

V. I. Arnold の仕事の周辺からの
二・三の話題

京大 理 丹羽敏雄
理大 工 大槻舒一

我々がこれから問題にしようとするものは大別すれば二つにわけられる。一つは積分可能系を擾動して得られる系の解の time global な性質。特に不変概周期運動の存在と、その近傍における解の $-\infty < t < \infty$ における振舞いと調べることである。もう一つは微分方程式の局所的な性質。特に singular point のまわりの解の性質を調べることである。この事は normal form の問題と密接に関連するか、resonance がある場合、困難な問題である。それは自然に singular point をもつ微分方程式の deformation とその bifurcation の問題につながる。

(I) Time global problem.

微分方程式を調べるのによく使われる武具は“変換”と“擾動”である。

system (M, X) を考える. M は phase space であり X は系の運動を定める M 上の微分方程式 $\dot{x} = X(x)$ は vector field である. X から定まる解を表わす 1 parameter group $\{ \mathcal{P}_t \}$ で表わす: $\mathcal{P}_t = \text{Exp } tX$.

さて system (M, X) に特別な (くみ, 例えは) 不変性 (線型性) をもつとか, お互いに独立な subsystems の和にわかれるとか, 対称性があるとか といった場合には,

system (M, X) の性質がよくなる事がある. 変換理論は「わかれば, かくされたところ」を「くみ」を見出す方法であるといえよう. (石井氏の講演を参照せよ) それに対して擾動の方法は, 言わば「system (M, X) から「くみ」特別な system $(M^{(0)}, X^{(0)})$ に近い場合には $(M^{(0)}, X^{(0)})$ の性質から (M, X) のどんな性質がえらわれるかを見る.

例として, 2次元トーラス T^2 の cotangent bundle $M = T^*(T^2) \cong T^2 \times \mathbb{R}^2$ を phase space として Hamiltonian system を考える. Hamiltonian とは 2次元形式 ω をもつものとする.

$$\begin{aligned} H(p_1, p_2; q_1, q_2) &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + \varepsilon(\omega q_1 - 1 \\ &\quad + \frac{\omega}{2} p_1^2 \omega q_2) \\ &\equiv H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q) \quad (H_\varepsilon) \end{aligned}$$

$\varepsilon = 0$ の場合は 系は直ちに積分可能である

$\phi = (p, p_2) = (\omega_1, \omega_2) = \omega = \text{一定}$ は不変な sub-manif. を定め. T^2 上の運動は $\omega \in \mathbb{R}$ 振動数とする. 概周期運動である. $\omega_1/\omega_2 = \text{有理数}$ の場合は. 周期的である. sub-manif. はさらに小さな sub-manif. に分割される. これらのことは図式的に... 又は次の f, g に... する.

(i) $\omega_1/\omega_2 = \text{無理数}$ の場合

$(T^2, \tau_t^\omega) \in T^2$ 上の $\omega \in \mathbb{R}$ 振動数とする. 概周期運動である: $\tau_t^\omega g = g + t\omega \pmod{2\pi}$

$\exists \psi^\omega: T^2 \longrightarrow M$: injection

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow \tau_t^\omega & \supset & \downarrow \phi_t^{(\omega)} \\ \psi^\omega & T^2 & \longrightarrow & M \end{array}$$

(ii) $\omega_1/\omega_2 = \text{有理数}$ の場合

$(T^1, \tau_t^\theta) \in T^1$ 上の rotation.
 $\tau_t^\theta x = x + t\theta \pmod{1}$

$\exists \psi^\theta: T^1 \longrightarrow M$: injection.

