

## トーラス上の保測変換についての補足 (I)

東教大 理 小和田 正

十時氏の講演では、トーラス上の力学系の話題として、微分方程式で定義される力学系の時間変更の問題と、群同型の測度論的同型問題について論じられたが、ここでは、それら二つの話題に関係のあることを、二、三補足したい。

### 群同型の位相的同型問題

$M_2$  を 2次元トーラス,  $A_i$  を  $M_2$  の連続な群同型とする。  
( $i=1,2$ ) この時 かつ  $A_1$  と  $A_2$  が位相同型か、即ち

$$\varphi^{-1}A_1\varphi = A_2$$

と存在する  $M_2$  の homeomorphism がいつ存在するかというのが、我々の問題である。むしろかえれば、群同型 (Anosov system の一例) の位相的特性を決定する不変量をみいだすことである。

$M_2$  上の Haar measure  $\mu$  を考えることにより、群同型  $A$  を測度論的な力学系  $(M_2, \mu, A)$  とみたときの不変量の一つが、

エントロピーであることが知られているが、エントロピーは位相的不変量ではない。測度論的同型ではあるが位相同型ではない群同型の組が存在することが知られているからである。

$M_2^\wedge$  を群  $M_2$  の character group とする。我々の結果は次の通りである。

定理. 群同型  $A_1, A_2$  は次の式をみたす  $\lambda, \varphi_k$  が存在する時、またその時に限り位相同型である。

$$\varphi_1(M_2^\wedge) = \varphi_2(M_2^\wedge) \text{ 且 } \varphi_k(A_k^* \hat{g}) = \lambda \varphi_k(\hat{g}) \quad k=1, 2 \quad (*)$$

ここで、 $\lambda$  は実数、 $\varphi_k$  は  $M_2^\wedge$  の  $R_2 \sim$  の isomorphic embedding,  $A_k^*$  は  $A_k$  の transpose である。

系 群同型  $A_1, A_2$  が位相同型になるのは代数的同型  
即ち、或群同型  $B$  が存在して  
unimodularな  $B^{-1}A_1B = A_2$

が成立する時、かつその時に限る。

注. 定理の条件 (\*) をみたす  $\varphi_k$  が存在するものとする。

この時、 $\{g_\lambda^{(k)}\}$  と

$$(g_\lambda^{(k)}, \hat{g}) \equiv \exp\{i\langle \lambda, \varphi_k(\hat{g}) \rangle\}, \quad \hat{g} \in M_2^\wedge$$

によって定義すると  $\{g_\lambda^{(k)}\}$  は  $M_2$  の 1-parameter subgroup で、かつ  $M_2$  を dense である。

$$\Sigma_t^{(k)} g = g + g_t^{(k)}, \quad g \in M_2 \quad -\infty < t < +\infty$$

とすると  $(M_2, \mu, Z_t^{(k)})$  は 離散スペクトルを持つ ergodic flow であり、そのスペクトルは  $\{\varphi_k(g), \hat{g} \in M_2^{\wedge}\}$  である。

これに対して、Halmos-Neumann のよく知られた結果により、写像  $\sigma$  がつくれる。

$$\sigma Z_A^{(1)} \sigma^{-1} = Z_A^{(2)} \quad (**)$$

となるが、更に  $\sigma A_1 \sigma^{-1} = A_2$  でありこの  $\sigma$  は 連続な群同型であることがわかる。

$\sigma$  の構成をみると、 $\sigma$  は 1-parameter group  $\{g_t^{(1)}\}$  を  $\{g_t^{(2)}\}$  に写している、即ち flow  $\{Z_t^{(1)}\}$  の軌道を  $\{Z_t^{(2)}\}$  の軌道にうつす写像により  $A_1$  と  $A_2$  は 同型になっている。

更に、容易に

$$A_k^{-1} Z_t^{(k)} A_k = Z_{\lambda t}^{(k)} \quad (***)$$

が成立している。即ち  $A_k$  は  $\{Z_t^{(k)}\}$  の軌道を保っている。

以上の考察をまとめれば、homeomorphism  $\sigma$  は (\*\*\*) をみたす flow の軌道同士の mapping から構成されることがわかる。このおろる方法は Arnold-Sinai が 群同型の small perturbation の安定性を調らべた方法と同様なものである [伊藤氏の講演参照]。かゝる方法は 強制力関数をもつ非自律系の perturbation の問題にも有効である。上の定理は  $n$ 次元の群同型の場合にも、次元を取替え、 $\lambda$  のか

わりには regular matrix で  $\varphi_k(A_k^* \hat{g}) = T^* \varphi_k(\hat{g})$  をみたす  $\varphi$  のとすればその  $\varphi$  が成立する。

$A_k$  を  $n$  次元トラス  $M_n$  の群同型、 $\gamma_k$  を固有ベクトル、 $\lambda$  を実固有値とする。  $\varphi_k(e_j) = \gamma_j^{(k)}$ ,  $e_j = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots)$ ,  $\gamma_j^{(k)} = \gamma_k$  の  $j$  成分とする。  $\varphi_k$  を  $M_n$  に自然に拡張したとすべし、 $\varphi_k$  が isom. にならば  $\varphi_k$  から同様に  $\Gamma$  の同型写像  $\sigma$  が構成されるが、このことは、 $A_k$  の固有値と固有ベクトルから同型写像がつけられることがあることを示す。

時間変更の問題:

前注で構成された flow  $\{Z_t^{(k)}\}$  は微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma^{(k)}$$

で定義されるものに一致する、但し  $\gamma = \frac{\gamma^{(k)}}{\gamma_1^{(k)}}$ 。  $S_t^{(k)} \equiv Z_{\lambda t}^{(k)}$  とお

くと  $S_t$  を定める微分方程式は  $\frac{dx}{dt} = 1/\lambda$ ,  $\frac{dy}{dt} = \gamma^{(k)}/\lambda$

となる。これは十時侯の講演に於ける  $\frac{dx}{dt} = 1/H(x, y)$ ,  $\frac{dy}{dt} = \gamma/H$

に於いて  $H(x, y) \equiv \lambda$  の場合についている。我々の式 (\*\*\*) は

flow  $\{Z_t^{(k)}\}$  は flow  $\{S_t^{(k)}\}$  に時間変更  $\tau = \tau(t, g) = \lambda t$  に

いて同型写像  $A^{(k)}$  によって同型にうつっていることを示す。こ

れは一般に二つの flow  $(\Omega, T_t^{(1)}, \mu_1)$   $(\Omega, T_t^{(2)}, \mu_2)$  の同

型問題に於いて  $\mu_1 = \mu_2$  の case の時間変更  $\sigma_{T_t^{(1)} \circ \omega}^{-1} = T_{\tau(t, \omega)}^{(2)} \circ T_t^{(1)} \omega$

は  $\tau(t, \omega) = \lambda t$  (a.e.  $\omega$ ) に限る (Sinai) の事象例からみて興味深い。