数理解析研究所講究録
第 248 巻 1975 年 175-187

定数係数線型偏微分方程式の実解析解の境界値の特異スペクトルの評価について

東大 教養　金子 晃

本講演では定数係数線型偏微分方程式 $p(D)u=0$ の実解析解 u の非特性面への境界値の特異スペクトル集合の上からの評価を与える。この種の結果は実解析解の接続問題の研究から予想されていた（［3］を見よ。なお定理 2.1 はそこでの予想より弱い。）。この方面からの研究は実解析解の接続問題に統一した視野を与える。なおこれより先境界値問題独自の研究から小松は一般の超函数解の境界値の特異スペクトルに関してある精密な予想を与えたが、どこにも記録されなかった。

§1では境界値の定義を Fourier 変換を用いて与える。［9］のもとの定義は Cauchy-Kowalewski の定理と双対性を用いるもので変数係数に対しても有効である。§2では特異スペクトル評価の主定理を与える。§3でその実解析解の接続問題への応用を与える。本講演の詳細は［5］に発

表される。なお本講演の結果は基本解と [8] の I-双曲性を用いる別法により主部が実で主型の実解析係数の方程式に拡張できる。これに関しては [6] を見られたい。[6] では C^∞ 級の解の接続も扱われている。

§1. 超函数解の境界値

定数係数線型偏微分作用素 $p(D)$ に関し記号 $D=(D_1,\cdots,D_n)$, $D_j=\sqrt{-1}\frac{\partial}{\partial x_j}$ を用いる。Fourier 変換は $\hat{u}=\mathcal{F}[u]=\int e^{\sqrt{-1}x\xi}u(x)\,dx$ を用いる。U を $\mathbb{R}^n$ の凸開集合とし，$K=U\cap\{x_1=0\}$, $U^+=U\cap\{x_1>0\}$ とおく。また $L=\overline{K}$ ($\mathbb{R}^n$ における閉包) とおく。変数の分割に関し $x=(x_1,x')=(x_1,x'',x_n)$ なる記号法を用いる。双対変数 ξ, ζ の分割に関しても同じ規則による。

$x_1=0$ は $p(D)$ に関し非特性的とする。以下簡単のため $p(\zeta)$ は m 次の既約多項式とする。超平面 $x_1=0$ の片側の超函数解 $u\in\mathcal{B}_p(U^+)$ に対し $x_1=0$ への m 個の境界値 $b_j^+(u)\in{}'\mathcal{B}(K)$, $j=0,\cdots,m-1$ を以下の手順で定義する。(${}'\mathcal{B}$ は $n-1$ 変数 x' の函数を表わす。) $[u]\in\mathcal{B}(U)$ を $\mathrm{supp}\,[u]\subset\{x_1\geqq 0\}$ を満たす u の拡張とする。$\mathrm{supp}\,p(D)[u]\subset\{x_1=0\}$ となるから L に台を持つその拡張 $[[p(D)[u]]]\in\mathcal{B}[L]$ がとれる。Fourier 変換 $F(\zeta)=\widehat{[[p(D)[u]]]}$ は ζ の整函数で

$$|F(\zeta)|\leqq C_\varepsilon\exp(\varepsilon|\zeta|+H_L(\mathrm{Im}\,\zeta))$$

を満たす。$p(\zeta)=0$ への制限 $F(\zeta)\big|_{N(p)}$ は u により $\widehat{\mathcal{B}[L\setminus K]}\big|_{N(p)}$ を法として定まる。ただし後者は単一増大度では記述できない部分空間である。次に

$$\tilde{f}(\zeta)=\tilde{f}_0(\zeta')\zeta_1^{m-1}+\tilde{f}_1(\zeta')\zeta_1^{m-2}+\cdots+\tilde{f}_{m-1}(\zeta')$$