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow \tau_t^\theta & \supset & \downarrow \phi_t^{(\omega)} \\ \psi^\theta & T^1 & \longrightarrow & M \end{array}$$

問題は $\varepsilon \ll 1$ ($\varepsilon \neq 0$) と (T_ε 場合と) なるか...) である。

結果は (i) の場合、大部分の ω に対して 概周期運動 (T^2, τ_ω) は保存される。その理由の \rightarrow は次のようである。

摂動系 (H_ε) の $M = T^*(T^2)$ 上の vector field $\varepsilon X^{(\varepsilon)}$ で表わすとき、 (H_0) の不変多様体 $Z^\omega(T^2)$ 上の $X^{(\varepsilon)}$ の normal component to $Z^\omega(T^2)$ の平均がきえる：

$$\int_{Z^\omega(T^2)} X^{(\varepsilon)} \text{ の normal component to } Z^\omega(T^2) \\ = 0$$

$$\left(\because \oint_{Z^\omega(T^2)} H_1 dg = 0 \right)$$

この結果はただちに (T^2, τ_ω) の保存を意味する「カ
根拠の一つにはなりえる。それに并(て (2) の場合 (我々
は以下 resonance がある場合と...)) は事情はた
び異なる。まずもつて上の平均がきえないのである。この
事情と上の例でみてみよう。

例えば $\omega = (\omega_1, \omega_2)$ とし $\omega_1 = 0, \omega_2 \neq 0$ の場合を考慮せよ。この場合 invar. manifold

(T^1, τ_t^0) は

$$T^1 = \{ (q_1, q_2, p_1, p_2) ; \quad \begin{array}{l} q_1 = q_1^{(0)} \\ p_1 = 0, \quad p_2 = \omega_2 \end{array} \}$$

$$\tau_t^0 = \tau_t^\omega : \quad q_2 \rightarrow q_2 + \omega_2 t \pmod{2\pi}$$

で与えられる。 (H_ε) の $\tau^0(T^1)$ の近傍においてこの一次近似としては

$$\begin{aligned} \bar{H} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H(q, p) dq_2 \\ &= \frac{1}{2} (p_1^2 + p_2^2) + \varepsilon (\cos q_1 - 1) \end{aligned}$$

ε Hamiltonian とし $\mu > 0$ system を考えるのが妥当である (averaging method) 特2の場合には $\mu = 0$ の場合に当る。

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q_1} = \varepsilon \sin q_1$$

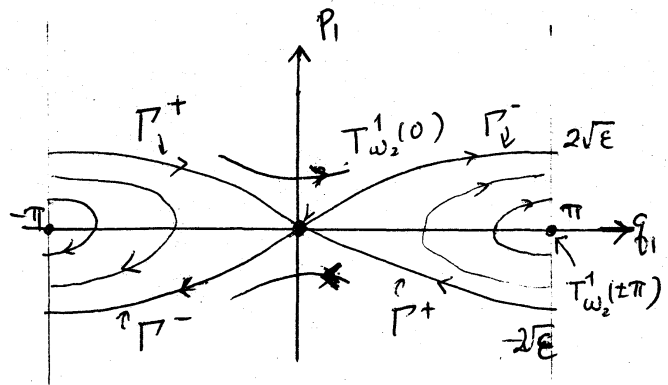
$$\dot{q}_1 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_1} = p_1 \quad (\bar{H}_\varepsilon)$$

$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial \bar{H}}{\partial q_2} = 0$$

$$\dot{q}_2 = \frac{\partial \bar{H}}{\partial p_2} = p_2$$

この system は積分可能であり、乙次の図で示される。

これは (H_0)
 の resonance-torus
 $(T^2, \tau_t^{(0, \omega_2)})$
 が $|p_1| \sim \sqrt{\epsilon}$
 の幅に小さくなったことを
 意味する。

