

数値微分の精度

日大 理工学部 永坂 秀子
東芝 電算機 福井 義成

§1. はじめに

関数 $f(x)$ の x による m 階微分を差分法で近似し、有限桁で計算を行なった場合、どの程度の精度が得られるかの評価を行なう。

§2. 誤差の評価

2.1 打ち切り誤差の評価

数値微分の点のとり方は等間隔とし、きざみ幅を h とする。 $\frac{d^m f(x)}{dx^m}$ を m 点差分法で近似したときの打ち切り誤差のオーダーは $O(h^k)$ となる(同じ点数の差分法であっても、点のとり方によって、打ち切り誤差のオーダーは異なる)。次の高次項の影響が無視できると仮定すると、打ち切り誤差 $E_T(h)^*$ は次

* 打ち切り誤差 $E_T(h)$ は次のように定義する。

$$E_T(h) = [\text{差分法による数値微分}] - \frac{d^m f(x)}{dx^m}$$

14

のように評価できる。

$$E_T(h) = a h^{\lambda} f^{(\lambda+m)}(x) \quad (1)$$

a は微分階数と差分法によって決まる係数である。

(例) 1階微分を

$$\frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} \quad (2)$$

で近似すると打ち切り誤差は $E_T(h) = -\frac{h^4}{30} f^{(5)}(x)$ となり、 $a = -\frac{1}{30}$, $\lambda = 4$, $m = 1$ となる。

2.2 丸め誤差の評価

関数 $f(x)$ の計算は充分精度よく行なわれており、最後の桁に丸め誤差が入っているだけであると仮定する。中進法（桁の浮動小数点で計算する場合）の丸め誤差 $E_R(h)$ は次のように評価できる（これは丸め誤差の限界を評価している）^{[6],[7]}。

$$|E_R(h)| = \frac{\max\{|b_s \cdot f(x+s \cdot h)|\}}{h^m} \cdot \{c \cdot p^{-l}\} \quad (3)$$

s は分点のうちどれか1つを示す整数、 b_s は差分法による係数、 c は丸めの方法による係数である。

(例) (1)式の差分法の場合、 $S = -2$ or -1 or 1 or 2 , $b_s = \frac{1}{12}$ or $-\frac{8}{12}$ or $\frac{8}{12}$ or $-\frac{1}{12}$, $C = 1$ (2進法0捨1入) or 2 (2進法切す)となる。

h が充分小さく、 $|f(x+sh)| \approx |f(x)|$ と仮定すると、丸め誤差 $E_R(h)$ は次のようになる。

$$|E_R(h)| = \frac{|b \cdot f(x)|}{h^m} \cdot \{C \cdot p^{-l}\}, \quad b = \max\{|b_s|\} \quad (4)$$

(例) (2)式の差分法の場合、 $b = \frac{8}{12}$ となる。

2.3 最適きざみ幅とスのときの誤差 I

打ち切り誤差の絶対値 $|E_T(h)|$ はきざみ幅 h の減少関数であり、丸め誤差の絶対値 $|E_R(h)|$ はきざみ幅 h の増加関数である。したがって、打ち切り誤差 $E_T(h)$ と丸め誤差 $E_R(h)$ が打消しあわぬ場合の最適きざみ幅 h_{opt} は次の条件から与えられる。

$$\begin{cases} |E(h)| = |E_T(h)| + |E_R(h)| & (5) \\ \frac{d|E(h)|}{dh} = 0 & (6) \end{cases}$$

(5)式に(1),(4)式を代入し、 h で微分し、 $\frac{d|E(h)|}{dh} = 0$ から、 h_{opt} を求めらる。

$$|E(h)| = |a f^{(\lambda+m)}(x)| \cdot h^i + |bc f(x)| \cdot \frac{p-l}{h^m} \quad (7)$$

$$\frac{d|E(h)|}{dh} = i |a f^{(\lambda+m)}(x)| \cdot h^{i-1} - m |bc f(x)| \cdot \frac{p-l}{h^{m+1}} \quad (8)$$

$$i |a f^{(\lambda+m)}(x)| \cdot h_{opt}^{i-1} - m |bc f(x)| \cdot \frac{p-l}{h_{opt}^{m+1}} = 0 \quad (9)$$

$$h_{opt} = \left\{ \left| \frac{bcm}{ai} \right|^{\frac{1}{\lambda+m}} \right\} \cdot \left\{ \left| \frac{f(x)}{f^{(\lambda+m)}(x)} \right|^{\frac{1}{\lambda+m}} \right\} \cdot p^{-\frac{1}{\lambda+m}l} \quad (10)$$

$E_T(h_{opt})$ と $E_R(h_{opt})$ の関係を求めると次のようになる。

$$\left| \frac{E_R(h_{opt})}{E_T(h_{opt})} \right| = \frac{i}{m} \quad (\text{付録1}) \quad (11)$$

したがって、 h_{opt} のときの絶対誤差 E_{min} と相対誤差 \hat{E}_{min} は次のようになる。

$$\begin{aligned} |E_{min}| &= |E_T(h_{opt})| + |E_R(h_{opt})| = \frac{\lambda+m}{m} |E_T(h_{opt})| \\ &= \left\{ \frac{\lambda+m}{m} |a| \left| \frac{bcm}{ai} \right|^{\frac{1}{\lambda+m}} \right\} \cdot \left\{ |f^{(\lambda+m)}(x)| \cdot \left| \frac{f(x)}{f^{(\lambda+m)}(x)} \right|^{\frac{1}{\lambda+m}} \right\} \cdot p^{-\frac{1}{\lambda+m}l} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} |\hat{E}_{min}| &= |E_{min}/f^{(m)}(x)| \\ &= \left\{ \frac{\lambda+m}{m} |a| \left| \frac{bcm}{ai} \right|^{\frac{1}{\lambda+m}} \right\} \cdot \left\{ \left| \frac{f^{(\lambda+m)}(x)}{f^{(m)}(x)} \right| \cdot \left| \frac{f(x)}{f^{(\lambda+m)}(x)} \right|^{\frac{1}{\lambda+m}} \right\} \cdot p^{-\frac{1}{\lambda+m}l} \end{aligned} \quad (13)$$

2.4 最適きざみ幅と入のときの誤差正

2. 3の仮定に加えて、次のことを仮定する。

$$\left| \frac{bcml}{a_i} \right| \frac{1}{\lambda^{i+m}} \sim 1 \quad (14)$$

$$\frac{\lambda^{i+m}}{m} \cdot |a| \cdot \left| \frac{bcml}{a_i} \right| \frac{1}{\lambda^{i+m}} \sim 1 \quad (15)$$

この仮定は、普通使われる差分法では充分満足できるものである(中心差分の場合を付録3に示す)。(10),(12),(13)式は次のようになる。

$$l_{opt} = \left| \frac{f(x)}{f^{(i+m)}(x)} \right| \frac{1}{\lambda^{i+m}} \cdot p^{-\frac{1}{i+m}l} \quad (16)$$

$$|E_{min}| = \left| f^{(i+m)}(x) \right| \cdot \left| \frac{f(x)}{f^{(i+m)}(x)} \right| \frac{1}{\lambda^{i+m}} \cdot p^{-\frac{1}{i+m}l} \quad (17)$$

$$\left| \hat{E}_{min} \right| = \left| \frac{f^{(i+m)}(x)}{f^{(m)}(x)} \right| \cdot \left| \frac{f(x)}{f^{(i+m)}(x)} \right| \frac{1}{\lambda^{i+m}} \cdot p^{-\frac{1}{i+m}l} \quad (18)$$

差分法と被微分関数と計算方法が決まれば、この3つの式を使って、どの程度の精度が得られるか評価できる。

さらに、次のことを仮定する。

$$\left| \frac{f(x)}{f^{(i+m)}(x)} \right| \frac{1}{\lambda^{i+m}} \sim 1 \quad (19)$$

$$\left| \frac{f^{(i+m)}(x)}{f^{(m)}(x)} \right| \cdot \left| \frac{f(x)}{f^{(i+m)}(x)} \right| \frac{1}{\lambda^{i+m}} \sim 1 \quad (20)$$

(付録4)

