数理解析研究所講究録
第 246 巻 1975 年 1-13

コホモロジー複素射影空間の上の semi-free な S^1-作用について

津田塾大　吉田朋好

§1. Statement of results

X^{2n} を向きづけられた closed C^∞ $2n$-多様体とする。

定義：X^{2n} が コホモロジー複素射影空間（以下 coh. $\mathbb{C}P^n$ とかく）であるとは、X の整係数の 2 次元コホモロジー群 に含まれる元 $\alpha \in H^2(X;\mathbb{Z})$ があって、$H^{**}(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$（環同型）となること。

上の α について、Kronecker pairing $\langle \alpha^n, [X] \rangle = 1$ と仮定してよい。（ここに $[X]$ は X の基本類）。$p(X)$ を X の total ポントリャーギン類とし、formal に $p(X) = \prod(1+x_j^2)$ であるとする。このとき、X の $\hat{A}$-class が、

$$\hat{A}(X) = \prod(x_j/2)(\sinh x_j/2)^{-1} \in H^{**}(X;\mathbb{Q})$$

で定義される（$\mathbb{Q}$ は有理数体）。

Xの上のS^1-作用が、semi-free とは、${}^\forall x \in X$ について、その isotropy 群 G_x が、$G_x = \{e\}$ or S^1（eはS^1の単位元）であることを意味する。

定理 0.1.

Xを coh. $\mathbb{C}P^n$ とし、$H^{**}(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}[\alpha]/(\alpha^{n+1})$，$\alpha \in H^2(X;\mathbb{Z})$ とする。Xの上に、自明でない、smooth semi-free S^1-作用が存在するならば、

$$\hat{A}(X) = \left(\alpha / e^{\alpha/2} - e^{-\alpha/2}\right)^{n+1}$$

となる。

系 0.1.

$f: X^{2n} \to \mathbb{C}P^n$ を向きづけられた $2n$-次元 C^∞-closed-多様体Xから $\mathbb{C}P^n$ への homotopy equivalence とする。もし、Xが、自明でない、smooth semi-free S^1-作用をもつならば、$\hat{A}(X) = f^*\hat{A}(\mathbb{C}P^n)$ となる。

系 0.1 は $n = 3$ の場合には、X^6が $\mathbb{C}P^3$ に微分同相であることを意味する（D. Montgomery, C.T. Yang [ ]）。定理 0.1 は、spin^c-多様体に対する、Atiyah-Singer-Segal の index formula を用いてなされる。

§2. 準備

コホモロジー複素射影空間の上のS^1-作用についての、Bredon、Su、Petrie 等の結果で、後に必要なものを述べる。

Xを coh. $\mathbb{C}P^n$、αをコホモロジー生成元とする。$\phi: S^1 \times X \longrightarrow X$を、$X$の上の smooth な$S^1$-作用とする（この§では、semi-free は仮定しない）。$F = \cup F_j$を、ϕの固定点、とする（$\{F_j\}$はFの連結成分をあらわす）。各F_jは、向きづけ可能な smooth 部分多様体となる）。

命題 1.1.（G. E. Bredon [2], J. C. Su [5]）

各F_jは（ある$h_j \geq 0$に対して）coh. $\mathbb{C}P^{h_j}$である。そして、$\sum (h_j + 1) = n + 1$。α_jをαのF_jへの制限とすれば、α_jがF_jのコホモロジー生成元となる。

ηをXの上の複素 line bundle で$c_1(\eta) = \alpha$であるものとする（$c_1(\eta)$はηの first Chern 類）。我々は、ηをαに associate した line bundle とよぶ。Su（[5]）により、$H^2(X; \mathbb{Z}) = 0$ということから、ϕはηに lifting $\tilde{\phi}$をもつ。これは、次のことを意味する。$E(\eta)$をηの total space とするとき、$E(\eta)$の上の

smooth な S^1-作用 $\widetilde{\Phi}: S^1 \times E(\eta) \longrightarrow E(\eta)$ で、$^\forall s \in S^1$ に対し、$\widetilde{\Phi}(s,\ )$ が bundle map を与え、かつ、次の図式

$$\begin{tikzcd}
S^1 \times E(\eta) \arrow[r, "\widetilde{\Phi}"] \arrow[d, "1 \times q"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & E(\eta) \arrow[d, "q"] \\
S^1 \times X \arrow[r] & X
\end{tikzcd}$$