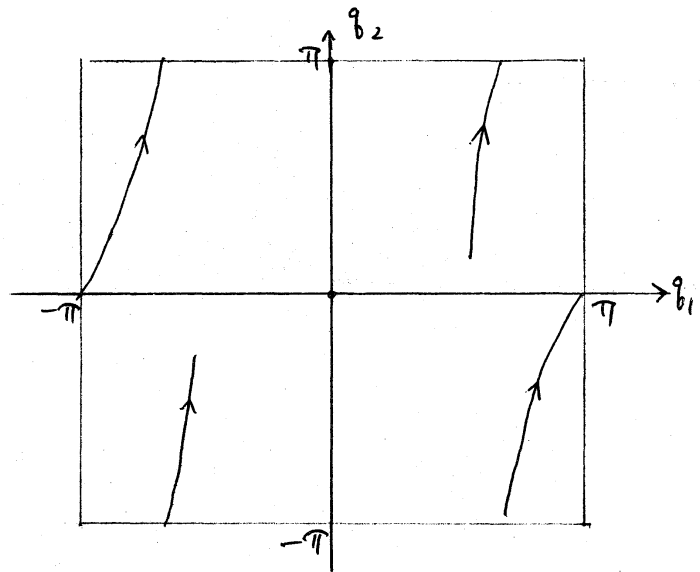


(かも invariant
 tori $(T^1, \tau_t^{\omega_2})$
 達は

$$T^1_{\omega_2}(0) = \{ (q, p) ; \\ p_1 = 0, p_2 = \omega_2, q_1 = 0 \}$$

と

$$T^1_{\omega_2}(\pm\pi) = \{ (q, p) ; \\ p_1 = 0, p_2 = \omega, q_1 = \pm\pi \}$$



ϵ 除いて ϵ をわけて $\epsilon \rightarrow 0$ する。後者は "elliptic" invariant
 torus であり) その周りには invariant quasi-periodic
 motions でかこまれてくる。前者の存在は特に面白い
 "hyperbolic" invariant torus である。 $\epsilon = 1$ は
 安定な separatrix P^+ と不安定な separatrix P^-
 (この場合 P^+ と P^- は重なっている) が出てくる。
 system (H_ϵ) に戻す。

$$\dot{p}_1 = -\frac{\partial H_\varepsilon}{\partial \vartheta_1} = \varepsilon \sin \vartheta_1$$

$$\dot{\vartheta}_1 = \frac{\partial H}{\partial p_1} = (1 + \varepsilon \mu \cos \vartheta_2) p_1 \quad (H_\varepsilon)$$

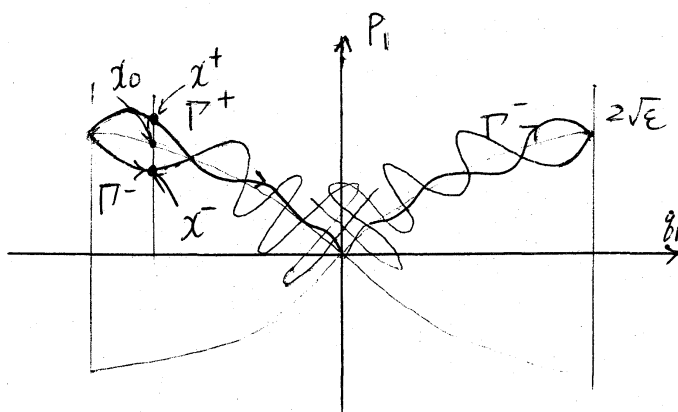
$$\dot{p}_2 = -\frac{\partial H}{\partial \vartheta_2} = \frac{\varepsilon \mu}{2} p_1^2 \sin \vartheta_2$$

$$\dot{\vartheta}_2 = \frac{\partial H}{\partial p_2} = p_2$$

一般に 摂動した場合 "elliptic" invariant torus はつぶれるか. "hyperbolic" invariant torus は保存される. 我々の場合は $T_{\omega_2}(0)$, $T_{\omega_2}(\pm\pi)$ は共に不変の子を保存されている. それでは separatrices T^\pm はどうなるであろうか. 結果はそれぞれを少し歪められた形に残り, 摂動前に重なり合った T^+ と T^- が分離される. (かもそれらは交わる. これは hyperbolic invariant torus $T_{\omega_2}(0)$ のかわりの様子を非常に複雑にし. (H_ε) の積分不可解性の原因となる. この現象は最初 Poincaré によって発見された. 以下にこの現象を説明する.

まず T^+ がどのように変化するかをみよう. その為には $\vartheta_2 = 0$, $H = h = \text{一定}$ で定まる cross section を考えるのが有効である. この上での T^+ の動きを調べよう.