(14), (15) 式の仮定とは異なり、この仮定は関数に依存する。

(16), (18) 式は次のようになる。

$$h_{opt} = p^{-\frac{1}{i+m}} l \quad (21)$$

$$|\hat{E}_{min}| = p^{-\frac{j}{i+m}} l \quad (22)$$

表1. h_{opt} の大きさ

$m \backslash i$	1	2	3	4	5
1	$p^{-\frac{1}{2}} l$	$p^{-\frac{1}{3}} l$	$p^{-\frac{1}{4}} l$	$p^{-\frac{1}{5}} l$	$p^{-\frac{1}{6}} l$
2	$p^{-\frac{1}{3}} l$	$p^{-\frac{1}{4}} l$	$p^{-\frac{1}{5}} l$	$p^{-\frac{1}{6}} l$	$p^{-\frac{1}{7}} l$
3	$p^{-\frac{1}{4}} l$	$p^{-\frac{1}{5}} l$	$p^{-\frac{1}{6}} l$	$p^{-\frac{1}{7}} l$	$p^{-\frac{1}{8}} l$
4	$p^{-\frac{1}{5}} l$	$p^{-\frac{1}{6}} l$	$p^{-\frac{1}{7}} l$	$p^{-\frac{1}{8}} l$	$p^{-\frac{1}{9}} l$

表2. 精度 (桁数)

$m \backslash i$	1	2	3	4	5
1	$\frac{l}{2}$ 桁	$\frac{2}{3} l$	$\frac{3}{4} l$	$\frac{4}{5} l$	$\frac{5}{6} l$
2	$\frac{l}{3}$	$\frac{2}{4} l$	$\frac{3}{5} l$	$\frac{4}{6} l$	$\frac{5}{7} l$
3	$\frac{l}{4}$	$\frac{2}{5} l$	$\frac{3}{6} l$	$\frac{4}{7} l$	$\frac{5}{8} l$
4	$\frac{l}{5}$	$\frac{2}{6} l$	$\frac{3}{7} l$	$\frac{4}{8} l$	$\frac{5}{9} l$

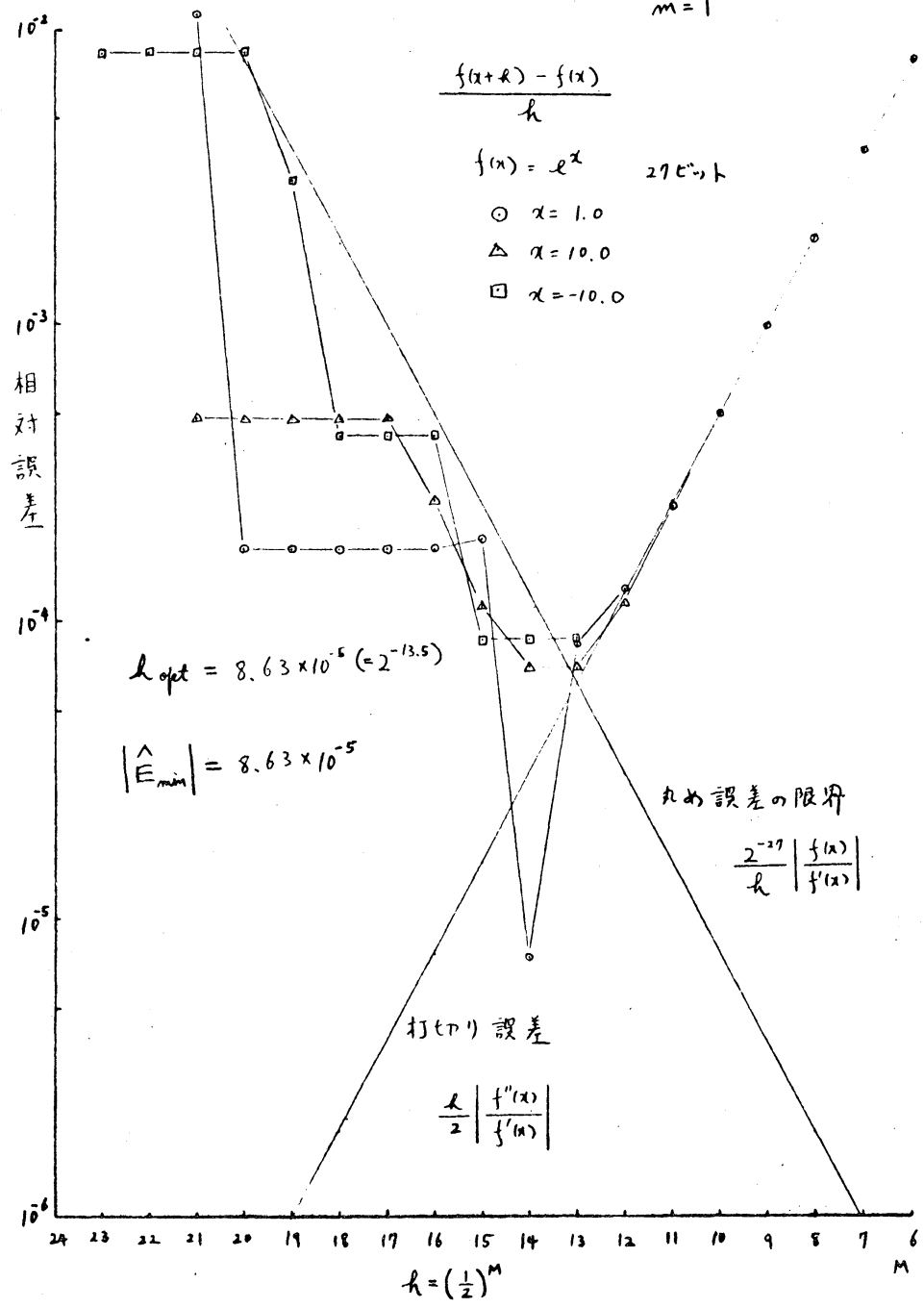
§3. 実例

(付録2)

3. 1 (1), (4), (14), (15), (19), (20) 式の条件を満足する例

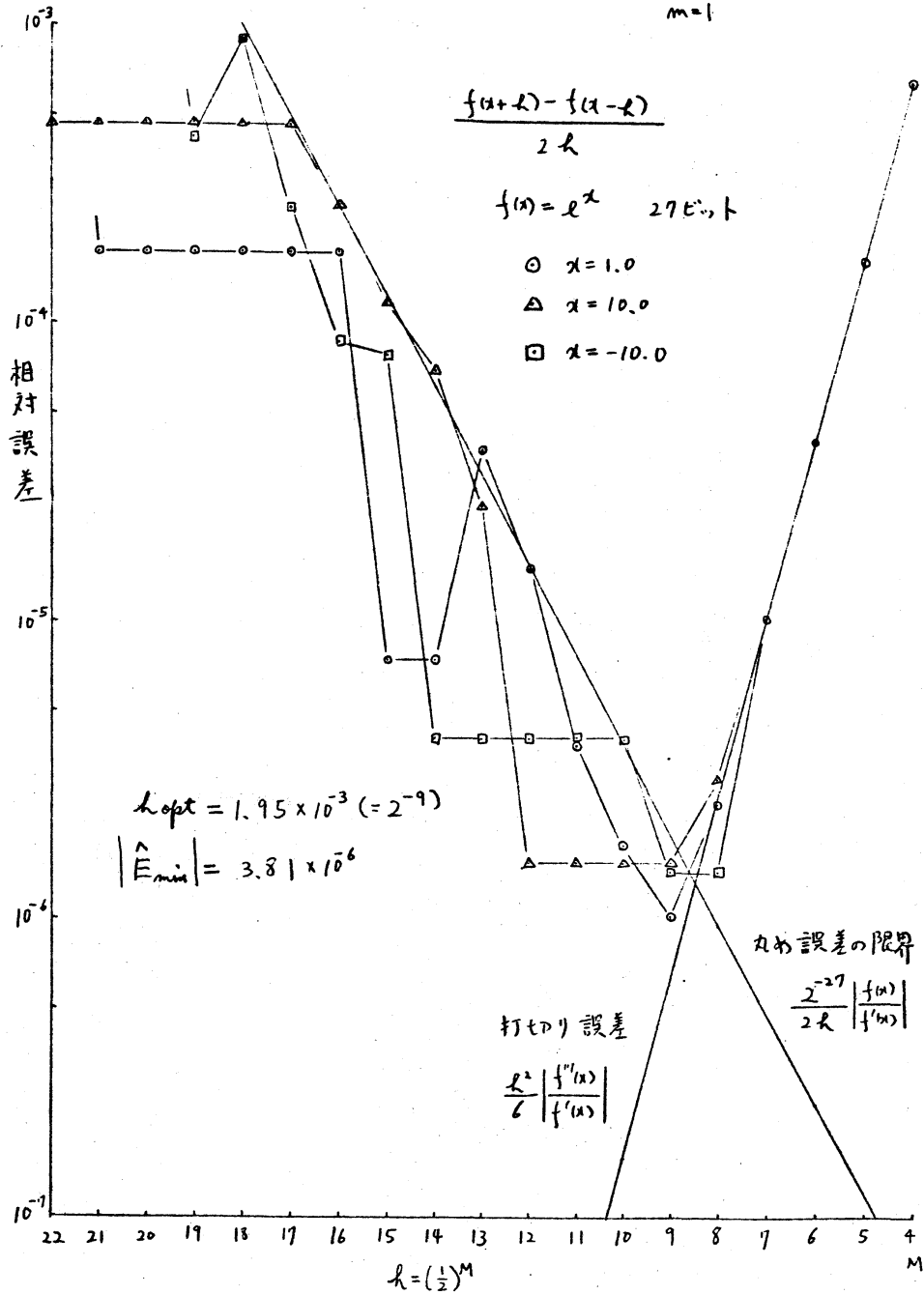
(1), (4), (14), (15), (19), (20) 式の条件を満足する例として、 $f(x) = e^x$ が実験を行なった結果をグラフ1~5に示す。差分法、打ち切り誤差の評価、丸め誤差の限界の評価はグラフ上に記してある。グラフ4では同じ命点数の差分法であり、7も、命点のとり方によって打ち切り誤差のオーダーが異なり、得られる精度は大きく異なることを示している。 打ち切り誤差のオ

