

葉層構造と計量構造とに関連する特性類

東工大 理 大学院 安部 直人

§0. 序

微分可能多様体に葉層構造 (foliation) が与えられた時、葉層構造に固有な map や vector bundle を定義できる。これ等の概念は、複素構造に関する、holomorphic map や holomorphic vector bundle に対応するものである。ここで固有な vector bundle とは、foliation の各 leaf 上で flat となるような bundle を指すものとする。Smooth foliation の normal bundle はこの典型的な例である。固有な map とは、一方の foliation の各 leaf を、他方の foliation の各 leaf に写像しているようなものとする。

この報告では、上記の bundles に対し foliation に固有な普通より細かい分類を [1] に沿って定義し、これを使って若干の事を統一的に調べる。特に、これ等の vector bundles の構造群の maximal compact subgroup $U(k)$ または $O(k)$ の

q reducibility につき、細かい分類の意味で q foliation
 \mathbb{R} compatible と reduction の存在の obstructions として
 q exotic 特性類と云う base space の cohomology の元
 が定義される。例えば、余次元 q の q foliation の normal
 bundle を考える時、構造群 $GL(q, \mathbb{R})$ が $O(q) \times$ foliation
 \mathbb{R} compatible と reducible である事と、bundle-like
 metric [1] が存在する事とは同値であり、その obstructions
 として Godbillon-Vey の不変量 [6] や exotic characteristic
 classes [2] が定義されることを見よう。また、Heitsch
 [7] は normal bundle について、この Bott の classes がある
 ものが一般には bundle invariant ではないことを注意し
 ているが、細かい分類の観点から見れば、この事は明確に認
 識される。Complex analytic な場合も扱うので、exotic
 特性類は complex vector bundle に対して定義する。普通
 の特性類の性質と、exotic 特性類の性質との比較も、主たる
 目的の一つである。

§1. 基本的定義

n 次元多様体 M が余次元 q の葉層構造 (foliation) を持つ
 とは、 M の座標系 $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, (x^i, y^a))\}$ ($1 \leq a \leq n-q$,
 $1 \leq i \leq q$) として

① 各 $U_\lambda \cap U_\mu (\neq \emptyset)$ において $y_\lambda^i = f_{\lambda\mu}^i(y_\mu^i)$ とする性質を持つものが存在する事である。この様な座標系を flat と呼ぶ。 M の局所座標 $(U, (x^a, y^i))$ は、これを \mathcal{F} に加えても ① が成立する時、 \mathcal{F} に関して flat と呼ばれる。他の flat 座標系 \mathcal{F}' は、 \mathcal{F} と合わせても ① の性質を持つ時、 \mathcal{F} と同じ foliation を定めるとする。 M の $2 > a$ trivial な foliation、即ち余次元 $0 < n - a$ のものをそれぞれ \mathcal{F}_1 と \mathcal{F}_2 で表わす。(ただし、 $g = 0, n = 1$ においては、それぞれ x^a の座標は (x^a) のみ、 (y^i) のみと約束する。) M の開集合 U 上に自然に induce される foliation を $\mathcal{F}|_U$ と書く。

M が微分可能多様体の時、微分可能座標系による定義される smooth foliation を与えると、 M の tangent bundle $T = TM$ の integrable な subbundle F が $(\partial/\partial x^a)$ により決まる。この時、 TF を \mathcal{F} の normal bundle と呼ぶ。

Flat 座標系 $\mathcal{F}_c = \{(U_\lambda, (x^a, y_\lambda^i))\}$ において、 (y_λ^i) は複素座標で ① における $f_{\lambda\mu}^i$ は holomorphic である時、 \mathcal{F}_c を complex analytic foliation と呼ぶ。(複素余次元は g である。) \mathcal{F}_c は余次元 $2g$ の smooth foliation を決め、この underlying な smooth foliation は \mathcal{F}_1 と書かれる。

多様体 M' は foliation \mathcal{F}' を持つとする。この時、連続写

像 $f: M \rightarrow M'$ が \mathcal{F} の各 leaf を \mathcal{F}' の leaf に map して写すことは、 f を \mathcal{F} と \mathcal{F}' に compatible な map、または簡単に $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map と呼ぶことにする。 \mathcal{F} に関して flat な局所座標 (x^a, y^i) 、 \mathcal{F}' に関して flat な局所座標 (x'^a, y'^i) により、 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map f は

$$\textcircled{2} \quad y'^i \circ f = f'^i(y^i)$$

を満たす。 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map を特に \mathcal{F} -basic ともよぶこともある。 Complex analytic foliations $\mathcal{F}_c, \mathcal{F}'_c$ に対しても、 $\textcircled{2}$ の f'^i が holomorphic であることを要求して、 $(\mathcal{F}_c, \mathcal{F}'_c)$ -map を定義する。

$M \times \mathbb{R}$ 上には余次元 $q+1$ の自然な foliation $\bar{\mathcal{F}}$ が \mathcal{F} から induce される。 写像 $j_s: M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ を、 $p \in M$ 、 $s \in \mathbb{R}$ に対して、 $j_s(p) := (p, s)$ と定義すれば、これは $(\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}})$ -map である。 二つの $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -maps $f_0, f_1: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -homotopic であるとは、 $(\bar{\mathcal{F}}, \mathcal{F}')$ -map $H: M \times \mathbb{R} \rightarrow M'$ により $f_0 = H \circ j_0$ 、 $f_1 = H \circ j_1$ を満たすものが存在することと定義する。 従って、smooth foliations を考える際には、map などはすべて smooth なものを使う。

注意 Foliations を考えるときには a map は $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map または $(\mathcal{J}, \mathcal{J}')$ -map と見られる。

§2. \mathcal{F} -cocycles

以下の議論で、多様体 M には foliation \mathcal{F} が与えられているとする。Lie 群 G と M の開集合 U に対し、 G 値を持つ $\mathcal{F}|_U$ -basic functions の全体を $A_{\mathcal{F}}^0(U, G)$ で表わす。更に、これから定義される M 上の presheaf を $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ と記す。

