math.Dokl. 3(1962),783-786.

〔9〕 M.I.Grabar': On time transformations in dynamical systems, Dokl.Akad.Nauk SSSR 109(1956),250-252.