グラフ1. 1階微分 $i=1$
 $m=1$



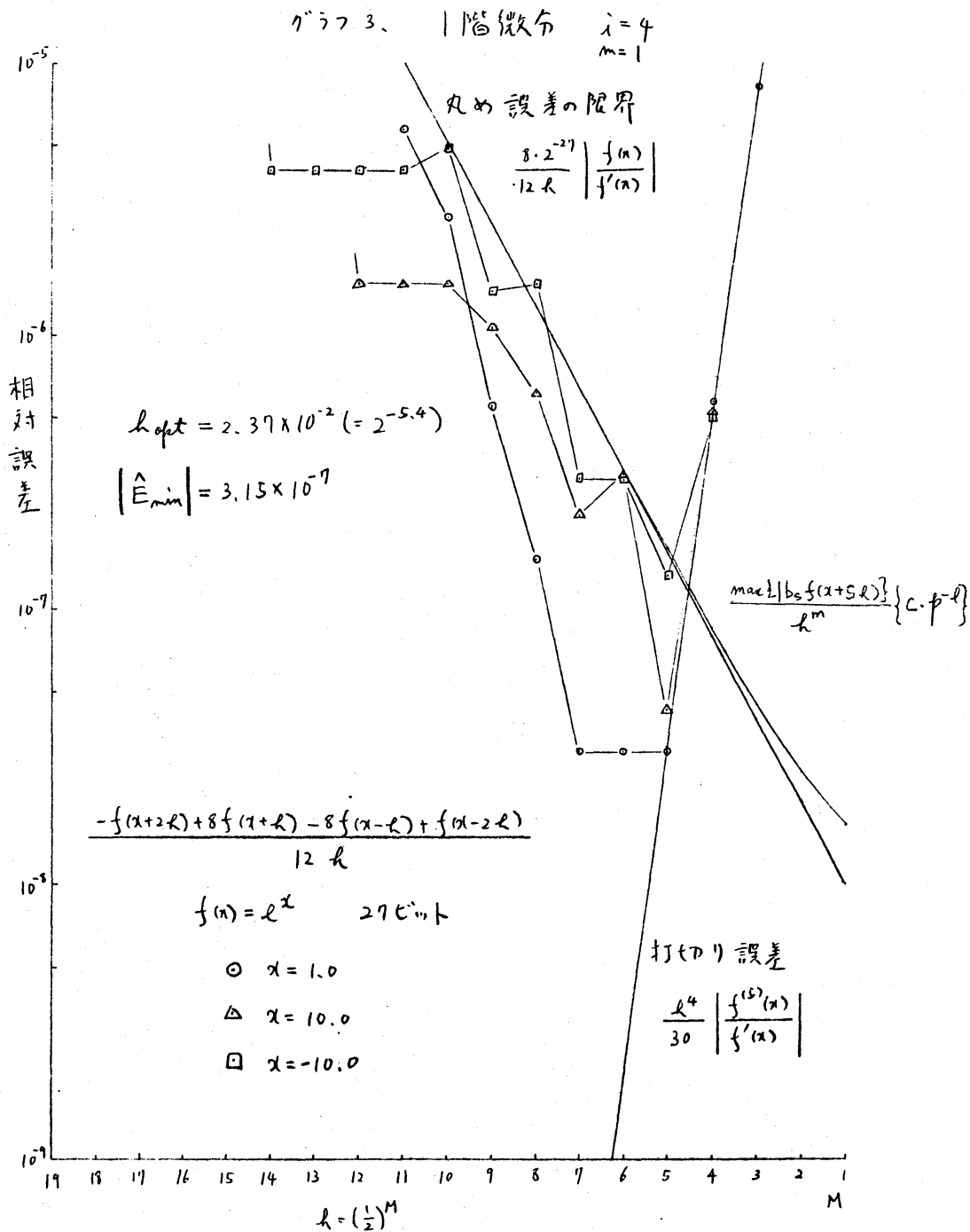
一ダが高の差分法は、最適ステップ幅がほぼ8倍ほど大きく、
 2のうゑに、精度も10進で2桁ほど良い結果が得られる。

7.7.2. 1階微分 $i=2$
 $m=1$



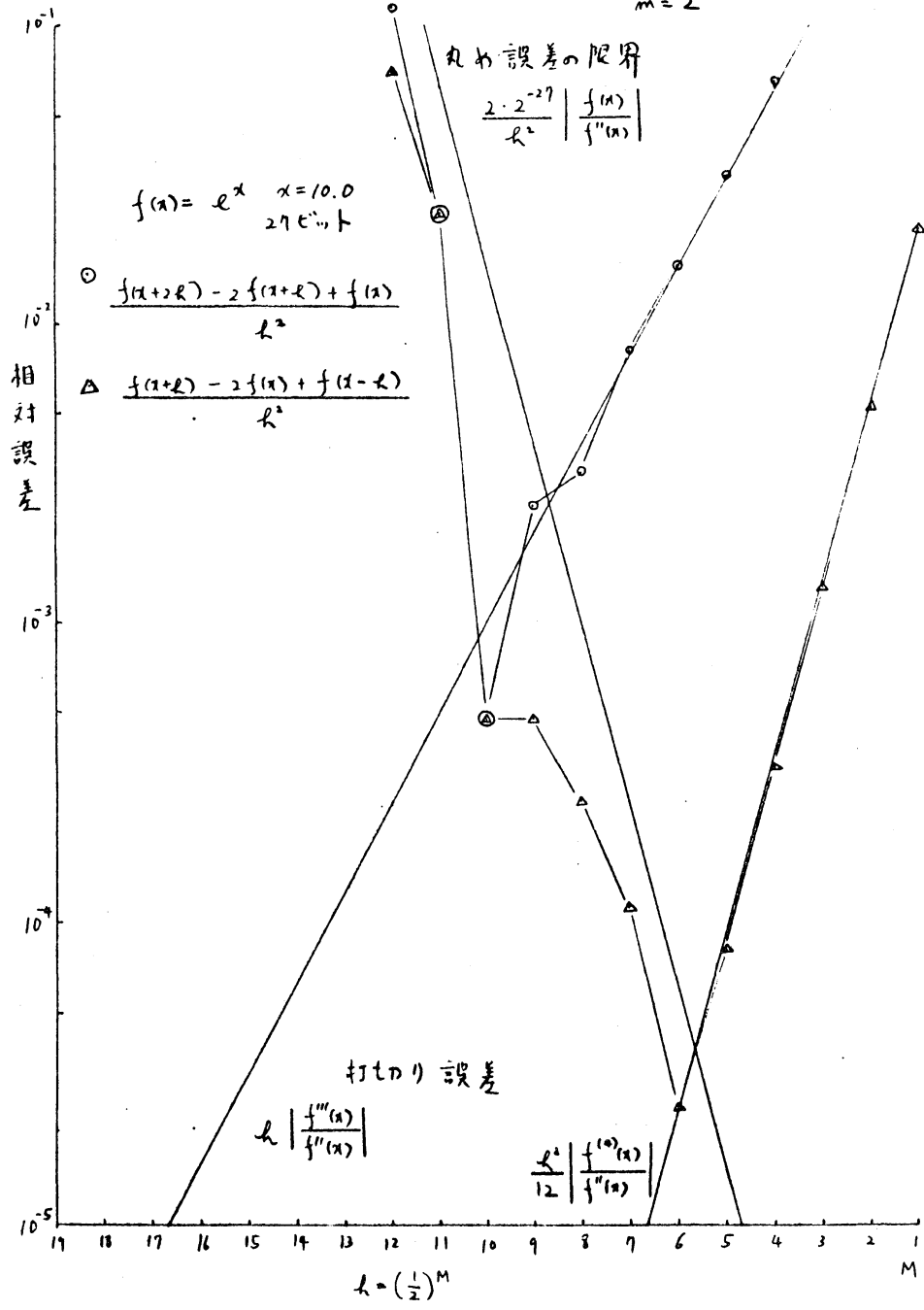
3.2 (22) 式の評価より悪くなる場合 (付録2)