が、可換となるようなものが存在する（q は projection）。$p_j \in F_j$ とすれば、$\widetilde{\Phi}$ は ファイバー $q^{-1}(p_j)$ に 1次元の複素表現（S^1の）を誘導する。$t: S^1 = U(1)$ を標準的な S^1 の表現とみなせば、$q^{-1}(p_j)$ での表現は、t^{a_j}（a_j は整数）とかかれる。これを、我々は、$\widetilde{\Phi}|p_j = t^{a_j}$ とあらわす。このようにして、Φ の lifting（η での）$\widetilde{\Phi}$ があれば、整数の組 $\{a_j\}$ ができる。

$Z_k \subset S^1$ を 位数 k の 部分群とする。$F(Z_k) \subset X$ を $F(Z_k) = \{x \in X \mid G_x \supset Z_k\}$ と定義する。明らかに、$F(Z_k) \supset F$。

命題 1.2.（T. Petrie [4]）

$\{a_j\}$ は次の性質をもつ。

1). $i \neq j$ とする。$a_i - a_j \neq 0$ で、かつ、これは Φ と η のみに depend し、$\widetilde{\Phi}$ のとり方によらない。

2). p^r を素数の巾とする。 F の2つの(異なる)連結成分 F_i, F_j に対して、 $a_i - a_j \equiv 0 \pmod{p^r} \Longleftrightarrow$ F_i と F_j は、$F(\mathbb{Z}_{p^r})$ の同じ連結成分に含まれる。

§3. 固定点の性質

この§以下、semi-free な S^1-作用のみを扱う。

$\varphi: S^1 \times X \to X$ を、coh. $\mathbb{C}P^n$ X の上の、smooth、semi-free な S^1-作用とする。 F を φ の固定点とする。

命題 2.1.

F は丁度2つの連結成分からなる。

証明

命題 1.1 から、F は2つ以上の連結成分をもつ。 F が3つ以上の連結成分をもったとし、F_1, F_2, F_3 を相異なる連結成分とする。そにおける φ の lifting $\tilde{\varphi}$ を適当にとる。§2 でのべたように、3つの数の組 $\{a_1, a_2, a_3\}$ を得る。命題 1.2 から $a_i \neq a_j$ $(i \neq j)$。故に、ある $1 \leq i < j \leq 3$ に対して、$a_i - a_j$ はある素数 $p \geq 2$ でわれる。命題 1.2, 2) から、F_i と F_j は同じ $F(\mathbb{Z}_p)$ の連結成分に含まれ、$F(\mathbb{Z}_p) \neq F$ で φ が semi-free であることに矛盾する。 q.e.d.

さて、F_0とF_1を、Fの2つの連結成分とする。命題1.1により、F_0とF_1は各々 coh. $\mathbb{C}P^p$, coh. $\mathbb{C}P^q$, $p+q=n-1$となる。α_jをαのF_jへの制限とすれば、α_jがF_jのコホモロジー生成元となる($j=0,1$)。$\tilde{\Phi}$をそでのΦの lifting とする。$\tilde{\Phi}|P_j = t^{a_j}$ ($j=0,1$)とする。命題1.2 と semi-free (Φが) であることから、$|a_1-a_0| = 1$となる。そこで我々は、次のことを仮定する。

仮定(*)　$a_1-a_0=+1$

$\tilde{X}$をその sphere bundle (適当な metric のもとに) とする。$q: \tilde{X}\longrightarrow X$ を projection とすれば、qはXの上の principal S^1-bundle となる。Xの部分集合$A\subset X$に対して、$q^{-1}(A)$を$\tilde{A}$であらわすことにする。

