数理解析研究所講究録
第 248 巻 1975 年 98-103

多重特性根をもつ擬微分作用素に対する可解性と解の特異性の伝播について

都立大 理 大内 忠

§0. 擬微分作用素の可解性，正則性の議論は (x, ξ) 空間で局所化（超局所化）して論ずることが極めて有用であることが最近の一連の研究でより明らかになってきた。このノートで述べる多重度一定の実特性多様体をもつ作用素の可解性，解の特異性の伝播に関する結果もその方向からの考察で得られたものである。

§1. Ω を R^n の領域とする。(x, ξ) でもって $\Omega\times(R^n-\{0\})$ の点を表わし，$D=\dfrac{1}{\sqrt{-1}}\dfrac{\partial}{\partial x}$ とする。$L^m(\Omega)$ を order m の classical 擬微分作用素※の全体とする。$\Gamma\in\Omega\times R^n-\{0\}$ の open conic subset とする時 $L^m(\Omega,\Gamma)=\{P(x, D)\in L^m(\Omega);$ supp. $p(x,\xi)\subset\Gamma\}$ と定義する。

定義 作用素 $P\in L^m(\Omega)$ が一定の重複度の特性多様体をもつとは，その主シンボル p が $p=(p^1)^{m_1}(p^2)^{m_2}\cdots(p^s)^{m_s}$

※ $P(x, D)$ の symbol を $p(x,\xi)$ とすると $p(x,\xi)\sim\sum_{k=m}^{-\infty}p_k(x,\xi)$ $p_k(x, t\xi)=t^k p_k(x,\xi)$ $(t>0)$ と漸近展開される作用素

と次の条件を満す p^i $(i=1,2,\cdots,s)$ の積に分解されることをいう。各 p^k は実数値で，その特性多様体 $\Sigma_{p^k}=\{(x,\xi)\in\in\Omega\times R^n-\{0\};\ p^k(x,\xi)=0\}$ は単純※で，$j\neq k$ ならば $\Sigma_{p^j}\cap\Sigma_{p^k}=\phi$ である。

まず結果を擬微分作用素に関する割り算の定理（Weierstrap の予備定理的な表現）で述べよう。これは超局所的考察の立場から重要である。

定理 1. $P\in L^m(\Omega)$ の主シンボル $p(x,\xi)$ が (x_0,ξ_0) の錐状近傍 Γ で $p(x,\xi)=a(x,\xi)\,q(x,\xi)^k$ （$a(x,\xi)$, $q(x,\xi)$ real）と分解されるとしよう。$q(x,\xi)$ は ξ について正斉次 1 で，$q(x_0,\xi_0)=0$ かつ $\nabla_\xi q(x_0,\xi_0)\neq 0$ とし，$a(x_0,\xi_0)\neq 0$ とする。また $G(x,D)\in L^0(\Omega,\Gamma)$ で (x_0,ξ_0) の錐状近傍 Γ' $(\Gamma'\subset\Gamma)$ でそのシンボル $g(x,\xi)$ は 1 となるようなものがあって，次の (1)〜(4) のいずれかが成り立っているとする；

(1) $$G(x,D)P(x,D)\equiv G(x,D)A(x,D)Q(x,D)^k+B'_{m-1}(x,D)$$
$$(\mathrm{mod}\ L^{m-2}(\Omega,\Gamma'))\qquad(k\geqq 2)$$

(2) $$G(x,D)P(x,D)\equiv G(x,D)A(x,D)Q(x,D)^k+B'_{m-2}(x,D)Q(x,D)$$
$$(\mathrm{mod}\ L^{m-2}(\Omega,\Gamma'))\qquad(k\geqq 3)$$

(3) $$G(x,D)P(x,D)\equiv G(x,D)A(x,D)Q(x,D)^k+B'_{m-3}(x,D)Q(x,D)^2+$$
$$+B^2_{m-3}(x,D)Q(x,D)\qquad(\mathrm{mod}\ L^{m-3}(\Omega,\Gamma'))\qquad(k\geqq 4)$$

※ $p^k(x_0,\xi_0)=0\ \Rightarrow\ \nabla_\xi p^k(x_0,\xi_0)\neq 0$

(4) $G(x, D)\, p(x, D) \equiv G(x, D) A(x, D) Q(x, D)^{k} + B^{1}_{k-3}(x, D) Q(x, D)^{2} + B^{2}_{k-2}(x, D) \pmod{L^{m-3}(\Omega, \Gamma')}$ $(k \geq 3)$

この時，超局所的に次の作用素に変換できる※

(1)の場合

※※(a-1) $\xi_n^{k} + \gamma^{1}_{k-1}(x', x_n, \xi', \xi_n) + \cdots\cdots$

(2)の場合

(a-2) $\xi_n^{k} + \gamma^{1}_{k-2}(x', x_n, \xi', \xi_n)\xi_n + \cdots\cdots$

(3)の場合

(a-3) $\xi_n^{k} + \gamma^{1}_{k-3}(x', x_n, \xi', \xi_n)\xi_n^{2} + \gamma^{2}_{k-3}(x', x_n, \xi', \xi_n)\xi_n + \cdots$

(4)の場合

(a-4) $\xi_n^{k} + \gamma^{1}_{k-3}(x', x_n, \xi', \xi_n)\xi_n^{2} + \gamma^{2}_{k-2}(x', x_n, \xi', \xi_n) + \cdots$.