$|f(x)| \frac{1}{i^{i+m}} \cdot |f^{(i+m)}(x)| \frac{1}{i^{i+m}}$ に比べて $|f^{(i)}(x)|$ が小さく、(20) 式の仮定を満足しないと、相対誤差 \hat{E}_{min} が悪くなる。これは (16), (18)



式を使つて評価できる。この例として、 $f(x) = \log_e x$ の1階微分の例をグラフ6に示す。使つてゐる差分法は、 $[f(x+h) - f(x)]/h$ である。(16),(18)式は次のようになる。

グラフ4. 2階微分 $i=1, 2$
 $m=2$



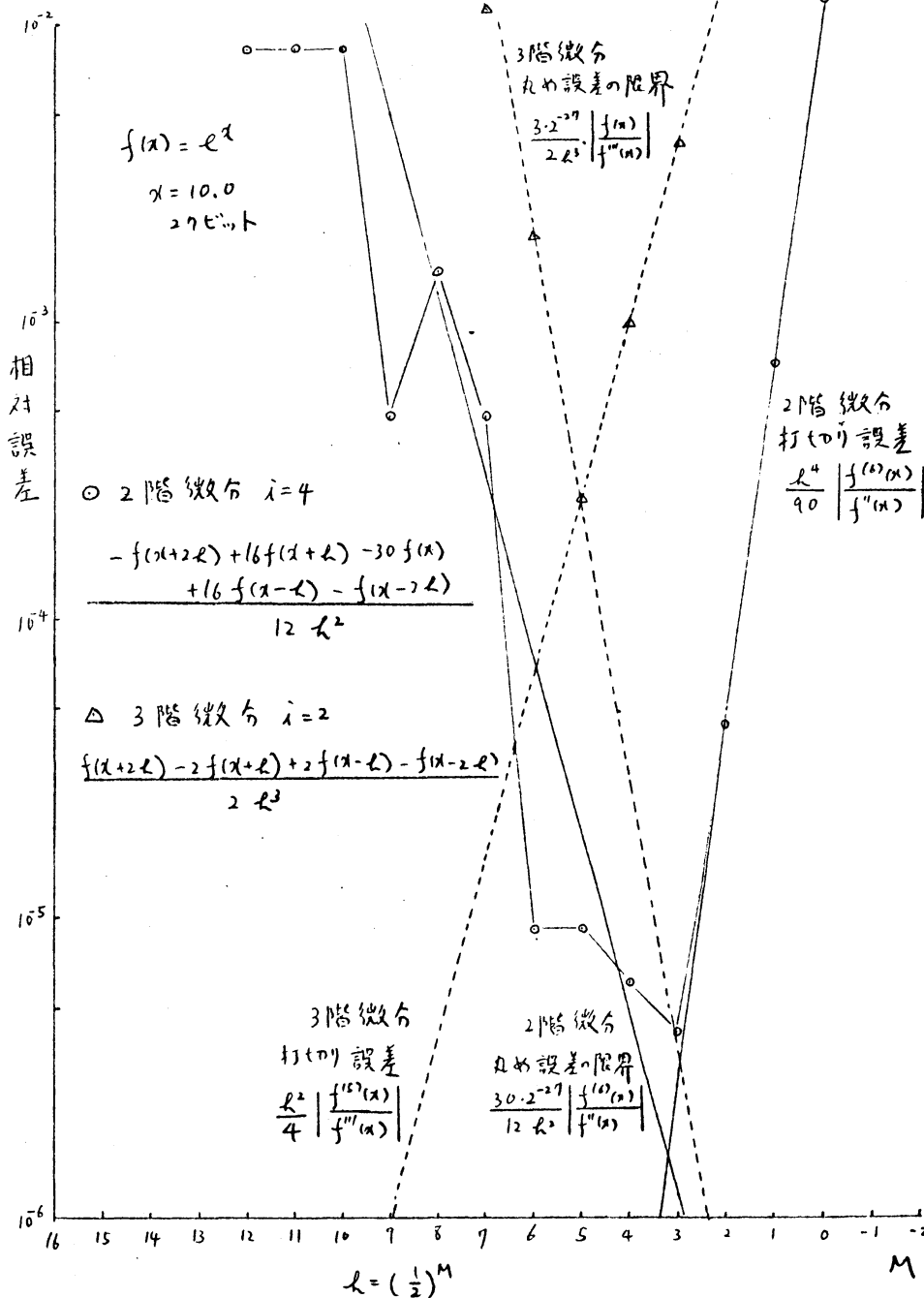
$$h_{opt} = |\alpha| \cdot |\log_e \alpha|^{\frac{1}{2}} \cdot p^{-\frac{1}{2}}, \quad |E_{min}| = |\log_e \alpha|^{\frac{1}{2}} \cdot p^{-\frac{1}{2}}$$

$p = 2, \alpha = 27$ とする。

$$\alpha = 10.0 \quad h_{opt} = 1.31 \times 10^{-3} \doteq 2^{-9.58}$$

グラフ 5.