$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を M の開被覆とする。

定義 $\mathcal{g} = \{g_{\lambda\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \rightarrow G\}_{\lambda, \mu \in \Lambda}$ は次の条件を満足する時、係数 $\mathcal{G}_{\mathcal{F}}$ の cocycle、または簡単に \mathcal{F} -cocycle と呼ばれる。 \mathcal{F} -cocycles 全体の集合を $Z^1(\mathcal{U}, \mathcal{G}_{\mathcal{F}})$ と書く。

i) $g_{\lambda\mu} \cdot g_{\mu\nu} = g_{\lambda\nu}$ on $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\nu$ (cocycle)、

ii) $g_{\lambda\mu} \in A_{\mathcal{F}}^0(U_\lambda \cap U_\mu, G)$ 。

M が complex analytic foliation \mathcal{F}_c を持つ時は、上の定義で \mathcal{F} を \mathcal{F}_c に換えて \mathcal{F}_c -cocycle と云う概念を定義できる。この時 G は complex Lie 群を考へる。

例として、普通の G -bundle の transition functions は \mathcal{U} の \mathcal{O} -cocycle であり、 \mathcal{F} -cocycle は flat G -bundle の transition functions である。このように自明なものではない典型例としては、smooth foliation \mathcal{F} の normal bundle $\mathcal{N}_{\mathcal{F}}$ の、 \mathcal{F} に関する flat 座標系による定義される $\mathcal{U} = \{(\partial y_\mu^i / \partial y_\lambda^j) : U_\lambda \cap U_\mu \rightarrow GL(q, \mathbb{R})\}$ がある。

\mathcal{F}_c -vector ^{bundle} の典型例としては、 \mathcal{F}_c に関する flat 束座標系 =
 あるいは $\mathcal{U}_c = \{ (dy_\mu^i / dy_\lambda^j) : U_\lambda \cap U_\mu \rightarrow GL(n, \mathbb{C}) \}$ により定義
 されるものは、 y_μ^i が y^α のみからなる holomorphic である
 から確か条件をみたす。

定義 \Rightarrow \mathcal{F} -cocycles $\eta^0 = \{g_{\lambda\mu}^0\}$, $\eta^1 = \{g_{\lambda\mu}^1\}$ が
 \mathcal{F} -equivalent とは、次の条件をみたす $\{h_\lambda : U_\lambda \rightarrow G\}$
 が存在することである。この時、 $\eta^0 \cong \eta^1$ と書く。

- i) $g_{\lambda\mu}^1 = h_\lambda^{-1} g_{\lambda\mu}^0 h_\mu$ on $U_\lambda \cap U_\mu$, (cohomologous)
- ii) $h_\lambda \in A_{\mathcal{F}}^0(U_\lambda, G)$ 。

特に \mathcal{O} に関しては、 $\mathbb{C}_0 \cong \mathbb{C}$ を G , \cong と書く事とする。

\mathcal{F} -cocycles η は \mathcal{F} -equivalent なものから成る類を、
 $[\eta]_{\mathcal{F}}$ または同じ文字 η で表わし、 $H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_{\mathcal{F}}) := Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_{\mathcal{F}}) / \cong$
 により cohomology set を表わす。異なる開被覆で定義される
 異なる \mathcal{F} -cocycles に対しては、その共通部分を考へる事によ
 り、 \mathcal{F} -equivalent の概念は拡張される。M 上の \mathcal{U}^n の
 \mathcal{F} -cocycles の \mathcal{F} -equivalence classes の全体は、proper
 開被覆による direct limit $H^1(M, \mathbb{C}_{\mathcal{F}}) := \varinjlim_{\mathcal{U}} H^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_{\mathcal{F}})$ によ
 り表わされる。特に、M 上恒等的に G の単位元 e を
 取る函数による $H^1(M, \mathbb{C}_{\mathcal{F}})$ の元を $\varepsilon_{\mathcal{F}}$ で表わ
 すこととする。

特に、 \mathcal{F} が "complex analytic foliation \mathcal{F}_c の underlying foliation" の時、 $Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_{\mathcal{F}_c}) \subset Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{C}_{\mathcal{F}})$ であるが、 \mathcal{F}_c -cocycles γ は、上の定義の \mathcal{F} を \mathcal{F}_c に換えて \mathcal{F} -equivalent より細かい \mathcal{F}_c -equivalent なる概念を定義できる。

写像 $f: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map ならば、 $\eta' \in Z^1(\mathcal{U}', \mathbb{C}_{\mathcal{F}'})$ から induce される cocycle $f^*\eta' = \{g'_j \circ f\}$ は明らかに $Z^1(f\mathcal{U}, \mathbb{C}_{\mathcal{F}})$ の元となるので、次の事がわかる。

命題 2.1 $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map $f: M \rightarrow M'$ は、induced cocycle を対応させる事によって、cohomology set に関する map $f^*: H^1(M', \mathbb{C}_{\mathcal{F}'}) \rightarrow H^1(M, \mathbb{C}_{\mathcal{F}})$ を induce する。

例 2.1 $f: M \rightarrow M'$ が submersion の時、 M 上には自然に \mathcal{F} foliation \mathcal{F} が決まり、 f は $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map として見ると、 $f^*: H^1(M', \mathbb{C}_{\mathcal{F}'}) \rightarrow H^1(M, \mathbb{C}_{\mathcal{F}})$ が induce される。この f^* の image に入る元は、 \mathcal{F} の leaf 上 global \mathcal{F} -section もあるから、 f^* は一般には全射ではない。

特に M の恒等写像を $(\mathcal{O}, \mathcal{F})$ -map として \mathcal{O} と書くとすると、 $\mathcal{O}^*: H^1(M, \mathbb{C}_{\mathcal{F}}) \rightarrow H^1(M, \mathbb{C})$ が induce されるが、これは injective としても surjective としてもない。この事は後の sections の結果からわかる。ここは、 $H^1(M, \mathbb{C})$ は M 上の \mathbb{C} の G -bundles の普通の意味での同型類の全