これをみるには
 \mathcal{P}^+ 上の軌道に
 対しての H_0 の変
 化速度の便利
 である。



cross-section $q_2=0, H=h=一定$

$$\frac{dH_0}{dt}$$

$$= \{H, H_0\}$$

$$= -\varepsilon^2 \mu \sin q_1 \cdot \omega q_2 \cdot P_1$$

$$H_0(x^+) - H_0(\infty)$$

$$x^+ \in \mathcal{P}^+$$

$$= H_0(x^+)$$

$$\because H_0(\infty) = 0$$

$$= \int_{-\infty}^0 \{H, H_0\} dt$$

$$= \int_{-\infty}^0 \{H, H_0\} dt + o(\mu)$$

お1の積分は真の解にそつこの積分であり、お2の積分
 は $(H \varepsilon)$ の解にそつこの積分である。

同様に $x^- \in \mathcal{P}^-$ に対し

$$H_0(x^-) = \int_{-\infty}^0 \{H, H_0\} dt + o(\mu)$$

$$\therefore H_0(x^-) - H_0(x^+) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_0\} dt + o(\mu)$$

= 2 積分は (H_ε) の解に τ, τ_0 による。と τ_0 でその解は次のように表わされる。

$$p_1(t) = 2\sqrt{\varepsilon} / \operatorname{ch} \sqrt{\varepsilon}(t - t_0)$$

$$q_1(t) = 2 \cot^{-1}(-\operatorname{sh} \sqrt{\varepsilon}(t - t_0))$$

$$q_2(t) = \cos \omega_2 t = \cos \omega t$$

これは $t = t_0$ のとき $p_1 = 2\sqrt{\varepsilon}$, $q_1 = -\pi$ なる解である。

従って

$$\begin{aligned} & H_0(x^-) - H_0(x^+) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} -\varepsilon^2 \mu \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\operatorname{ch} \sqrt{\varepsilon}(t - t_0)} \sin(2 \cot^{-1}(-\operatorname{sh} \sqrt{\varepsilon}(t - t_0))) \cos \omega t dt \\ &= -4\sqrt{\varepsilon} \varepsilon^2 \mu \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\varepsilon} t}{\operatorname{ch} \sqrt{\varepsilon} t} \sin \omega t dt \right) \sin \omega t_0 \\ &= \left(-\varepsilon \mu \frac{\pi \omega^2}{2 \operatorname{sh} \frac{\pi \omega}{\sqrt{\varepsilon}}} \right) \sin \omega t_0 + o(\mu) \end{aligned}$$

以上の場合 q_2 に関する対称性から $t_0 = 0$ のとき、
即ち $q_1 = -\pi$ において $H_0(x^+) = H_0(x^-)$ である。

自由度が3以上の場合は、さらに複雑な現象がおこる。
このことから instability zone の topological in-
stability を引きおこすことが V. I. Arnold によつて示さ
れた。

(II) Local Problem.

原点の近傍において微分方程式を考える。

$$\dot{x} = v(x) \quad x \in U \subset \mathbb{R}^n \quad (1)$$

(U: open nbd of 0)

a) (1) が原点において non-singular な場合、すなわち
 $v(0) \neq 0$ の場合、次のことを知られてゐる。

$$\exists z: \mathbb{R}^n \supset V \longrightarrow U \subset \mathbb{R}^n : \text{diffeo}$$

$$0 \longmapsto z(0) = 0$$

すなわち $\dot{y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ の解は (1) の解に対応する。

(1) が parameter に依存する場合、微分同型 z も para-
meter に smooth に依存する。

このように、non-singular な点の近傍において (1) は局所(4)
にはほとんど完全にわかったといふことができる。それでは singular
な点の近傍において (1) はどうであるか?

$$v(0) = 0 \quad \text{と} \quad \text{し.}$$

$$A = \frac{\partial v}{\partial x}(0) \quad \text{と} \quad \text{する.}$$

A の固有値を $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$

$$n^+ = \#\{k; \operatorname{Re} \lambda_k > 0\}$$

$$n^- = \#\{k; \operatorname{Re} \lambda_k < 0\}$$

$$n^0 = \#\{k; \operatorname{Re} \lambda_k = 0\}$$

と置き、 $n^0 = 0$ の場合、 $A \neq 0$ は (1) は non-degenerate singular point である。

b) (1) の原点が non-degenerate sing. pt である場合、
 もはや (a) のようにある微分同型で (1) をかんたんな形に写換えるわけにはいかない。