2階微分 $i=4, m=2$
 3階微分 $i=2, m=3$

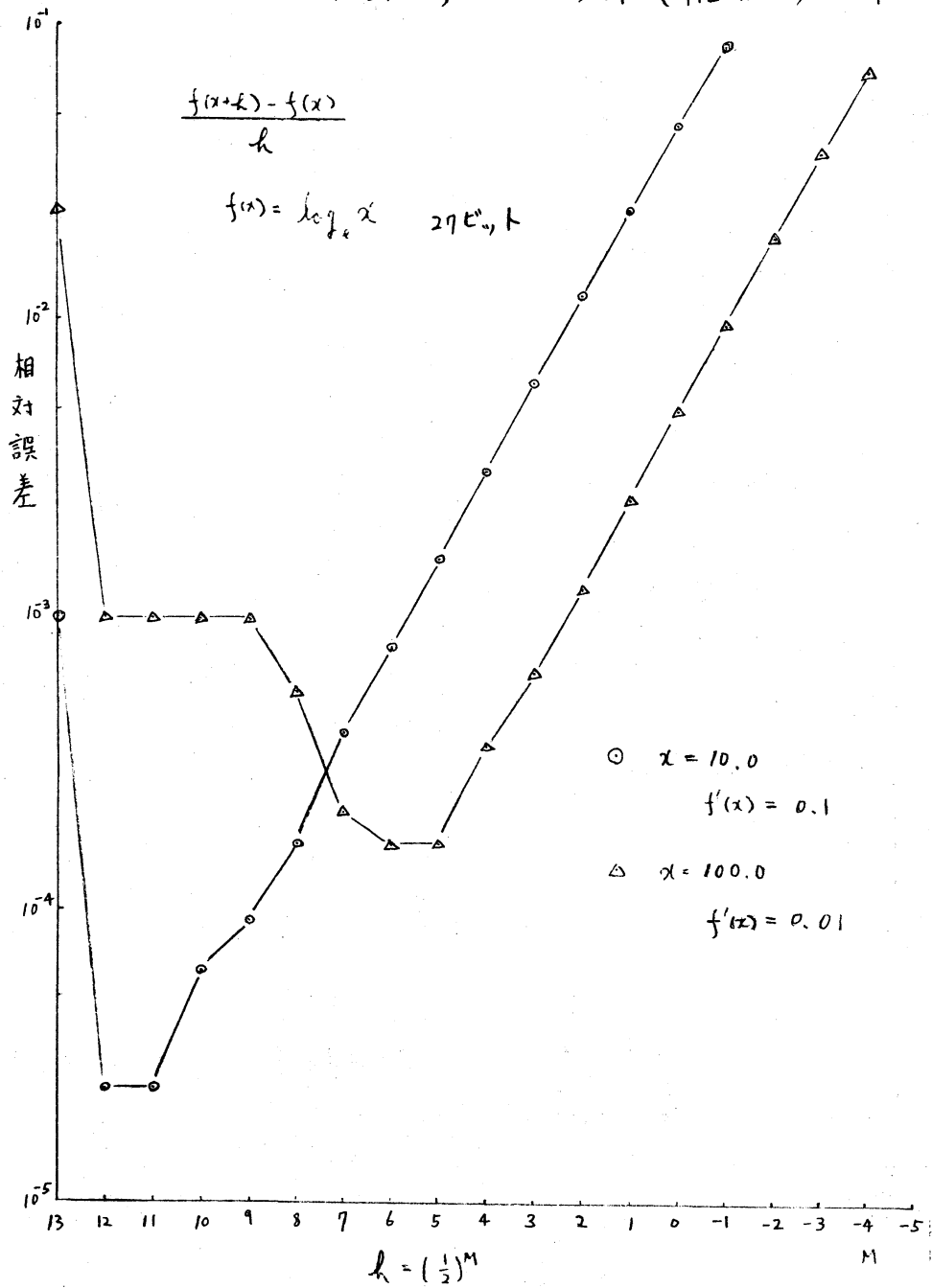


$|\hat{E}_{min}| = 1.31 \times 10^{-4} \quad [f'(x) = 0.1]$

$x = 100.0 \quad h_{opt} = 1.85 \times 10^{-2} \doteq 2^{-5.15}$

$|\hat{E}_{min}| = 1.85 \times 10^{-4} \quad [f'(x) = 0.01]$

グラフ6. $f^{(m)}$ が小さい例 (1階微分) $i=1, m=1$

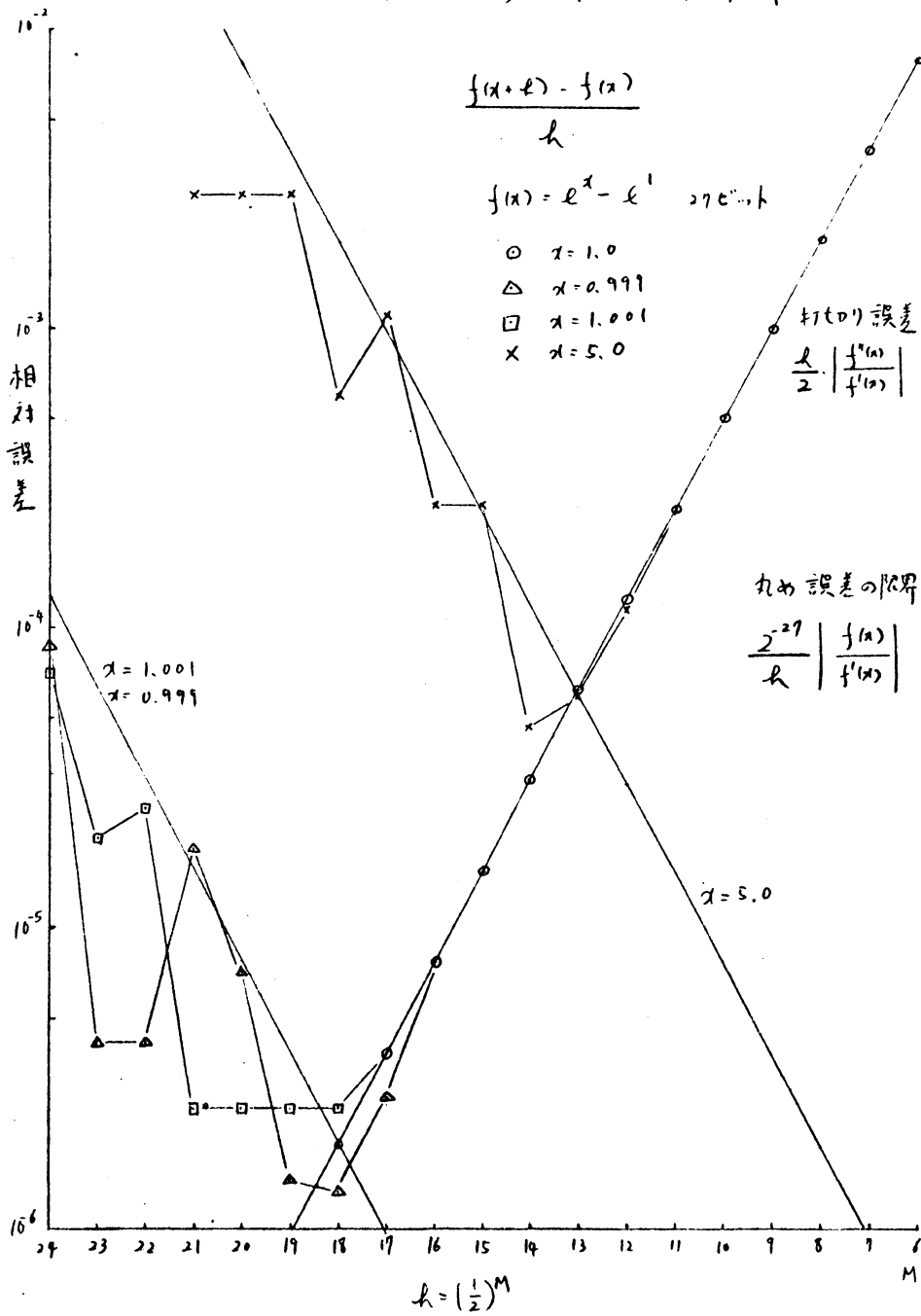


3.3 (22)式の評価より良く存る場合 (付録2)

(1)

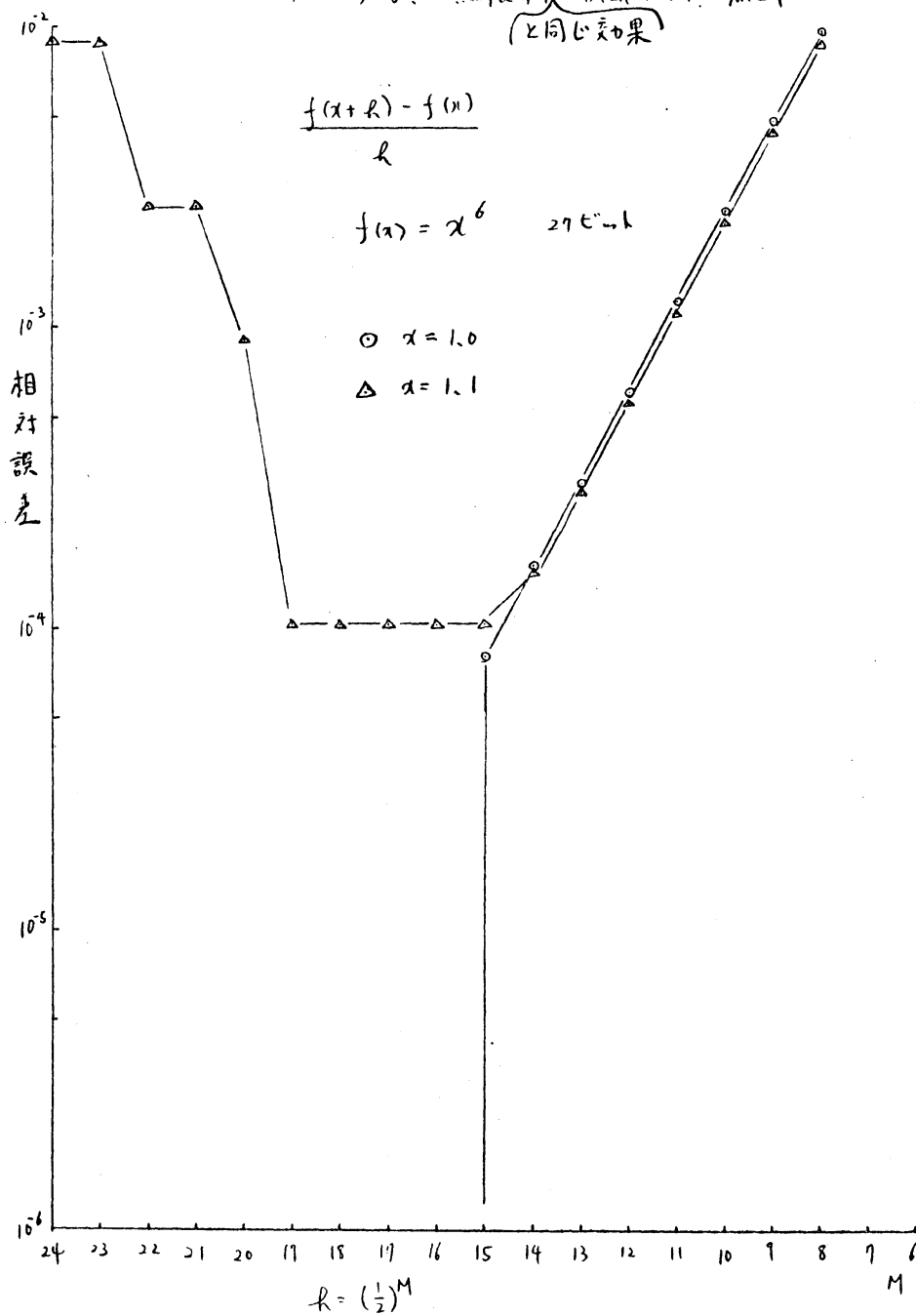
h_{opt} の付近でたまたま $E_T(h) E_R(h) < 0$ であると、 $E_T(h)$ と