体とみさせる [8]。 毎、 $L_{\mathbb{Z}}^*$ が injective であることと云う事は、 M 上の \mathcal{F} -cocycles の \cong による分類が \cong による分類より細かいと云う事である。

\mathcal{F} -cocycles τ 、 η と \cong との間にある同値関係を次のように定義する。

定義 M 上の \Rightarrow の \mathcal{F} -cocycles η^0, η^1 が \mathcal{F} -homotopic であるとは、 $M \times \mathbb{R}$ 上の \mathcal{F} -cocycle $\tilde{\eta}$ が存在して $f_0^* \tilde{\eta} \cong \eta^0$ かつ $f_1^* \tilde{\eta} \cong \eta^1$ とする事を云う。 更に、 η^0 と η^1 が有限個の \mathcal{F} -homotopic な \mathcal{F} -cocycles で結ばれる時 $\eta^0 \cong \eta^1$ と表わす。

普通 G -bundles と普通の同値 \cong による同値関係は次の事実が知られている。(例として Hirzebruch [8]。)

□ $\eta^0 \cong \eta^1$ ならば $\eta^0 \cong \eta^1$ 。 つまり、 $f_0, f_1: M \rightarrow M'$ が普通の意味で homotopic な maps とすれば、 $f_0^* = f_1^* : H^1(M', \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(M, \mathbb{Z})$ が成立する。

この事実は、 \mathbb{Q} を \mathcal{F} とする一般に成立し得る。 後に定義する exotic 特性類によっても、相違は無い。

命題 2.2 \Rightarrow の $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -maps $f_0, f_1: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -homotopic ならば、 M' 上の \mathcal{F}' -cocycle η' に対しては $f_0^* \eta' \cong f_1^* \eta'$ が成立する。

注意 M 上の forms から定義される cohomology は L とは、状況は \square に似て来る。 \mathcal{F} が smooth foliation の時

$$A_{\mathcal{F}}^* := \{ \varphi \in A^* \mid i_X \varphi = \mathcal{L}_X \varphi = 0, \forall X \in \Gamma \mathcal{F} \}$$

は、 M 上の global forms 全体から作る de Rham complex (A^*, d) の subcomplex $(A_{\mathcal{F}}^*, d)$ を与える。この complex の cohomology を $H_{\mathcal{F}}^*(M)$ と書き、base-like cohomology または \mathcal{F} -basic cohomology と呼ぶ [12]。 M' が smooth foliation \mathcal{F}' を持ち、 $f: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map であるならば、homomorphism $f^*: H_{\mathcal{F}'}^*(M') \rightarrow H_{\mathcal{F}}^*(M)$ が induce される。次の事が証明できる [1]。

\square $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -maps $f_0, f_1: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -homotopic であるならば、 $f_0^* = f_1^*: H_{\mathcal{F}'}^*(M') \rightarrow H_{\mathcal{F}}^*(M)$ が成立する。

§3. \mathcal{F} -fibre bundles と構造群の \mathcal{F} -reduction

Lie 群 G が多様体 N 上に効果的に作用し、 W を全空間 W 、底空間 M 、射影 π 、構造群 G 、fibre N であるような fibre bundle とする。

定義 Fibre bundle W は次の性質をみたす座標系 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda)\}$ が存在する時、 \mathcal{F} -fibre bundle と呼ばれる。すなわち、

i) $\varphi_\lambda: \pi^{-1}(U_\lambda) \rightarrow U_\lambda \times N$: bundle isomorphism、

ii) $\exists \{g_{\lambda\mu}\} \in Z^1(\mathcal{U}, \mathbb{G}_{\mathcal{F}})$, $\forall p \in U_\lambda \cap U_\mu, n \in N$

$$\pi \circ \pi_{\mu}^{-1}(p, n) = (p, g_{\lambda\mu}(p)n).$$

このように W に対し、 M の開集合 U と $\pi: \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times N$: bundle isomorphism の組 (U, π) を上記の座標系 μ 加えても i), ii) を満たすならば、 (U, π) を \mathcal{F} -admissible chart と云う。

定義 W の二つの座標系が μ, ν の二つの \mathcal{F} -admissible charts を共有するならば、これ等は同じ \mathcal{F} -fibre bundle を定めるとする。

この事は二つの座標系を決める \mathcal{F} -cocycles が \mathcal{F} -同値なものである事と同じである。

定義 W と W' は M 上の \mathcal{F} -fibre bundle として、同じ構造群と fibre を持つとする。 M の identity を cover する bundle isomorphism $f: W \rightarrow W'$ が \mathcal{F} -isomorphism であるとは、 W' の μ' がある \mathcal{F} -admissible chart (U, π') に対しても、 $(U, \pi' \circ f)$ が W の \mathcal{F} -admissible chart となる、とする。 [8] と同様にして次を得る。

命題 3.1 M 上の構造群 G 、fibre N の \mathcal{F} -fibre bundle の \mathcal{F} -isomorphism による同型類全体は $H^1(M, \mathcal{F}_G)$ と一対一に対応する。

$\eta \in H^1(M, \mathcal{F}_G)$ に対応する \mathcal{F} -isomorphism class $a \in \mathcal{F}$ の \mathcal{F} -fibre bundle を η に associate する \mathcal{F} -fibre bundle

と云ふ事である。特に \mathcal{F} -vector bundle \mathcal{F} である時は、 \mathcal{F} -admissible chart \mathcal{F} に対応する local frame field を \mathcal{F} -admissible frame field と呼ぶ。

M が complex analytic foliation \mathcal{F}_c を持つ時は、 G を complex Lie 群、 N を complex analytic な多様体として、定義の \mathcal{F} を \mathcal{F}_c に換之れば、 \mathcal{F}_c -fibre bundle が定義できる。命題 3.1 は \mathcal{F} を \mathcal{F}_c に換之ても成立する。