の形の整函数で $\tilde{f}(\zeta)\big|_{N(p)}=F(\zeta)\big|_{N(p)}$ を満たすものを求める。これは補間公式により一意に求まる。$\tau_j(\zeta')$, $j=1,\cdots,m$ を $p(\zeta)=0$ の ζ_1 に関する根とすれば

$$\tilde{f}_j(\zeta')=\begin{vmatrix}1 & \cdots & F(\tau_1(\zeta'),\zeta') & \cdots & \tau_1(\zeta')^{m-1}\\ \vdots & & \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & F(\tau_m(\zeta'),\zeta') & \cdots & \tau_m(\zeta')^{m-1}\end{vmatrix}\Bigg/\begin{vmatrix}1 & \cdots & \tau_1(\zeta')^{m-1}\\ \vdots & & \vdots\\ 1 & \cdots & \tau_m(\zeta')^{m-1}\end{vmatrix}$$
$$\underbrace{}_{m-j}$$

この対応を $B[F|_{N(p)}]=(\tilde{f}_0,\cdots,\tilde{f}_{m-1})$ で表わそう。対応が線型なので評価が保たれ

$$|\tilde{f}_j(\zeta')|\leqq C_\varepsilon\exp(\varepsilon|\zeta'|+H_L(\mathrm{Im}\,\zeta'))$$

が成立つ。(L の台函数 $H_L(\mathrm{Im}\,\zeta)$ は実際には $\mathrm{Im}\,\zeta_1$ を含んでいないことに注意。) 故に $\tilde{f}_j(\zeta')$ はある元 $f_j(x')\in{}'\mathcal{B}[L]$ の Fourier 像になっている。$L\setminus K$ を細かく分割して増大度を見ることにより，法 $\widehat{\mathcal{B}[L\setminus K]}\big|_{N(p)}$ の部分がこの対応で ${}'\mathcal{B}[L\setminus K]$ にゆくことがわかる。故に $\mathcal{B}(K)$ の元

$$b_j^+(u)=f_j(x')\big|_K\ ,\qquad j=0,\cdots,m-1$$

が u により定まる。

<u>補題 1.1</u>　境界作用素系 $\{D_1^j\}_{j=0}^{m-1}$ の双対系を $\{C_j(D)\}$

とするとき $b_j^+(u)$ は [9] で定義された意味での境界値 $C_j(-D)u|_{x_1\to+0}$ と一致する。ただし $C_j(D)$ を j 階の成分とした。

<u>証明</u>. [9] の境界値は

$$p(D)[u]=\sum_{j=0}^{m-1}D_1^{m-j-1}(b_j^+(u)\delta(x_1))$$

で特徴づけられることから殆ど明である。

境界値としては $D_1^j u|_{x_1\to+0}$ の方が自然だが記号の簡便さのため以後 $b_j^+(u)$ を用いる。正規境界作用素の系は相互に自由に翻訳できるから結果に影響はない。

§2. 実解析解の境界値の特異スペクトルの評価

まず u が実解析解 $\in \mathcal{O}\iota_p(U^+)$ のとき $\tilde{f}_j$ の別の表現を与える。$\chi(x)$ を U^+ 上の Gevrey 級函数で K の近傍で 1 に等しく、$\overline{\operatorname{supp}\chi}\cap\partial U\subset L\setminus K$ なるものとする。$(1-\chi)u\in C^\infty(U^+)$ を 0 で自明に延長したものを $[(1-\chi)u]_0\in C^\infty(U)$ と書けば明に

$$p(D)[[[(1-\chi)u]_0-[u]]]\equiv[[p(D)([1-\chi)u]_0-[u])]]\quad \mathrm{mod}\ \mathcal{B}[L\setminus K]$$

ここに [[ ]] は一般に台を最小限に止めた一つの拡張を表わす。故に $N(p)$ 上で

$$F(\zeta)\equiv\widehat{[[p(D)[(1-\chi)u]_0]]}\quad \mathrm{mod}\ \widehat{\mathcal{B}[L\setminus K]}$$

となる。更に $J(D)$ を任意の定数係数局所作用素とすれば $J(D)u\in\mathcal{O}\iota_p(U^+)$ だから上の表現は $J(D)u$ に対しても成立つ。