7.7.7. $f(x) \equiv 0$ の例 $\lambda=1$
 $m=1$



$E_R(h)$ が打消しあひ、精度が良くなる。この例は、グラフ
 1 の $\alpha = 1.0$ あるいはグラフ 6 の $\alpha = 10.0$ の場合である。

グラフ8. 無限桁の計算の例. $\lambda=1$
 $m=1$
 (同じ効果)



(2)

$|f^{(\lambda+m)}(x)| \frac{h^m}{\lambda^m} / |f^{(m)}(x)|$ に比べて $|f(x)|$ が小さいと、丸め誤差が小さくなり、精度が良くなる。この例として、 $f(x) = e^x - e$ の

例をグラフに示す。差分法は $[f(x+h) - f(x)]/h$ である。

(16), (18) 式での評価は次のようになる。

$$h_{opt} = \left| \frac{e^x - e}{e^x} \right|^{\frac{1}{2}} \cdot p^{-\frac{d}{2}}, \quad |\hat{E}_{min}| = \left| \frac{e^x - e}{e^x} \right|^{\frac{1}{2}} \cdot p^{-\frac{d}{2}}$$

$p = 2, d = 27$ とする。

$$x = 0.999 \quad h_{opt} = |\hat{E}_{min}| = 2.73 \times 10^{-6} \doteq 2^{-18.5}$$

$$x = 1.0 \quad h_{opt} = |\hat{E}_{min}| = 0.0$$

$$x = 1.001 \quad h_{opt} = |\hat{E}_{min}| = 2.73 \times 10^{-6} \doteq 2^{-18.5}$$

$$x = 5.0 \quad h_{opt} = |\hat{E}_{min}| = 8.55 \times 10^{-5} \doteq 2^{-13.5}$$

(3)

有限桁の計算をしていても、結果的に無限桁の計算と同じ状態になると、いくらでも精度が良くなる。 $f(x) = x^6$ の例をグラフに示す。

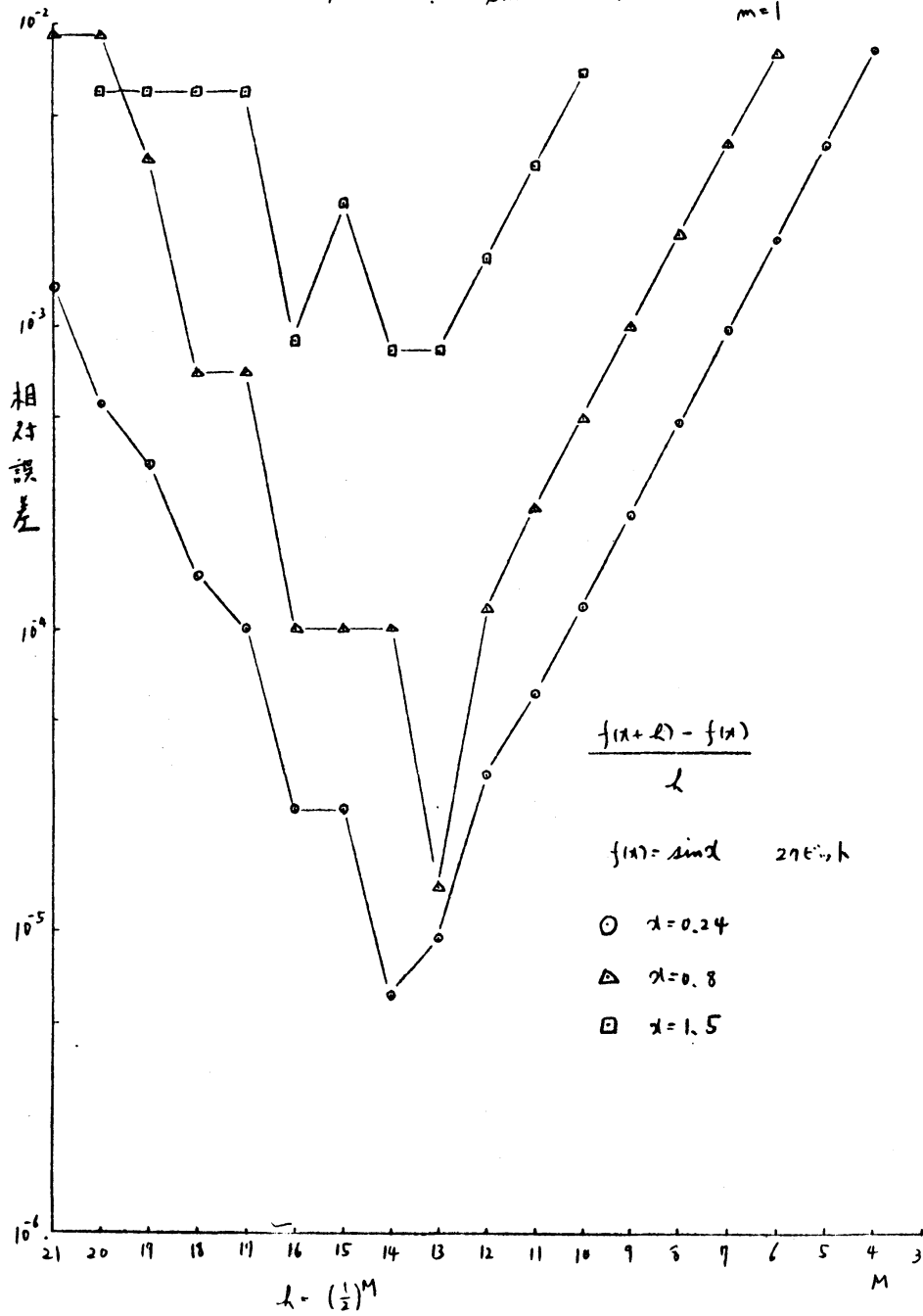
3.4 $\sin x$ の例 (付録2)

(1)

1階微分の値が変化したときの例として、 $f(x) = \sin x$ で x を変えた例をグラフ9に示す。差分法は $[f(x+h) - f(x)]/h$ である。(16), (18) 式での評価は次のようになる。

$$h_{opt} = p^{-\frac{d}{2}} = 2^{-13.5}, \quad |\hat{E}_{min}| = |\tan x| \cdot p^{-\frac{d}{2}}$$