以後は特に断りのない限り、少なくとも微分可能な場合を考へることとする。

\mathcal{F} -vector bundle の例としては、

例 3.1 \mathcal{F} が \mathcal{G} の vector bundle は \mathcal{G} -vector bundle。

例 3.2 Flat vector bundle は \mathcal{F} -vector bundle の構造をもつ。

例 3.3 Foliation \mathcal{F} の normal bundle T/\mathcal{F} は \mathcal{F} -vector bundle である。更に $\mathcal{F} \subset T$ なる subbundle E が $[\mathcal{F}, \mathcal{F}] \subset E$ を満たす時、 T/E は canonical な \mathcal{F} -vector bundle の構造を持つ。

証明. \mathcal{F} は \mathcal{F} (flat) 座標系 $\{(U_\lambda, (x_\lambda^i, y_\lambda^j))\}$ を持つ。
 T/E の fibre の次元を p とする。 ($q \geq p$) Index の範囲を $1 \leq s, t \leq p, p < r \leq q$ と取る。 $\pi' : T \rightarrow T/E$ を projection とする。各 $x \in U_\lambda \cap U_\mu$ に対し、 x の近傍

$U_{\lambda, x} \subset U_{\lambda}$ が存在して、この上では

$$\pi' \left(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^r} \right) \wedge \cdots \wedge \pi' \left(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^p} \right) \neq 0$$

と仮定してよい。この時、 $U_{\lambda, x}$ 上の関数 (A_{λ}^t) が存在して

$$\bullet \quad \pi' \left(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^r} \right) = A_{\lambda}^t \pi' \left(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t} \right) \quad \text{on } U_{\lambda, x}$$

が成立する。 $U_{\lambda, x} \cap U_{\mu, x} \neq \emptyset$ であるとき \bullet を使って

$$\begin{aligned} \pi' \left(\frac{\partial}{\partial y_{\mu}^s} \right) &= \frac{\partial y_{\lambda}^t}{\partial y_{\mu}^s} \pi' \left(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t} \right) + \frac{\partial y_{\lambda}^r}{\partial y_{\mu}^s} \left(A_{\lambda}^t \pi' \left(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t} \right) \right) \\ &= \left(\frac{\partial y_{\lambda}^t}{\partial y_{\mu}^s} + \frac{\partial y_{\lambda}^r}{\partial y_{\mu}^s} A_{\lambda}^t \right) \pi' \left(\frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t} \right). \end{aligned}$$

よって A_{λ}^t が (y_{λ}^i) のみの関数であることを証明すればよい。

\bullet より $\left(\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}^s}, \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^r} - A_{\lambda}^t \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t} \right)$ は $E|U_{\lambda, x}$ の frame field である。 $(PF, PE) \subset PE$ より次式の右辺は $\in P(E|U_{\lambda, x})$ であり $\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}^s} A_{\lambda}^t = 0$ が成立。

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}^s}, \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^r} - A_{\lambda}^t \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t} \right] = - \left(\frac{\partial}{\partial x_{\lambda}^s} A_{\lambda}^t \right) \frac{\partial}{\partial y_{\lambda}^t}. \quad //$$

例 3.4 V と V' が \mathfrak{G} -vector bundle ならば、 V^* , $V \oplus V'$, $V \otimes V'$ は \mathfrak{G} -vector bundle である。例として、Lie 群 G が M に almost freely 作用しているとき、 G の orbits を leaves とする foliation を \mathfrak{G} とすれば、 T は \mathfrak{G} -vector bundle の構造を持つ。

この事は complex analytic vector bundle の場合と同様に、 \mathfrak{G} -vector bundles の Grothendieck 群 $K_{\mathfrak{G}}(M)$ が定義できる。

る。(Grothendieck 群 K_0 については例 3.4 [8].)

\mathcal{F}_c -vector bundle の例.

例 3.5 \mathcal{F}_c について flat 基底座標系 $\{(U_\lambda, (x_i^j, y_i^j))\}$ を与える。この複素座標が $y_i^j = u_i^j + \sqrt{-1}v_i^j$ と表わすことができる時、 $(\pi(\frac{\partial}{\partial x_i^j}) - \sqrt{-1}\pi(\frac{\partial}{\partial v_i^j}))/2$ を定義する $(T/F) \otimes \mathbb{C}$ を a complex subbundle と Q とする。この Q は \mathcal{F}_c -coycle $\nu_c = \{(\frac{\partial y_i^j}{\partial x_i^k}) : U_\lambda \cap U_\mu \rightarrow \mathcal{G}(\mathbb{C})\}$ に associate する \mathcal{F}_c -vector bundle と存在する。

定義 \mathcal{F}_c -fibre bundle W に対応する $H^1(M, \mathcal{G}_\mathcal{F})$ の元が \mathcal{G} の Lie 部分群 H の inclusion map $\iota_H^G : H \hookrightarrow \mathcal{G}$ により induce された写像 $\iota_H^* : H^1(M, \mathcal{H}_\mathcal{F}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{G}_\mathcal{F})$ の image を含む時、 W の構造群は $H \cap \mathcal{F}_c$ -reducible であるとする。

普通の bundle については、次の事が知られている [8].

□ H を \mathcal{G}/H が cell を含むような \mathcal{G} の closed Lie 部分群とすれば、 $\iota_H^* : H^1(M, \mathcal{H}) \rightarrow H^1(M, \mathcal{G})$ は bijective.

この事は \mathcal{O} を \mathcal{F}_c とすると、一般には成立しない。例 3.6.