補題 2.2

$H^*(\tilde{X};\mathbb{Z}) \cong H^*(S^{2n+1};\mathbb{Z})$, $H^*(\tilde{F}_0;\mathbb{Z}) \cong H^*(S^{2p+1};\mathbb{Z})$

$H^*(\tilde{F}_1;\mathbb{Z}) \cong H^*(S^{2q+1};\mathbb{Z})$

証明

Gysin 完全系列 による。　q.e.d

補題 2.3

$\tilde{F}_0$と$\tilde{F}_1$の$\tilde{X}$における linking 数は± 1。

証明

同変コホモロジー論とその locarization によって、証明される。 q.e.d.

さて、N_j を X における F_j の normal bundle とする。N_0 の fibre の次元は $2(q+1)$, N_1 の fibre の次元は $2(p+1)$ である。S^1 は N_j に bundle 自己同型写像によって作用する。この作用は、0-section を除いて、free である。N_0 と、N_1 に複素 vector bundle としての構造を、各々の fibre での S^1 の表現が、$\underbrace{t+\cdots+t}_{q+1}$, $\underbrace{t+\cdots+t}_{p+1}$ となるように入れる。この複素構造によって、N_0 と N_1 を複素 vector bundle とみなす:

命題 2.4

$c(N_j)$ を N_j の total Chern class とする。このとき、

$$c(N_0) = (1-\alpha_0)^{q+1}, \qquad c(N_1) = (1+\alpha_1)^{p+1}$$

となる。ここに α_j は α の F_j への制限。

§4. Index formula.

$K_{S^1}^*(X)$ を、X の equivariant K-theory とする。

X が coh. $\mathbb{C}P^n$ であれば，n が odd のとき，X は spin-多様体，n が even のときは，X は spin ^{c}-多様体としての構造をもつ。このことにより，TX を X の接 vector bundle とすれば，$K_{S^1}^*(TX)$ に orientation class $\delta_{S^1} \in K_{S^1}^*(TX)$ が存在して（T. Petrie [4]），Thom 同型 $K_{S^1}^*(X) \to K_{S^1}^*(TX)$ が $u \longmapsto u \cdot \delta_{S^1}$ $(u \in K_{S^1}^*(X))$ で定義される。TX が almost complex な構造をもつことから，Index homomorphism $Id: K_{S^1}^*(TX) \longrightarrow R(S^1)$ ($R(S^1)$ は S^1 の複素表現環）が定義される（[1]）。我々は，X の上の semi-free S^1-作用の場合に，$Id(u \cdot \delta_{S^1})$ を，固定点 F の情報を用いて，次にあらわす。

$\phi: S^1 \times X \longrightarrow X$ を coh. $\mathbb{C}P^n$，X の上の smooth semi-free S^1-作用とする。§3 と同様に $F = F_0 \cup F_1$ とする。

(i) n が odd のとき．

η を α に associate した line bundle とし，η での ϕ の lifting Φ で $\Phi | P_0 = 1$，$\Phi | P_1 = t$ $(P_j \in F_j)$ となるものをとり，この S^1 作用によって，η を S^1-bundle とみなす。

命題 3.1.

$Id(\eta^k \delta_{S^1}) \in R(S^1) = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ は，次の式で与えられ

る（ここに η^k は η の k 回 tensor 積）。

$Id(\eta^k \delta_{S^1}) =$

$$\left\langle e^{k\alpha_0}\hat{A}(F_0)\left(t^{-\frac{1}{2}}e^{\frac{\alpha_0}{2}} - t^{\frac{1}{2}}e^{-\frac{\alpha_0}{2}}\right)^{-(q+1)} t^{\frac{w}{2}},\ [F_0]\right\rangle$$

$$+$$

$$\left\langle e^{k\alpha_1}\hat{A}(F_1)\left(t^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{\alpha_1}{2}} - t^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\alpha_1}{2}}\right)^{-(p+1)} t^{k+\frac{w}{2}},\ [F_1]\right\rangle$$