ところで $J(\zeta)F(\zeta)$ は明に $J(D)u$ の一つの表現だから $N(p)$ 上で

$$J(\zeta)F(\zeta) \equiv \widetilde{[[p(D)[(1-\chi)J(D)u]_0]]} \quad \mathrm{mod}\ \widetilde{\mathcal{B}[L\setminus K]}$$

次に $\varphi(x)$ を Gevrey 級の函数で，$\mathrm{supp}\,\varphi$ が $L\setminus K$ の ε 近傍に含まれ，さらに小さい近傍では1に等しいものとする。

$$v = (1-\varphi)p(D)[(1-\chi)J(D)u]_0$$

$$w = [[p(D)[(1-\chi)J(D)u]_0]] - v$$

とおく。χ, φ の滑らかさを適当に選べば

(2.1) $\quad |\tilde{v}(\zeta)| \leq C\exp(-A|\mathrm{Re}\,\zeta|^{\delta} + \varepsilon\max\{-\mathrm{Im}\,\zeta_1, 0\} + H_L(\mathrm{Im}\,\zeta))$

が成り立つようにできる。定数 $A>0$，および $0<\delta<1$ は後で指定される。w の方は台が $L\setminus K$ の ε 近傍の $x_1 \geq 0$ の部分に含まれる超函数である。$\widetilde{\mathcal{B}[L\setminus K]}\big|_{N(p)}$ における誤差は Fundamental Principle を用いて w に吸収できるから結局

$$J(\zeta)F(\zeta) = \tilde{v}(\zeta) + \tilde{w}(\zeta)$$

が成り立つ。これに §1 で定義した写像 B を施す。$B[\tilde{v}|_{N(p)}] = (\tilde{g}_0(\zeta'), \cdots, \tilde{g}_{m-1}(\zeta'))$, $B[\tilde{w}|_{N(p)}] = (\tilde{h}_0(\zeta'), \cdots, \tilde{h}_{m-1}(\zeta'))$ とおけば J が ζ' のみを含むとき

$$J(\zeta')\tilde{f}_j(\zeta') = \tilde{g}_j(\zeta') + \tilde{h}_j(\zeta')$$

この式から必要な情報をとり出す。ただし J や ε（従って χ, φ）をとり替えれば $\tilde{g}_j$, $\tilde{h}_j$ も変化する。

定理 2.1 根 $\tau_j(\zeta')$ は $\mathrm{Re}\,\zeta_n \le -c|\mathrm{Re}\,\zeta''|$ において

(2.2) $$-\mathrm{Im}\,\tau_j(\zeta') \le a|\mathrm{Re}\,\zeta'|^q + b|\mathrm{Im}\,\zeta'| + C$$

を満たすとする。ここに $q<1$, a, b, c, C は正定数とする。このとき $u \in A_p(U^+)$ に対し S.S. $b_j^+(u)$ は $+\sqrt{-1}\,dx_n\infty$ 方向を含まない。

証明. τ に関する上の条件を代入すると (2.1) から ξ' が実で $\xi_n \le -c|\xi''|$ のとき

(2.3) $$|\tilde{g}_j(\xi')| \le C|\xi'|^{m(m-1)/2}\exp(-a'|\xi'|^q)$$

を得る。ここに $a' = A - \varepsilon a > 0$ とした。一方 $x_1 = 0$ が非特性的ということから $|\tau_j(\zeta')| \le M|\zeta'|$ が成り立つから, $\xi_n \ge -c|\xi''|$ においては

(2.4) $$|\tilde{g}_j(\xi')| \le C|\xi'|^{m(m-1)/2}\exp((1+c)M\varepsilon|\xi''| - a'|\xi'|^q)$$

$\tilde{h}_j$ の方は一度に評価できないので次のようにする。L、K を十分細かく分割して $\bigcup L_k$ としこれに応じ台が L_k の ε 近傍の $x_1 \ge 0$ の部分に含まれる w^k を用いて $w = \sum w^k$ と分割する。$B[\tilde{w}^k|_{N(\varphi)}] = (\tilde{h}_0^k, \dots \tilde{h}_{m-1}^k)$ とおけば, $\mathrm{Re}\,\zeta_n \le -c|\mathrm{Re}\,\zeta''|$ では