命題 3.2 Smooth foliation \mathcal{F}_c は a normal bundle T/F の構造群 $\mathcal{G}(\mathbb{R})$ は、 M が \mathcal{F}_c に関する bundle-like metric [11] を持つ限り、 $\mathcal{O}(\mathbb{R}) \cap \mathcal{F}_c$ -reducible である。

この命題は、より一般な次の事より出る。

命題 3.3 M 上の real (resp. complex) \mathfrak{F} -vector bundle V に metric g が、 V の構造群 $GL(k, \mathbb{R})$ (resp. $GL(k, \mathbb{C})$) の $O(k)$ (resp. $U(k)$) の \mathfrak{F} -reduction を与えるものは、 g の \mathfrak{F} -admissible frame fields $\{e_i\}$ なる成分が local \mathfrak{F} -basic $\{e_i\}$ となる時 \mathfrak{F} 限る。

証明 \mathfrak{F} -admissible frame field $\{e_i\}$ に対して Gram-Schmidt の直交化を行なう時、 $\{e_i\}$ なる g の成分が y_i のみ \mathfrak{F} depend しているとき、出てくる係数は y_i のみの関数 \mathfrak{F} とれる。よって、得られた frame field は \mathfrak{F} -admissible である。逆は明らか。 //

この事は、 V の構造群の reduction が V の tensor field \mathfrak{F} として与えられるとき、それが \mathfrak{F} -reduction であるかどうか判断する具体的方法を与えている。

定義 Foliation \mathfrak{F} の余次元 q が偶数で、 T/F の構造群が $GL(q/2, \mathbb{C})$ の \mathfrak{F} -reducible である時、 \mathfrak{F} は almost complex foliation と云う。

例として、 \mathfrak{F} が複素余次元 $q/2$ の complex analytic 葉 foliation の underlying \mathfrak{F} smooth foliation とすれば、 T/F は \mathbb{C} の complex structure J を induce している almost complex structure をもつが、これが \mathfrak{F} -reduction を与える。

なる。この例や命題 3.2 のように、 \mathcal{F} a normal bundle
 T/F a 構造群 a \mathcal{F} -reduction を考へる事は有用である。

T/F a 構造群 $GL(n, \mathbb{R})$ が、 \mathcal{F} a 部分群 H \wedge \mathcal{F} -reducible
 である事と、Conlon [5] a transverse H -structure が
 存在する事とは同値である。

構造群が $O(k)$ ($U(k)$) \wedge \mathcal{F} -reducible な \mathcal{F} -vector bundle
 の例としては次の様なものがある。

例 3.6 例 2.1 における $Im f^*$ a 元 f associate する \mathcal{F} -
 vector bundle a 構造群は、 M' における $O(k)$ ($U(k)$) \wedge a
 reduction による、 \mathcal{F} -reducible to $O(k)$ ($U(k)$) である。
 より一般に、 \mathcal{F} -vector bundle V a \mathcal{F} -admissible な
 開被覆が \mathcal{F} -basic partition of unity を許すならば、 V の構
 造群は $O(k)$ (or $U(k)$) \wedge \mathcal{F} -reducible である。ここで、
 \mathcal{F} -basic partition of unity とは、(\mathcal{F} -basic な M 上の)
 函数による 1 の分解の事である。

§4. Connections on \mathcal{F} -vector bundles

V と $\eta \in H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{F})_{\mathcal{F}})$ f associate する \mathcal{F} -vector
 bundle とする。ここで \mathbb{F} は \mathbb{R} か \mathbb{C} を表す可とする。

定義 Connection $D: \Gamma V \rightarrow \Gamma(T^* \otimes V)$ は、 V a u がある
 \mathcal{F} -admissible frame field s に対して

① $D_X S = 0$, for $\forall X \in \Gamma(F/U)$,
 2" がある時、 η は compatible な \mathcal{F} -flat connection と呼ば
 れる。

次の命題は ① より容易に解る。

命題 4.1 $K_D(X, Y) := [D_X, D_Y] - D_{[X, Y]} = 0, \forall X, Y \in \Gamma F$.

\mathcal{F} -flat connection の例として、

例 4.1 例 3.3 の T/E には、次に定義する標準的な \mathcal{F} -flat
 connection が存在する。これは、 $E = F$ の時には、Bott
 [2] により定義された basic connection と一致する。

T/E には connection D を取り、 $T = F \oplus F^\perp$ と分解して
 置く。 $s \in \Gamma(T/E)$ に対し、 $\tilde{s} \in \Gamma T$ 2" $\pi'(\tilde{s}) = s$ なるものを
 取り、 $\forall X \in \Gamma T$ には

$$\nabla_X s := \pi'([\pi_F X, \tilde{s}]) + D_{\pi_F X} s$$

と定義すれば、 $[\Gamma F, \Gamma E] \subset \Gamma E$ より \tilde{s} を取り方によらず、
 T/E の connection とする。 \mathcal{F} に関する flat 基底 (U, α^i, y^j)
 1= 2" 2" 2"、 $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^a}} \pi'(\frac{\partial}{\partial y^i}) = \pi'([\frac{\partial}{\partial x^a}, \frac{\partial}{\partial y^i}]) = 0$ とする、 ∇ は
 \mathcal{F} -flat connection とする。 $F = C(E)$ の時、[9] 2" は
 generalized Bott connection と呼ばれることもある 2" がある。

例 4.2 例 3.2 には、 $\forall \alpha$ の \mathcal{F} -flat connection とは
 、即ち $\forall \alpha$ の \mathcal{F} -admissible frame fields と parallel frame
 fields と (2" 持) flat connection の事 2" がある。

実は、次の定理が成立する。

定理 4.2 \mathcal{F} -vector bundle V 上 \mathcal{F} は $\eta \models \text{compatible}$ 且 \mathcal{F} -flat connection が存在する。

証明 $\{S_\lambda\}$ を open covering $\{U_\lambda\}$ 上 $\eta \models$ 関し、 \mathcal{F} -admissible 且 frame fields α 族とする。こゝで $\{U_\lambda\}$ は locally finite 且 α 分解 $\{f_\lambda\}$ を持てしよ。先ず $V|_{U_\lambda}$ 上 connection D^λ を $D^\lambda S_\lambda = 0$ によつて定義し、 $D := \sum_{\mu} f_{\mu} D^{\mu}$ とおけば、 D は connection 且 $\theta_{\lambda} S_{\lambda} = D S_{\lambda} = \sum_{\mu} f_{\mu} D^{\mu} (g_{\lambda\mu} S_{\mu}) = (\sum_{\mu} f_{\mu} (d g_{\lambda\mu}) g_{\lambda\mu}^{-1}) S_{\lambda}$ が成立する。こゝで $g_{\lambda\mu}$ は (y^i) のみの函数だから θ_{λ} の成分は dy^i の一次結合である。よつて $D_X S_{\lambda} = 0$, for $\forall X \in \Gamma(F|_{U_\lambda})$ と存る。 //