さて (a-1)～(a.4)の場合，$\xi_n = 0$ の錐状近傍で超局所的な parametrix が存在する条件を求めよう。それは，例えば

(b-1) $\mathrm{Im}\, \gamma^{1}_{k-1}(x', x_n, \xi', 0) \neq 0$

(b-2) $\mathrm{Im}\, \gamma^{1}_{k-2}(x', x_n, \xi', 0) \neq 0$

(b-3) $\mathrm{Im}\, \gamma^{1}_{k-3}(x', x_n, \xi', 0) \neq 0$

(b-4) $\mathrm{Im}\, \gamma^{2}_{k-3}(x', x_n, \xi', 0) \neq 0$

である．

※ 楕円型擬微分作用素と F.I.Op. (正準変換) をもちいてという意味，

※※ 以下(i)，(a-i)，(b-i)，(c-i) (d-i) (i=1, 2, 3, 4) はそれぞれ同じ番号に対応する条件である．

これを (1)〜(4)の型の場合に言い換えると それぞれに応じて

(C-1) $\mathrm{Im}\ b'_{m-1}(x,\xi)|_{\Sigma_g \cap P'} \neq 0$

(C-2) $\mathrm{Im}\ b'_{m-2}(x,\xi)|_{\Sigma_g \cap P'} \neq 0$

(C-3) $\mathrm{Im}\ b'_{m-3}(x,\xi)|_{\Sigma_g \cap P'} \neq 0$

(C-4) $\mathrm{Im}\ b^2_{m-3}(x,\xi)|_{\Sigma_g \cap P'} \neq 0$

ここで $\Sigma_g = \{(x,\xi);\ g(x,\xi)=0\ \xi\neq 0\}$ $b^i_j(x,\xi)$ は $B^i_j(x,D)$ のシンボルの j 次の部分（主シンボルにあたる）である.

定理2. P を多重度一定の特性多様体をもつ properly supported 擬微分作用素とする. この時, 各特性多様体 Σ_{p^k} ※ 上で定理1の(i)と上述の条件(C-i) $(i=1,2,3,4)$ のいずれかを満していれば局所可解である. また $i=2,3$ の場合に対応する特性多様体を Σ_1 とすると, $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ $Pu=f$ ならば $(WF)(u)\setminus WF(f)\subset\Sigma_1$ で bicharacteristic に沿って不変である.

注意1. 特性多様体が Levi の条件を満している時は同様の結果が Chazarain [1] により得られている. したがって

(C-5) Levi の条件を満す.

(※ $p=\prod_{k=1}(p^k)^{m_k}$ とする. 定義参照)

の条件を定理2に加えてもよい.

注意2. 条件(i), (c-i)の型での十分条件，すなわち擬微分作用素の割り算の型で述べること，は他にも多く得られる. しかし，それを次に述べるように作用素の係数で表現するには面倒な計算を要する場合が多い.

定理3. P を多重度一定の特性多様体をもつ properly supported な擬微分作用素とする. $p=\prod_{k=1}^{\nu}(p^k)^{m_k}$ (p^k : simple) とする. この時各特性多様体 Σ_{p^k} 上で，次の(d-i) ($i=1.2.3.4.5$) のいずれかを満していれば局所可解である. また $i=2,3,5$ に対応する特性多様体を Σ_1 とすると，$u\in\mathcal{D}'(\Omega)$ $Pu=f$ ならば $(WF)(u)\setminus WF(f)\subset\Sigma_1$ で bicharacteristic に沿って不変である.

$$s = p_{m-1} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_{m,\,i}^{(i)}$$ とおく.※

(d-1) $m_k \geqq 2$ $\quad \mathrm{Im}\, s\,|_{\Sigma_{p^k}} \neq 0$

(d-2) $m_k \geqq 3$ $\quad s\,|_{\Sigma_{p^k}} = 0 \quad \mathrm{Im}\,\mathrm{grad}\, s\,|_{\Sigma_{p^k}} \neq 0$

(d-3) $m_k \geqq 4$ $\quad s\,|_{\Sigma_{p^k}} = \mathrm{grad}\, s\,|_{\Sigma_{p^k}} = 0$

$$p_{m-2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_{m-1,\,i}^{(i)} + \frac{1}{8}\sum_{i,j=1}^{n} p_{m,\,ij}^{(ij)} = 0$$

$$\mathrm{Im}\,\mathrm{Hess}\, s\,|_{\Sigma_{p^k}} \neq 0$$

(d-4) $m_k \geqq 3$ $\quad s\,|_{\Sigma_{p^k}} = \mathrm{grad}\, s\,|_{\Sigma_{p^k}} = 0$

$$\mathrm{Im}\left(p_{m-2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_{m-1,\,i}^{(i)}\right) \neq 0 \text{ on } \Sigma_{p^k}$$

※ $R^{(\alpha)}_{\beta} = (\partial_\xi)^\alpha D_x^\beta R(x,\xi)$

(d-5) Leviの条件を満す。

注意3. (d-1), (d-2)に対する可解性 Matsumoto [3]により，やや異なった方法で得られた。我々の可解性の証明は，Duistermaat-Hörmander [2]の考えを用いる。

(1) 詳細は他に発表する

References

[1] Chazarain Ann. Inst. Fourier 24.1 (1974)

[2] Duistermaat-Hörmander Acta Math. 128 (1972)

[3] Matsumoto 1975, 1月 数理研シンポジウム