(しかしながら topological equivalence の class にはいって、やはりある 位相同型によって (1) をかんたんな形に写換えることができる。

$$\exists h: \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n^+} \times \mathbb{R}^{n^-} \supset \nabla \rightarrow U \subset \mathbb{R}^n: \text{homeo.}$$

$$(y^+, y^-) \mapsto x$$

s.t.

$$\begin{cases} \dot{y}^+ = y^+ \\ \dot{y}^- = y^- \end{cases}$$

の解は (1) の解になる。

parameter に依存する場合も a) と同様である。

それでは degenerate の場合はどうだろうか？
 この問題を考えるに、"あつる generic" を観念から始めると、もし単独の微分方程式であつた場合はたゞ
 1 点 $\text{non-degenerate sing. pt}$ をもつて (2) も、少し (1) を
 変位させるだけで $\text{non-degenerate sing. pt}$ をもつて
 のにかわるからであり、一般に $\text{non-degen. sing. pt}$
 をもつ系が generic であるからである。しかしながら
 system が近似的に (しか知りえない) とき、あるいは、
 parameter に depend (た system の族を考えたけ
 り) する"と"した場合に、"generic" を観念からして
 $\text{degenerate sing. pt}$ を上げ通すことはできない。こ
 の向の事情をより定式化する為には、singularity の
 codimension なる概念が必要になるのでこれを少し
 説明する：

J^k を \mathbb{R}^n の原点の近傍における vector field の
 k -jets の作る k -jet space とする。座標系を固定すれば、
 k 階までの Taylor 級数の係数と考えよう。例えば
 $k=1, 2$ に対しては、

$$J^1 \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \rightarrow (x, u_0(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x))$$

$$J^2 \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n^2} \times \mathbb{R}^{n \times \frac{n(n+1)}{2}} \rightarrow (x, u_0(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x), \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x))$$

$$\mathcal{S} = \{ (x, u_0(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x), \dots) \in J^k; u_0(x) = 0 \}$$

$\therefore \text{codim } \mathcal{S} = k$ 一般に

$$\text{codim } \mathcal{S} = n$$

である。従って b) の場合の singularity は codim n

である ()。単独の方程式 (1) は J^k の中で

$$U: X \rightarrow (x, u_0(x), \frac{\partial u}{\partial x}(x), \dots) \in J^k$$

$1 \leq k \leq 2$

n の submanif. を定める。従ってそれは

一般に \mathcal{S} と transversal に交わるから (1) は (non-degenerate の) singular pt を表われるのはさけがたい。

が degenerate の sing. pt は codim は $\frac{n(n+1)}{2}$ 以上であるから一般には交わらない、すなわち、単独の方程式に對

しては generic 観定から見て deg. sing. pt を考へる必要はない。しかしながら方程式が parameter に依存する

場合は一般に deg. sing. pt が現われるのはさけがたい。一般に

k -parameters に depend する方程式の後を考察する場合は $k+n$ 以下の codim をもつ singularity をさ

けることは正しくないのである。(以下、通常行なわれる)

一般に $k+n$ の codim を codim k とする)

±2 (1) が codim k の singular pt を $t \rightarrow t(2)$ の deformation を考える。その場合ある意味で一番大事な deformation (その...) ものかあると (2) を考えるのが重要である。(かかる deformation を versal deformation と...) 例えは topological orbital equivalence のカテゴリー - その定義を与える。

定義 1. (1) $_{\epsilon}$ $\dot{x} = v(x, \epsilon)$ と
(2) $_{\epsilon}$ $\dot{y} = w(y, \epsilon)$ か

top. orb. equivalent であるとは、 ϵ は連続的に依存する x から y への同相写像 $h(\cdot, \epsilon)$ の族があり、 $(1)_{\epsilon}$ の (oriented) phase curves と $(2)_{\epsilon}$ のそれらに写すものがあるときを...

2. (3) $_{\mu}$ $\dot{z} = u(z, \mu)$

か $(1)_{\epsilon}$ から induce されたとは、連続写像 $\epsilon = \varphi(\mu)$

があり、 $u(x, \mu) = v(x, \varphi(\mu))$

となるときを...