ここに $\hat{A}(F_j)$ は F_j の $\hat{A}$-class，$[F_j]$ は F_j の基本類、$\langle\ ,\ \rangle$ は evaluation をあらわす。又、w は $p, q \not\equiv 0 \pmod 2$ ならば $w \equiv 0 \pmod 2$，$p, q \equiv 0 \pmod 2$ ならば $w \not\equiv 0 \pmod 2$ となるような整数である。（w は X の spin 構造 P（X の上の spin-bundle で $P \times_{spin} R^{24} \cong TX$ となるもの）への S^1-作用の lifting にともなってあらわれる数である）。

又、とくに $1 \in S^1$（単位元）に対しては、

$Id(\eta^k \delta_{S^1})(1) = \langle ch\, \eta^k \hat{A}(X), [X]\rangle$ となることを注意する。

n が even の場合も同様な式が得られる。

§5. 定理 0.1 の証明

最初に、$\mathbb{C}P^n$ の上の linear semi-free S^1-作用 Φ を

$$\Phi(t, [z_0, \cdots, z_n]) = [z_0, \cdots, z_p, tz_{p+1}, \cdots, tz_n]$$

,($t \in S^1$, $[z_0, \cdots, z_n] \in \mathbb{C}P^n$) で定義する。$\Phi$ の固定点は $F_0 = \mathbb{C}P^p \cup F_1 = \mathbb{C}P^q$ ($q = n-1-p$) となる。N_j を F_j の normal bundle とし、N_j に §3 に述べた様に複素 vector bundle としての構造を入れる。このとき、H を canonical Hopf bundle とすれば、$N_0 = \underbrace{\overline{H} + \cdots + \overline{H}}_{q+1}$, $N_1 = \underbrace{H + \cdots + H}_{p+1}$ となる ($\overline{H}$ は H の conjugate bundle)。

indeterminant X に対して、$A(X) = (X/2)(\sinh X/2)^{-1}$ とおく。定理 0.1 を証明するには、$\hat{A}(X) = A(\alpha)^{n+1}$ となることがいえればよい。

補題 4.1.

$$\hat{A}(X) = A(\alpha)^{n+1} \iff \hat{A}(F_0) = A(\alpha_0)^{p+1},\ \hat{A}(F_1) = A(\alpha_1)^{q+1}。$$

証明

($\Rightarrow$) $\hat{A}(X) = A(\alpha)^{n+1}$ を仮定する。命題 2.4) によって、$\hat{A}(N_0) = A(\alpha_0)^{q+1}$, $\hat{A}(N_1) = A(\alpha_1)^{p+1}$ である。$i_j : F_j \subset X$ を包含写像とすれば、$i_j^* \hat{A}(X) = \hat{A}(F_j)\hat{A}(N_j)$ から、$\hat{A}(F_0) = A(\alpha_0)^{p+1}$, $\hat{A}(F_1) = A(\alpha_1)^{q+1}$ を得る。

($\Longleftarrow$) $\hat{A}(F_0) = A(\alpha_0)^{p+1}$, $\hat{A}(F_1) = A(\alpha_1)^{q+1}$ を仮定する。
$c = c_1(H) \in H^2(\mathbb{C}P^n; \mathbb{Z})$ とし. $f : X \longrightarrow \mathbb{C}P^n$ を
$f^*(c) = \alpha$ となるような連続写像とする。 $f^*H = \eta$ となる。
単位元 $1 \in S^1$ に対し. $Id(\eta^k \delta_{S^1})(1) = \lim_{t\to 1} Id(\eta^k \delta_{S^1})(t)$
であり. 右辺は. §4に与えた公式により計算される。 F_0 が
coh. $\mathbb{C}P^p$, F_1 が coh. $\mathbb{C}P^q$ で α_j が F_j のコホモロジー生成元であることから. 命題3.1に与えられた公式の右辺は. $\mathbb{C}P^n$ の上の linear action Φ と $Id(H^k \delta_{S^1})$ に対応する公式と形式的に一致することがわかる。従って.
$Id(\eta^k \delta_{S^1})(1) = Id(H^k \delta_{S^1})(1)$ (for each k) を得る。
又、$Id(\eta^k \delta_{S^1})(1) = \langle ch\, \eta^k \hat{A}(X), [X] \rangle$. そして.