\Rightarrow の \mathcal{F} -flat connections の間には、次の様な関係がある。

命題 4.3 Vector bundle V 上、 $H^1(M, \underline{GL}(k, F)_{\mathcal{F}})$ の元 η, η' の各々 \mathcal{F} associate する \Rightarrow 通りの \mathcal{F} -vector bundle の構造を持つてゐる時、各々 \mathcal{F} compatible 且 \mathcal{F} -flat connections を D, D' とする。この時、 $\forall X \in \Gamma F$ によつて $D_X = D'_X$ となる事と、 η と η' とが \mathcal{F} -equivalent となる事とは同値である。

証明 $\eta, \eta' \models$ である V の \mathcal{F} -admissible frame fields

をそれぞれ s, s' とする。これは a frame fields a 定義域 U, U' が共通部分を持つ) とすれば $g: U \cap U' \rightarrow GL(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ として $s' = gs$ とするものが存在する。 $Ds' = (dg)s + g(Ds)$ として、 $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{F}|U \cap U')$, $D_X s' = (Xg)s + g(D_X s) = (Xg)s$ 。 となる。 仮定より $D_X s' = D_X s = 0$ for $X \in \mathcal{P}(\mathbb{F}|U \cap U')$ となるから $\forall X \in \mathcal{P}(\mathbb{F}|U \cap U')$, $Xg = 0$ 。 要するに g は (y^i) のみの関数として、 η と η' の決まる \mathcal{F} -admissible frame fields は同じになる。 逆は明らかである。 //

M' は foliation \mathcal{F}' を持つとする。 V' は M' 上の \mathcal{F}' -vector bundle として η' に associate するもの、 D' は V' 上の \mathcal{F}' -flat connection として η' に compatible するものとする。 次の事が容易に解る。

命題 4.4 $f: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map として f^*V' は f によって induce された \mathcal{F} -flat bundle として、 induced connection f^*D' は f^*V' 上の $f^*\eta'$ に compatible な \mathcal{F} -flat connection となる。

\mathcal{F} -vector bundle V の構造群 $GL(\mathbb{R}, \mathbb{F})$ の Lie 部分群 G への \mathcal{F} -reducibility と V 上の \mathcal{F} -flat connection の holonomy 群は同じである。

命題 4.5 $V \in \mathcal{I}$, holonomy 群が G を含む \mathcal{F} -flat connection が存在すれば、 V の構造群は $G \wedge \mathcal{F}$ -reducible である。

証明 V の linear frame bundle を B 、 Σ の projection を $\pi: B \rightarrow M$ とする。 V の \mathcal{F} -admissible charts を加える開被覆 $\{U_\lambda\}$ を、 $\mathcal{F}|_{U_\lambda}$ に関する flat な座標系 $(x_\lambda^i, y_\lambda^j)$ として $(x_\lambda^i, y_\lambda^j): U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^{n-g} \times \mathbb{R}^g$: diffeo. であるような α としよ。この時、 $p_\lambda \in (0,0)$ に対応する点、 $D_\lambda \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R}^g$ に対応する U_λ の subset とする。 $\pi_\lambda: U_\lambda \rightarrow D_\lambda$ を natural projection とすれば、 $\mathcal{F}|_{U_\lambda}$ の leaves は $\pi_\lambda^{-1}(p)$, $p \in D_\lambda$ である、と与えらる。 $p_0 \in M$, $u_0 \in \pi^{-1}(p_0)$, p_0 から p_λ へある curve c_λ を固定しておく。

V 上 \mathcal{F} -flat connection D が与えられたとすれば、curve c に沿った平行移動 \tilde{c} が決まる。 D は \mathcal{F} の leaf 上では flat (命題 4.1) であるから、 $\pi_\lambda: U_\lambda \rightarrow D_\lambda$ を cover する bundle map $\tilde{\pi}_\lambda: P|_{U_\lambda} \rightarrow P|_{D_\lambda}$ として $u \in P|_{D_\lambda}$ に対し

i) $\tilde{\pi}_\lambda^{-1}(u)$ は D に関する horizontal として、

ii) $\tilde{\pi}_\lambda^{-1}(R_g u) = R_g(\tilde{\pi}_\lambda^{-1}(u))$, $\forall g \in GL(\mathbb{R}^g, \mathbb{F})$

を満たす α が存在する。また、 $\pi^{-1}(p_\lambda)$ 上では $u_\lambda := \tilde{c}_\lambda u_0$ を決める。 D_λ 上の点 p_λ に対する ray を r_λ とすると、 $u \in P|_{U_\lambda}$ に対し $u_\lambda \alpha = \tilde{\pi}_\lambda^{-1}(\tilde{\pi}_\lambda(u))$ となる $\alpha \in GL(\mathbb{R}^g, \mathbb{F})$

が決まる。この写像を $\varphi_\lambda: PU_\lambda \rightarrow GL(k, F)$ とすれば、
 transition function $g_{\lambda\mu}(\pi(u)) = \varphi_\lambda(u)(\varphi_\mu(u))^{-1}$ は ii) により
 $\mathcal{F}|_{U_\lambda \cap U_\mu}$ a leaf 上 constant である。 $g_{\lambda\mu}$ が G -
 valued である事は、i) により、普通の holonomy 定理と
 同様で証明できる。 //

この命題の逆については、

命題 4.6 G が $GL(k, F)$ a reductive 子 subgroup である
 時、 \mathcal{F} -vector bundle V a 構造群が G 且 \mathcal{F} -reducible
 存在すれば、 V 上 holonomy 群が G であるよる \mathcal{F} -flat
 connection が存在する。