(2.5) $$|\tilde{h}_j^k(\zeta)| \le C_\gamma \exp(\gamma|\zeta'| + (1+b)\varepsilon|\mathrm{Im}\,\zeta'| + H_{\mathrm{ch}\,L_k}(\mathrm{Im}\,\zeta'))$$

また $\mathrm{Re}\,\zeta_n \ge -c|\mathrm{Re}\,\zeta''|$ では

(2.6) $$|\tilde{h}_j^k(\zeta)| \le C_\gamma \exp(\gamma|\zeta'| + (1+c)M_\varepsilon|\mathrm{Re}\,\zeta''| + (1+M)\varepsilon|\mathrm{Im}\,\zeta'| + H_{\mathrm{ch}\,L_k}(\mathrm{Im}\,\zeta'))$$

(2.4) と (2.6) の評価で実部が指数的増大度を示しているので

これらの函数は素直に逆Fourier変換が作れない。そこで新たに工夫をする。

補題 2.2 δ函数の曲面波分解 $\delta(x)=\int_{|\omega|=1} W(x,\omega)\,d\omega$ が成り立つ. ここに

$$W(x,\omega)=\frac{(n-1)!}{(-2\pi\sqrt{-1})^n}\ \frac{\psi(x,\omega)\,e^{-x^2}}{(x\omega+\sqrt{-1}(x^2-(x\omega)^2)/\sqrt{1+x^2}+\sqrt{-1}\,0)^n}$$

$$\psi(x,\omega)=\det\left\|\frac{\partial}{\partial\omega_j}\left\{\omega_i+\sqrt{-1}\left(x_i|\omega|-(x\omega)\frac{\omega_i}{|\omega|}\right)/\sqrt{1+x^2}\right\}\right\|_{|\omega|=1}$$

であり $x^2=x_1^2+\cdots+x_n^2$ の略記である。fをコンパクトな台を持つ超函数とする. もし単位球面 $|\omega|=1$ における点 $(1,0,\cdots,0)$ の近傍Ωにおいて $\int f(y)W(x-y,\omega)\,dy$ が ω に連続的に依存する x の正則函数として原点に対する一定の複素近傍まで延長されるならば S.S.f は $(0,\sqrt{-1}\,dx_1\infty)$ を含まない。

証明. δの分解は [10] Chapter III, Example 1.2.5 から容易に得られる。後半は

$$f(x)=\int_{\Omega}d\omega\int f(y)W(x-y,\omega)\,dy+\int_{c\Omega}d\omega\int f(y)W(x-y,\omega)\,dy$$

と分ければ明.

補題 2.3 $W(x,\omega)$ の x に関する Fourier 変換 $\widetilde{W}(\zeta,\omega)$ は ζ,ω に関し $\mathbb{C}^n\times\{|\omega|=1\}$ で正則であって次の評価を満たす: 任意の $\delta>0$ に対し ω に依存しない $C_\delta>0$, $C'_\delta>0$ が存在して, $C_\delta|\mathrm{Im}\,\zeta|\leq|\mathrm{Re}\,\zeta|$ において

$$|\tilde W(\zeta,\omega)| \le C'_\delta |\zeta|^n \exp(\delta|\mathrm{Im}\,\zeta|)$$

また $C_\delta|\mathrm{Im}\,\zeta| \le |\mathrm{Re}\,\zeta|$ かつ $\delta\,\mathrm{Re}\,\zeta\cdot\omega \ge -\sqrt{|\mathrm{Re}\,\zeta|^2-|\mathrm{Re}\,\zeta\cdot\omega|^2}$ において

$$|\tilde W(\zeta,\omega)| \le C'_\delta \exp(\delta|\mathrm{Im}\,\zeta| - |\mathrm{Re}\,\zeta|/C'_\delta)$$

証明は積分路変更により初等的にできるので省略する。

定理の証明の続き　$n-1$ 変数 δ 函数 $\delta(x')$ の補題 2.2 による分解成分を $W(x',\omega')$ と書く。

$$J(\zeta')\tilde f_j(\zeta')\tilde W(\zeta',\omega') = \tilde g_j(\zeta')\tilde W(\zeta',\omega') + \tilde h_j(\zeta')\tilde W(\zeta',\omega')$$