$$
\begin{aligned}
Id(H^k \delta_{S^1})(1) &= \langle ch\, H^k \hat{A}(\mathbb{C}P^n), [\mathbb{C}P^n] \rangle \\
&= f^* \langle ch\, H^k \hat{A}(\mathbb{C}P^n), [\mathbb{C}P^n] \rangle \\
&= \langle ch\, \eta^k A(\alpha)^{n+1}, [X] \rangle。
\end{aligned}
$$

故に. $\langle ch\, \eta^k \hat{A}(X), [X] \rangle = \langle ch\, \eta^k A(\alpha)^{n+1}, [X] \rangle$
(for each k) を得る。
$\{ch\, \eta^k,\ k = 0, 1, \cdots, n\}$ は $H^*(X; \mathbb{Q})$ の additive base
を与えるから. $\hat{A}(X) = A(\alpha)^{n+1}$ となる。 q.e.d.

上の補題により. 定理0.1を証明するには. $\hat{A}(F_0) = A(\alpha_0)^{p+1}$, $\hat{A}(F_1) = A(\alpha_1)^{q+1}$ を証明すればよい。 $S(\alpha) = \hat{A}(X)\, A(\alpha)^{-(n+1)}$

とおく。$S(\alpha)$ は有理係数の α^2 の巾級数である。$S(\alpha)$ の leading term が 1 であることはすぐわかるから、
$S(\alpha) = 1 + b_1\alpha^2 + b_2\alpha^4 + \cdots \quad (b_i \in \mathbb{Q})$ とおく。$S(\alpha) = 1$ がいえればよい。$\hat{A}(X) = S(\alpha)A(\alpha)^{n+1}$ であり、$\hat{A}(F_j) = i_j^*\hat{A}(X)\hat{A}(N_j)^{-1}$ であることから、$\hat{A}(F_0) = S(\alpha_0)A(\alpha_0)^{p+1}$, $\hat{A}(F_1) = S(\alpha_1)A(\alpha_1)^{q+1}$ となる。ここに、$S(\alpha_j) = 1 + b_1\alpha_j^2 + b_2\alpha_j^4 + \cdots$ である。

補題 4.2.

$$S(\alpha) = 1 \iff S(\alpha_0) = S(\alpha_1) = 1.$$

これは補題4.1のいいかえである。$S(\alpha_0) = S(\alpha_1) = 1$ を証明するには、§4 に与えた $Id(g^*\delta_{S^1})$ の公式が finite Laurent 級数であることから、$b_1 = b_2 = \cdots = 0$ を出すのであるが、詳細は略する。

References

[1] M. F. Atiyah and I. M. Singer : The index of elliptic operators I, Ann. of Math., 87, (1968), 484-530.

[2]. G. E. Bredon : The cohomology ring structure of a fixed point set, Ann. of Math., 80 (1964) 524 - 537

[3] D. Montgomery and C.T. Yang : Free differentiable actions on homotopy seven spheres II. Proc Conference on Transformation Groups, 125-134, Springer, New York, 1968.

[4] T. Petrie : Smooth S^1 actions on homotopy complex projective spaces and related topics, Bull. of Amer. Math. Soc. 78 (1972), 105-153

[5] J. C. Su : Transformation groups on cohomology projective spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 106 (1963), 305 - 318.