証明 定理 4.2 により与えられる V 上 a \mathcal{F} -flat connection
 D に対応する linear frame bundle B 上 a connection
 form を $\omega: TB \rightarrow \mathfrak{gl}(k, F)$ とする。 G が reductive
 存在すれば $\mathfrak{gl}(k, F) = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$, $\text{ad}(G)\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}$ 存在 linear
 subspace \mathfrak{m} が存在する。 ω a \mathfrak{g} -成分を $\omega_{\mathfrak{g}}$ 表す。
 構造群 G 且 \mathcal{F} -reduction を $C: B' \rightarrow B$ とすると
 $C^*\omega_{\mathfrak{g}}: TB' \rightarrow \mathfrak{g}$ は B' 上 a connection form とする。
 この $C^*\omega_{\mathfrak{g}}$ に対応する connection D' が存在する。 //

V a 構造群の reduction が V a tensor field F であるよる
 とき、

命題 4.7 D を V 上の \mathcal{F} -flat connection とする。 V の metric tensor field g は、 $\forall X \in \Gamma(F)$ に対して

$$D_X g = 0,$$

を満たす時 (= 限り)、 V の構造群 ρ $O(k)$ (or $U(k)$) への \mathcal{F} -reduction を与える。

証明 $S = (s_\alpha)$ ($1 \leq \alpha, \beta \leq k$) $\in V|U$ の \mathcal{F} -admissible frame field とすると、 $\forall X \in \Gamma(F|U)$ に対して

$$0 = (D_X g)(s_\alpha, s_\beta) = Xg(s_\alpha, s_\beta) - g(D_X s_\alpha, s_\beta) - g(s_\alpha, D_X s_\beta)$$

"故に" $D_X s_\alpha = D_X s_\beta = 0$ となる"、 $Xg(s_\alpha, s_\beta) = 0$ 。 \rightarrow

また $g(s_\alpha, s_\beta)$ は local (= \mathcal{F} -basic function) となる"、命題 3.3 より \mathcal{F} -reduction を与える。 逆は明らか。 //

この時 D は metric connection となる"、実は命題 4.3 より、 D と " \mathcal{F} -equivalent " なる D' を適当に取ると、

$$D'_X g = 0 \quad \text{for } \forall X \in \Gamma(T),$$

となる事"ができる。

上の命題 4.7 は、 g 以外の一般に V の tensor field に対しても成立する。 例として、 V が "real \mathcal{F} -vector bundle"、 tensor field J が、 V の構造群 $GL(k, \mathbb{R})$ 或 $GL(k/2, \mathbb{C})$ への \mathcal{F} -reduction を与える"ならば、 \mathcal{F} -flat connection D を与え、 $D_X J = 0$, $\forall X \in \Gamma(F)$ が成立する。 この時も、 D' を適当に取ると $D'_X J = 0$, $\forall X \in \Gamma(T)$ とできる。

M は complex analytic foliation \mathcal{F}_c を持つとし、 \mathcal{F} は \mathcal{F}_c の underlying smooth foliation を表わすとする。 V は M 上の \mathcal{F}_c -vector bundle π^{-1} 、 $H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}_c})$ の元 η に associate したものをとする。

定義 V 上の \mathcal{F} -flat connection $D: PV \rightarrow P(T^* \otimes V)$ が、 π^{-1} に関する \mathcal{F}_c -admissible frame field s に対して

$$D_X s = 0, \text{ for } \forall X \in \Gamma(\bar{\alpha}/U),$$

が成り立つ時、 D は η に compatible な \mathcal{F}_c -flat connection と呼ばれる。

前記の定理 4.2 と同様にして、次の事が証明される。

定理 4.8 \mathcal{F}_c -vector bundle V には、 η に compatible な \mathcal{F}_c -flat connection が存在する。

\mathcal{F} -flat connection に関する命題 4.3, 4.4 は、 \mathcal{F}_c -flat connection に関するものでも同じ形式で成立する。

§5. Connections と 特性類

M 上の complex vector bundle V 上の connection D が与えられた時、 V 上の local frame field に関する connection (resp. curvature) matrix を θ (resp. Θ) と書く。 Lie 環 $\mathfrak{gl}(k, \mathbb{C})$ 上の adjoint invariant polynomials 全体 \mathcal{P} を

graded algebra $\in I(\mathrm{GL}(k, \mathbb{C}))$ で表わす。 $D^0 \in D^1$ \in
 V 上 $a \Rightarrow a$ connections, $A^r(M) := P(\wedge^r T^*)$ とする。 \in
 \in T^* は $TM \otimes \mathbb{C}$ a dual \in である。

定義. \mathbb{C} -module homomorphisms

$$\lambda(D^1) : I^r(\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})) \rightarrow A^{2r}(M),$$

$$\lambda(D^0, D^1) : I^r(\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})) \rightarrow A^{2r-1}(M)$$

を次の様子上定義する。 各 $\varphi \in I^r(\mathrm{GL}(k, \mathbb{C}))$ に対して

$$\lambda(D^1)\varphi := \varphi(\Theta^1, \dots, \Theta^1)$$

$$\lambda(D^0, D^1)\varphi := r \int_0^1 \varphi(\Theta^1 - \Theta^0, \Theta^1, \dots, \Theta^1) dt,$$

ここで Θ^t は connection $tD^1 + (1-t)D^0$ a curvature matrix
 とする。

この定義は local \in であるが、 φ が invariant polynomial
 より、 M 上の global forms \in 確かに決まってくる。 此等
 a homomorphisms に対して、 Chern-Weil の理論は次の
 事を保障してくれる。(例としては [4].)

$$\square_1 \quad d(\lambda(D^1)\varphi) = 0.$$

$$\square_2 \quad d(\lambda(D^0, D^1)\varphi) = \lambda(D^1)\varphi - \lambda(D^0)\varphi.$$

つまり、 graded algebra \in a induced homomorphism

$$\lambda(D^1)^* : I(\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})) \rightarrow H^*(M)$$

は V a connections \in 取りよればよす、 V a 同型類によ、 \in
 決まる。 $\lambda(D^1)^*$ a image は V a 特性類と呼ばれる。

M は余次元 g の foliation \mathcal{F} を持ち、 V は M 上の complex \mathcal{F} -vector bundle とする。

命題 5.1 D' が V の \mathcal{F} -flat connection を与え、
 $\lambda(D')\varphi = 0$ for $\deg \varphi > g$.