7.7.9. $\Delta_m \alpha$ の例 $\lambda=1$ $m=1$

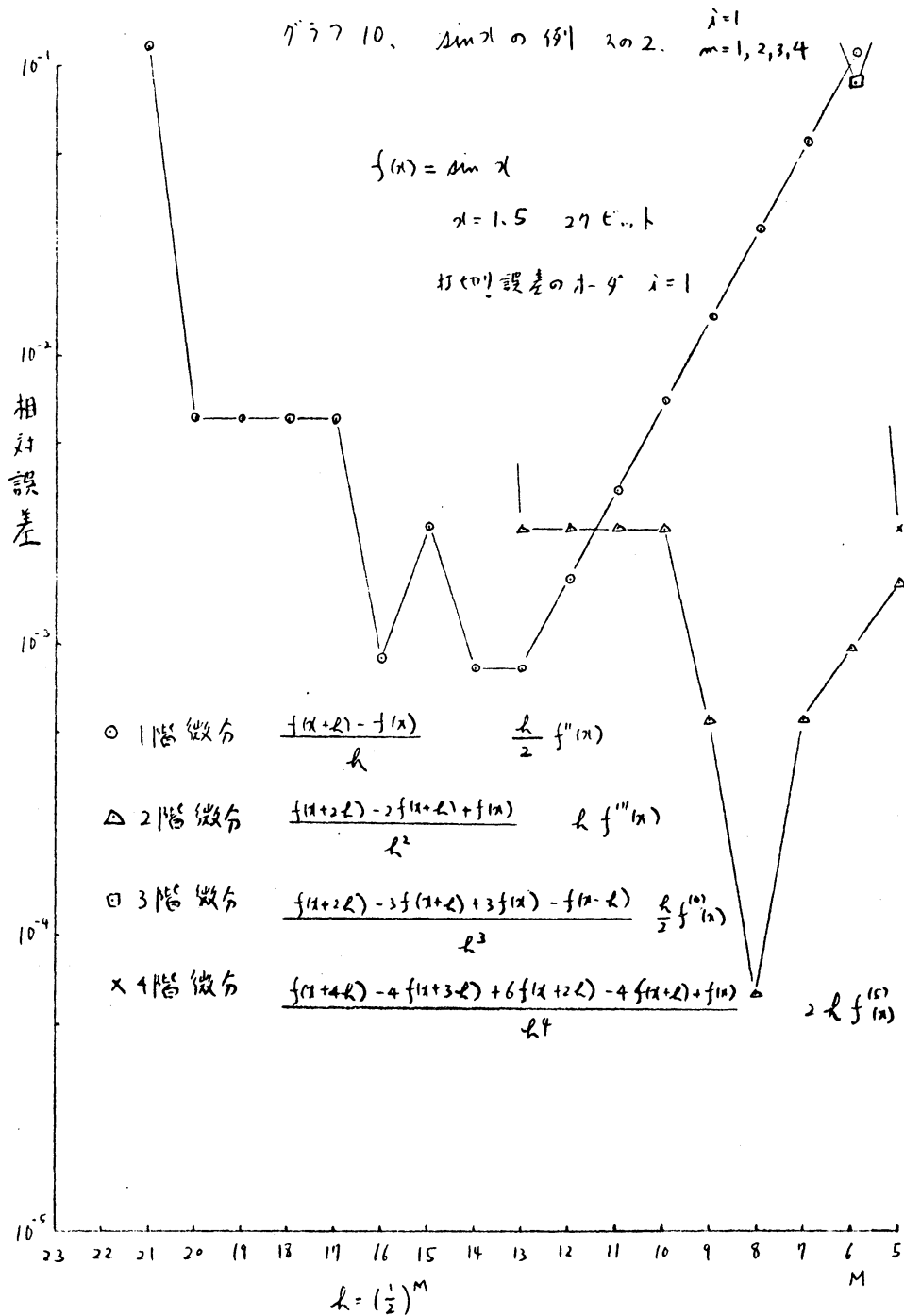


$p=2, l=296 \text{ bit}$

$\alpha = 0.24 \quad |\hat{E}_{min}| = 2.11 \times 10^{-5}$

$\alpha = 0.8 \quad |\hat{E}_{min}| = 8.89 \times 10^{-5}$

$\alpha = 1.5 \quad |\hat{E}_{min}| = 1.22 \times 10^{-3}$



(2)

同じ点で微分階数を変えた例として、 $f(x) = \sin x$, $x = 1.5$ で $m = 1, 2, 3, 4$ とした例をグラフ 10 に示す。差分法はグラフ

10上に記してある。(16),(18)式での評価は次のようになる。

$p=2, l=27, \alpha=1.5$ とする。

$$\begin{aligned}
 m=1 \quad h_{opt} &= p^{-\frac{l}{2}} && = 2^{-13.5} \\
 |\hat{E}_{min}| &= |\tan \alpha| \cdot p^{-\frac{l}{2}} && = 1.22 \times 10^{-3} \\
 m=2 \quad h_{opt} &= |\tan \alpha|^{\frac{1}{3}} \cdot p^{-\frac{l}{3}} && = 4.72 \times 10^{-3} \doteq 2^{-7.73} \\
 |\hat{E}_{min}| &= |\tan \alpha|^{-\frac{2}{3}} \cdot p^{-\frac{l}{3}} && = 3.35 \times 10^{-4} \\
 m=3 \quad h_{opt} &= p^{-\frac{l}{4}} && = 2^{-6.75} \\
 |\hat{E}_{min}| &= |\tan \alpha| \cdot p^{-\frac{l}{4}} && = 1.31 \times 10^{-1} \\
 m=4 \quad h_{opt} &= |\tan \alpha|^{\frac{1}{5}} \cdot p^{-\frac{l}{5}} && = 4.02 \times 10^{-2} \doteq 2^{-4.64} \\
 |\hat{E}_{min}| &= |\tan \alpha|^{-\frac{4}{5}} \cdot p^{-\frac{l}{5}} && = 2.85 \times 10^{-3}
 \end{aligned}$$

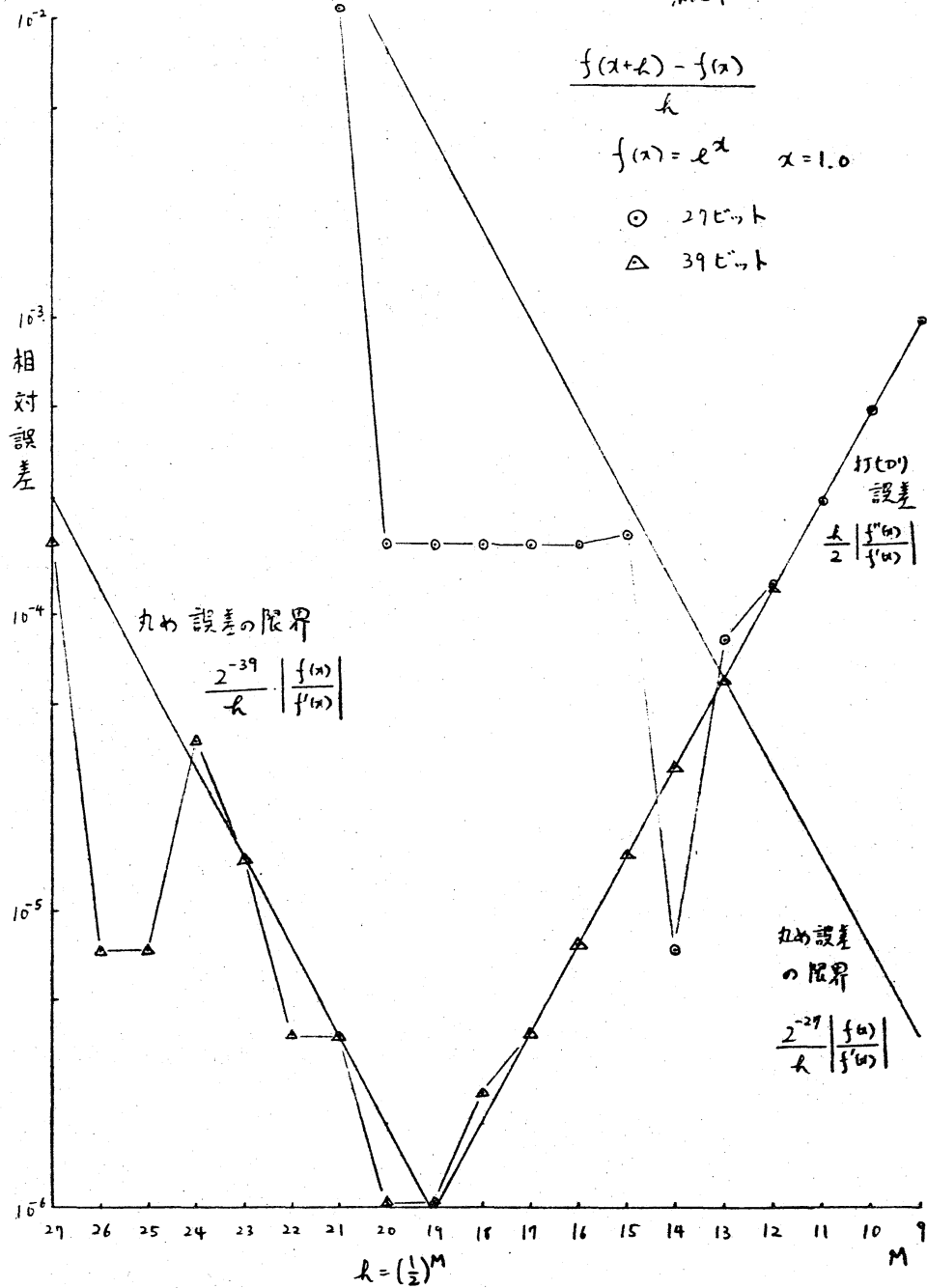
3.5 計算桁数を変えたときの精度

計算桁数を変えたときの例として、 $f(x) = e^x, \alpha = 1.0$ の1階微分を27ビット, 39ビットで計算した例をグラフIIに示す。差分法は $[f(x+h) - f(x)]/h$ である。