であり，(2.3), (2.4) と補題 2.3 から，もし $\zeta_n \ge -c|\zeta''|$ において $\delta\zeta'\cdot\omega' \ge -\sqrt{|\zeta'|^2-|\zeta'\cdot\omega'|^2}$ となっていれば，ε が十分に小さいとき

(2.7) $$|\tilde g_j(\zeta')\tilde W(\zeta',\omega')| \le C'_\delta |\zeta|^n \exp(-a'|\zeta'|^s)$$

となる。この仮定は $\omega_n \ge 4c|\omega''|$ なら満たされることが初等的な計算でわかる。故に $\tilde g_j(\zeta')\tilde W(\zeta',\omega')$ の逆 Fourier 変換は Gevrey 級の函数である。同じ ω' に対し $C_\delta|\mathrm{Im}\,\zeta'| \le |\mathrm{Re}\,\zeta'|$ において

(2.8) $$|\tilde h_j^k(\zeta')\tilde W(\zeta',\omega')| \le C_{\gamma,\delta} \exp(\gamma|\zeta'| + \delta|\mathrm{Im}\,\zeta'| + (1+b+M)\varepsilon|\mathrm{Im}\,\zeta'| + H_{\mathrm{ch}\,L_k}(\mathrm{Im}\,\zeta'))$$

δ と ε を適当に固定して [7] Lemma 5.1.2 ([4] Lemma 2.3 の後の注意参照) を適用すれば $\tilde h_j^k(\zeta')\tilde W(\zeta',\omega')$ の逆 Fourier 変換は解析的特異台が $\mathrm{ch}\,L_k$ の $(1+b+M)\varepsilon+\delta$ 近傍に含まれるような超函数~~の Fourier 像~~であることがわかる。L_k を

小さくしてゆけば $\tilde{f}_j(\xi')\widetilde{W}(\xi',\omega')$ が解析的特異台が $L\setminus K$ の $(2+b+M)\varepsilon+\delta$ 近傍に含まれる超函数の Fourier 像であることがわかる。以上により $J(\xi')\tilde{f}_j(\xi')\widetilde{W}(\xi',\omega')$ の逆 Fourier 変換すなわち $J(D')[f_j(x')*W(x',\omega')]$ は $L\setminus K$ の $2(2+b+M)\varepsilon+2\delta$ だけ内側の実開領域 $K_{\delta,\varepsilon}$ 上で連続でありその上限ノルムは ω' に依存しない。故に [1] Proposition 2.4. により $\{f_j(x')*W(x',\omega')\,;\,\omega_n \geqq 4c|\omega''|\}$ は $K_{\delta,\varepsilon}$ 上の実解析函数の空間において有界集合となる。故に $f_j(x')*W(x',\omega')$ は $K_{\delta,\varepsilon}$ のある複素近傍まで x' の正則函数として拡張され，それは ω' に連続に依存する。故に補題 2.3 により $S.S.f_j(x')\cap K_{\delta,\varepsilon}\times\{\sqrt{-1}\,dx_n\infty\}=\phi$．$\delta,\varepsilon$ は任意だから定理が証明された。

次の系は根の条件 (2.2) を座標不変にしたものよりは弱くなっている。定理 2.1 で実重根が救えているのかどうかよくわからない。

<u>系 2.4</u>　$\xi'\in S^{n-2}$ のうちで最高階の特性方程式 $p_m(\zeta_1,\xi')=0$，が ζ_1 について正の虚部又は実重根を持つような点集合を $V_{(1,0,\cdots,0),A}(p)$ とする．このとき $x_1>0$ における $p(D)u=0$ の実解析解 u について $S.S.b_j^+(u)\subset R^{n-1}\times\sqrt{-1}\,\overline{V_{(1,0,\cdots,0),A}(p)}\,dx\infty$ が成り立つ。ここに閉包は S^{n-2} におけるものである。