3. deformation $(1)_{\epsilon}$ (= family $(1)_{\epsilon}$ の germ) が $\dot{x} = v(x, 0)$ の (topological) versal deformation であるとは、任意の他の $\dot{x} = v(x, 0)$ の deformation から $(1)_{\epsilon}$ から induce された deformation

に equivalent である $\varepsilon < \varepsilon_0$) .

例として (b) の結果は codim 0 の singular pt の versal deformation は存在し (2) かつ (3) で述べられた \mathbb{R}^n の trivial deformation かつ (3) であることを示すことができる。

それでは codim 1 の singularity $\varepsilon \in \mathbb{C}$ の場合はどうだろうか? この場合は次の二つの場合があることかわかる。

$$(i) \quad n_0 = 1 \quad \text{かつ} \quad \lambda_1 = 0$$

$$(ii) \quad n_0 = 2 \quad \text{かつ} \quad \lambda_1, \lambda_2 \text{ が pure imaginary かつ } \lambda_1 = \bar{\lambda}_2 .$$

これらの場合はどちらも versal deformation $\varepsilon \in \mathbb{C}$ があり、それは次のようである。

$$(i) \quad \begin{cases} \dot{x} = \pm x^2 + \varepsilon & x \in \mathbb{R}, \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \dot{x}^+ = x^+ & x^+ \in \mathbb{R}^{n^+} \\ \dot{x}^- = -x^- & x^- \in \mathbb{R}^{n^-} \end{cases}$$

$$(ii) \quad \begin{cases} \dot{z} = z(i + \varepsilon \pm z\bar{z}) & z \in \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2, \quad \varepsilon \in \mathbb{R} \\ \dot{x}^+ = x^+ & x^+ \in \mathbb{R}^{n^+} \\ \dot{x}^- = -x^- & x^- \in \mathbb{R}^{n^-} \end{cases}$$

方法1) 次 Reduction Theorem と normal form
 の変換の理論を用いる。

Reduction Th.

$$\dot{x} = v(x, \varepsilon) \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^l$$

$$v(0, 0) = 0, \quad \text{かつ} \quad n^0 = k \geq 0 \text{ あり}$$

これらのは後述の後に equivalent である。

$$\begin{cases} \dot{p} = w(p, \varepsilon) & p \in \mathbb{R}^k, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}^l \\ \dot{q} = -q & q \in \mathbb{R}^{n^-} \\ \dot{r} = r & r \in \mathbb{R}^{n^+} \end{cases}$$

codim 2 以上の場合は余りわかっている。

References

- [1] V. I. Arnold : Small denominators I, on the mapping of a circle into itself, Izv. Akad. Nauk. serie Math, 25. 1 (1961) p. 21-86 \cong Transl. Amer. Math. Soc. serie 2. V. 46 (1965) p. 213-284
- [2] ——— : Proof of a theorem of A. N. Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the hamiltonian, Usphi. Math. Nauk. V18 N5 (1963) p. 13-40 \cong Russian Math. Surveys V18 N5 (1963) p. 9-36
- [3] ——— : Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics, Usphi Math. Nauk. V18 N6 (1963) p. 91-196 \cong Russian Math. Surveys V18 N6 (1963) p. 85-193
- [4] ——— : Instability of dynamical systems with many degrees of freedom, D. A. N. 156 N 1

(1964) p 9~12 \cong Sov. Math. Dok. V5 N3 (1964) p581-585

[5] ———, A. Avez : Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier Villard.

[6] C.L. Siegel - J.K. Moser : Lectures on celestial mechanics, Springer

[7] V.I. Arnold : On matrices depending on parameters, Uspchi. Math. Nauk 26. 2 (1971) p101~104
 \cong Russian Math. Surveys 26. 2 (1971) p29~43

[8] ——— : Lectures on Bifurcations in Versal families, Uspchi Math. Nauk 27. 5 (1972) \cong Russian Math. Surveys 27. 5 p 54~123.

[註] [5], [8] には次の文献表がある。