§4. おわりに

関数 $f(x)$ の m 階微分を打ち切り誤差のオーダーの差分法で近似して p 進法 l 桁で計算した場合、(16)式で与えられる h_{opt} のとき最も良い精度が得られ、 \hat{E}_{min} は(18)式で評価できる。さらに、 $f(x)$ が(19),(20)式の仮定を満足すれば、 h_{opt} は(21)式によ

グラフ11. 計算桁数を変えた場合 $i=1$
 $m=1$



うに在り、 \hat{E}_{min} は (22) 式のように (計算桁数) $\times \frac{1}{i+m}$ と存る。

最後に色々とお助け言をいただいた平野菅保氏に心から感謝いたします。

参考文献

- [1] 森口、高田：数値計算法 I，岩波講座「現代応用数学」
(1957)
- [2] 森口繁一：数値計算の理論と実験 II，科学 (1963)
- [3] 山内，森口，一松：電子計算機のための数値計算法 I，
培風館 (1965)
- [4] マコーミク，サルバドリ (清水訳)：FORTRAN による
数値計算プログラム，サイエンス社 (1970)
- [5] M. Abramowitz, I.A. Stegun: Handbook of Mathematical
Functions, Dover (1970)
- [6] S. Yamashita: On the Error Estimation in Floating-Point
Arithmetic, 学位論文 (1973)
- [7] 山下真一郎：浮動小数点演算の誤差評価と誤差消失につ
いて、京都大学数理解析科学講究録 215 (1974)
- [8] 永坂秀子： $(1 + \frac{1}{N})^N$ 計算，東京地区数値解析研究会資料
(1974, 赤城山)
- [9] 森口繁一：丸め誤差の確率モデル，京都大学数理解析研
究所「数値解析とコンピュータ」研究集会予稿 (1974)
- [10] 永坂秀子：極限計算における理論誤差と丸め誤差につ
いて，情報処理学会第15回大会予稿集 (1974)
- [11] 山下真一郎：演算桁数と解の精度の関係について，情報

処理学会第15回大会予編集(1974)

[12] 山下真一郎: 浮動小数点演算における誤差評価について
、情報処理(1974)

(付録1) (11)式の導出

$$\alpha = \left| \frac{bcm}{ai} \cdot \frac{f(x)}{f^{(i+m)}(x)} \right| \text{ とおく。}$$

$$\left| \frac{E_R(h_{opt})}{E_T(h_{opt})} \right| = \left| \frac{bc f(x) h_{opt}^{-m} p^{-l}}{a f^{(i+m)}(x) h_{opt}^i} \right|$$

$$= \left| \left\{ bc f(x) \alpha^{-\frac{m}{i+m}} \cdot p^{\frac{m}{i+m} l} \cdot p^{-l} \right\} / \left\{ a f^{(i+m)}(x) \alpha^{\frac{i}{i+m}} \cdot p^{-\frac{i}{i+m} l} \right\} \right|$$

$$= \left| \left\{ bc f(x) \alpha^{-\frac{m}{i+m}} \cdot p^{-\frac{i}{i+m} l} \right\} / \left\{ a f^{(i+m)}(x) \alpha^{\frac{i}{i+m}} \cdot p^{-\frac{i}{i+m} l} \right\} \right|$$

$$= \left| \frac{bc f(x)}{a f^{(i+m)}(x)} \cdot \frac{1}{\alpha} \right| = \left| \frac{bc f(x)}{a f^{(i+m)}(x)} \cdot \frac{a i f^{(i+m)}(x)}{bcm f(x)} \right| = \frac{i}{m}$$

(付録2) 実験に使用した計算機はTOSBAC-5600
で、2進補数表示である。関数計算は63ビットで行ない、
その結果を27ビットに丸めた。さらに四則演算は常に27ビ
ットで行なわれるような処理をしている(丸めの方法は0捨
1入である)。

(付録3) 表3-1 (14), (15)式の評価

m	m^*	λ	$\left \frac{acm}{a_i} \right ^{\frac{1}{i+m}}$	$\frac{i+m}{m} a \cdot \left \frac{bcm}{a_i} \right ^{\frac{i}{i+m}}$	m	m	λ	$\left \frac{acm}{a_i} \right ^{\frac{1}{i+m}}$	$\frac{i+m}{m} a \cdot \left \frac{bcm}{a_i} \right ^{\frac{i}{i+m}}$
1	3	2	1.14	0.655	4	5	2	2.04	1.04
	5	4	1.38	0.604		7	4	2.06	1.04
	7	6	1.51	0.581		9	6	2.06	1.05
	9	8	1.58	0.568		11	8	2.07	1.05
	11	10	1.64	0.559		13	10	2.07	1.05
	13	12	1.68	0.552		15	12	2.07	1.06
2	3	2	2.21	0.816	5	5	2	1.52	1.08
	5	4	2.20	0.777		7	4	1.60	1.05
	7	6	2.18	0.764		9	6	1.65	1.01
	9	8	2.16	0.761		11	8	1.69	0.978
	11	10	2.15	0.760		13	10	1.72	0.947
	13	12	2.14	0.761		15	12	1.74	0.921
3	5	2	1.43	0.853	6	7	2	1.98	1.31
	7	4	1.54	0.773		9	4	2.00	1.45
	9	6	1.62	0.723		11	6	2.01	1.53
	11	8	1.67	0.689		13	8	2.02	1.59
	13	10	1.70	0.665		15	10	2.03	1.63
	15	12	1.73	0.646		17	12	2.03	1.66

*奇数階の微分の場合、5(4)は計算には使用しないが、点数に数えるものとする。

(付録A) 表4-1 (19), (20) 式の評価

$f(x)$	$\left \frac{f(x)}{f^{(\lambda+m)}(x)} \right ^{\frac{1}{\lambda+m}}$	$\left \frac{f^{(\lambda+m)}(x)}{f^{(m)}(x)} \right \cdot \left \frac{f(x)}{f^{(\lambda+m)}(x)} \right ^{\frac{\lambda}{\lambda+m}}$
e^x	1	1
$\log_e x$	$\left \frac{\log_e x}{(\lambda+m-1)!} \right ^{\frac{1}{\lambda+m}} \cdot x $	$\frac{(\lambda+m-1)!}{(m-1)!} \left \frac{\log_e x}{(\lambda+m-1)!} \right ^{\frac{\lambda}{\lambda+m}}$
x^k	$\left\{ \frac{(k-\lambda-m)!}{k!} \right\}^{\frac{1}{\lambda+m}} \cdot x $	$\frac{(k-m)!}{(k-\lambda-m)!} \cdot \left\{ \frac{(k-\lambda-m)!}{k!} \right\}^{\frac{\lambda}{\lambda+m}}$
\sqrt{x}	$\left\{ \frac{1}{(2\lambda+2m-3)!!} \right\}^{\frac{1}{\lambda+m}} \cdot 2 x $	$\frac{(2\lambda+2m-3)!!}{(2m-3)!!} \cdot \left\{ \frac{1}{(2\lambda+2m-3)!!} \right\}^{\frac{\lambda}{\lambda+m}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\left\{ \frac{1}{(2\lambda+2m-1)!!} \right\}^{\frac{1}{\lambda+m}} \cdot 2 x $	$\frac{(2\lambda+2m-1)!!}{(2m-1)!!} \cdot \left\{ \frac{1}{(2\lambda+2m-1)!!} \right\}^{\frac{\lambda}{\lambda+m}}$
$\frac{1}{x+a}$	$\left\{ \frac{1}{(\lambda+m)!} \right\}^{\frac{1}{\lambda+m}} \cdot x+a $	$\frac{(\lambda+m)!}{m!} \cdot \left\{ \frac{1}{(\lambda+m)!} \right\}^{\frac{\lambda}{\lambda+m}}$
$\frac{cx+d}{ax+b}$	$\left \frac{a(cx+d)}{(\lambda+m)!(bc-ad)} \right ^{\frac{1}{\lambda+m}} \cdot \left \frac{ax+b}{a} \right $	$\frac{(\lambda+m)!}{m!} \left \frac{a(cx+d)}{(\lambda+m)!(bc-ad)} \right ^{\frac{\lambda}{\lambda+m}}$
$\sin x$	1 $i+m$: 偶数 $ \tan x $ $i+m$: 奇数	1 $i+m$: 偶数, i : 偶数 $ \tan x $ $i+m$: 偶数, i : 奇数 $ \tan x ^{\frac{\lambda}{\lambda+m}}$ $i+m$: 奇数, i : 偶数 $ \tan x ^{\frac{-m}{\lambda+m}}$ $i+m$: 奇数, i : 奇数