証明は虚部，次いで低階の摂動に関する根の評価を代数的

に計算するのである。

例2.5　波動方程式 $D_1^2+\cdots+D_{n-1}^2-D_n^2$ に対しては $\overline{V_{(1,0,\cdots,0),A}(p)}=\{\xi'\in S^{n-2};\ \xi_n^2\leqq\xi''^2\}$. この場合系2.4は最良評価となる。実際陪特性帯に特異スペクトルが乗る解（[8] Theorem 2.8）および $D_1^2+\cdots+D_{n-1}^2$ の解析的基本解を Lorenz 変換で動かしたものによって下からの評価が得られる。

§3. 実解析解の接続

次の結果はある意味で[4]の拡張となっている。

定理3.1　$\varphi(x')=0$ を $x_1=0$ 内の解析的超曲面とし $\varphi(0)=0$, $\pm\operatorname{grad}\varphi(0)\notin\overline{V_{(1,0,\cdots,0),A}(p)}$ とする。$K=\{(0,x');\varphi(x')\geqq 0\}$ とおく。このとき原点の近傍において K の外で定義された実解析解は超函数解として原点のある近傍全体に接続される。

証明　$x_1=0$ における両側からの境界値の差 $b_j(u)=b_j^+(u)-b_j^-(u)$ を見る。これは K に台を持つ超函数となる。系2.4により S.S. $b_j(u)$ は $(0,\pm\sqrt{-1}\operatorname{grad}\varphi(0)\infty)$ を含まぬから[10] Chapter III Proposition 2.1.3 により $b_j(u)$ は原点のある近傍で恒等的に0. 故に[9] Theorem 4 により u はそこにおいて超函数解として $x_1=0$ の上でつながる。

系3.2　上の条件に加えて $p(D)$ の主部は実係数主型とし，原点を通る陪特性直線は原点の任意の近傍において K の外にしみ出ると仮定する。このとき u は実解析解として延長され

る。

証明. [8] Theorem 3.3′ により実解析性が伝播するからである。

尚実解析性の伝播はKを凸とすれば常に成り立つが,このとき定理3.1は(たとえ定理2.1を直接適用しても)[2] Theorem 2.7に及ばない。

[後注] 系2.4における $V_{(1,0,\cdots,0),A}(p)$ の定義は"$p_m(\zeta_1,\xi')=0$ が ζ_1 について虚部正の根を持つような $\xi'\in S^{n-2}$ の集合"としてよいことがわかった。実重根がある場合に不等式(2.2)の証明は local version of Bochner's tube theorem を用いた Bony-Schapira "Solutions hyperfonctions du problème de Cauchy", Lecture Notes in Math. 287, Springer, 1973. pp. 82–98. の Théorème 2.3 と同様である。

文献

[1] Kaneko, A., Representation of hyperfunctions by measures and some of its applications, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sec. 1A, 19 (1972), 321-352.

[2] ———, On continuation of regular solutions of partial differential equations with constant coefficients, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 92-123.

[3] ———, 定数係数線型偏微分方程式の解の線状特異集合について．数理解析研究所講究録 226 (1975), pp. 1-20; Apology and Correction（本号の著者による一つ前の報告の末尾）

[4] ———, On linear exceptional sets of solutions of linear partial differential equations with constant coefficients,（Publ. RIMS に提出）

[5] ———, On the singular spectrum of boundary values of real analytic solutions,（J. Math. Soc. Japan に提出）

[6] ———, On continuation of regular solutions of partial differential equations with real analytic coefficients,（Proc. Japan Acad. に提出）

[7] Kawai, T., On the theory of Fourier hyperfunctions

and its applications to partial differential equations with constant coefficients, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sec. 1A, 17 (1970), 467-517

[8] ———, Construction of local elementary solutions for linear partial differential operators with real analytic coefficients (I), Publ. RIMS. 7 (1971) 363-397.

[9] Komatsu, H. and Kawai, T., Boundary values of hyperfunction solutions of linear partial differential equations, Publ. RIMS. 7 (1971), 95-104

[10] Sato, M., Kawai, T. and Kashiwara, M., Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes in Mathematics. 287 (1973), pp. 265-529. Springer.