証明 $s_\lambda \in V|_{U_\lambda}$ を \mathcal{F} -admissible frame field とすれば、命題 4.1 より D' の curvature matrix Θ'_λ に対して

$$\Theta'_\lambda(X, Y) = 0 \quad \text{for } \forall X, Y \in \mathcal{P}(\mathcal{F}|_{U_\lambda})$$

が成立する。よって Θ'_λ の成分は dy^i_j によって生成される $A^*(U_\lambda)$ の ideal を含む。 $\deg \varphi > g$ を与え、 $\varphi(\Theta'_\lambda, \dots, \Theta'_\lambda)$ の各単項は dy^i_j を g より多く含むことになることは、 0 である。 //

$\text{Chern}^r(V) := \text{Im } \lambda(D')^* \cap H^r(M)$ とおくと、定理 4.2 より

系 V が \mathcal{F} -vector bundle の構造を持つならば、

$$\text{Chern}^r(V) = 0 \quad \text{for } r > 2g .$$

更に g が偶数で、 \mathcal{F}_c は M 上の複素余次元 $g/2$ の complex analytic foliation、 V は M 上の \mathcal{F}_c -vector bundle とすれば、命題 5.1 と同じ形式の証明で次の結果を得る。

命題 5.2 D' が V の \mathcal{F}_c -flat connection を与え、

$$\lambda(D')\varphi = 0 \quad \text{for } \deg \varphi > g/2 .$$

前記の定理 4.8 により。

系 V が \mathcal{F}_c -vector bundle の構造を持つならば、

$$\text{Chern}^r(V) = 0 \quad \text{for } r > q.$$

この系のように特性類が「一度余次元より大存所」vanish する場合を少し考えてみる。

Pasternack [10] の結果を云々換之ると、

□ Foliation of a normal bundle T/F に、 \mathcal{F} -reduction を与える metric が存在するならば、

$$\text{Chern}^r(T/F \otimes \mathbb{C}) = 0 \quad \text{for } r > q.$$

この結果は、命題 5.1 で $V = T/F \otimes \mathbb{C}$ とおいた時の Bott [2] の結果を特別の場合に詳しくしたものである。一般の \mathcal{F} -vector bundle F に対して、 \mathbb{R} を拡張しようとするは無理がある。少し条件を強くすれば、次の定理を証明することが出来る。(Abe [1])

□ 例 3.6 における条件をみたす \mathcal{F} -vector bundle V に対しては、

$$\text{Chern}^r(V) = 0 \quad \text{for } r > q.$$

証明 \mathcal{F} -basic partition of unity を使って、定理 4.2 の connection を作ると $\theta_\lambda = \sum_{\mu} f_\mu (dg_{\lambda\mu}) g_{\lambda\mu}^{-1}$ は (y^i) の $\lambda = 1$ depend する form と取りかすのである。 //

§6. Complex \mathbb{F} -vector bundle の exotic 特性類

この section z'' は [2] に定義された z'' の cochain complex $WU_g =$ 類似な $WU(k)_g'$ を構成する。この complex を使って、complex \mathbb{F} -vector bundle に対して exotic 特性類を定義し、その性質を調べる。特に、foliation \mathbb{F} の normal bundle の複素化 $T\mathbb{F} \otimes \mathbb{C}$ に対しては [2] に定義された z'' の exotic characteristic classes と一致する。

定義 $\mathbb{C}[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k]$ を $\dim c_i = \dim \bar{c}_i = 2i$ なる $2k$ の variables $c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k$ を生成する polynomial ring, $\mathbb{C}_g[c_1, \dots, \bar{c}_k] := \mathbb{C}[c_1, \dots, \bar{c}_k] / I_{2g}$, I_{2g} は $\dim > 2g$ なる monomials により生成される ideal とする。 $E_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \dots, h_k)$ を $\dim h_i = 2i - 1$ なる $2k$ の α 元により生成される \mathbb{C} 上の exterior algebra とする。この graded algebra

$$WU(k)_g' := E_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \dots, h_k) \otimes \mathbb{C}_g[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k]$$

に differential d_w を $d_w c_i = d_w \bar{c}_i = 0, d_w h_i = (c_i - \bar{c}_i)/2i$ により定義した cochain complex とする。

M 上に smooth foliation \mathbb{F} が与えられているとする。 V は M 上の complex \mathbb{F} -vector bundle z'' $\eta \in H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathbb{F}})$ に associate する $\theta \in L, D' \in \eta$ に compatible なる V 上の \mathbb{F} -flat connection, $D^0 \in V$ 上の (Hermitian) metric

is preserve the metric connection etc.

定義 $\lambda'_\eta: WU(k)_g \rightarrow A^*(M)$ is homomorphism is

$$\lambda'_\eta c_i := \lambda(D') \tilde{c}_i, \quad \lambda'_\eta \bar{c}_i := \overline{\lambda(D') \tilde{c}_i},$$

$$\lambda'_\eta h_i := (\lambda(D^0, D') \tilde{c}_i - \overline{\lambda(D^0, D') \tilde{c}_i}) / 2NF$$

is invariant polynomial \tilde{c}_i is $A \in \text{sym}(k, \mathbb{C})$ is $\sum_{i=1}^k t^i \tilde{c}_i(A)$ is defined.

補題 6.1 $d\lambda'_\eta = \lambda'_\eta dw$.

証明 c_i, \bar{c}_i is $A = -^t A$ is $\tilde{c}_i(A) = \overline{\tilde{c}_i(A)}$ is \square_2 is consider.

A is $\bar{A} = -^t A$ is $\tilde{c}_i(A) = \overline{\tilde{c}_i(A)}$ is \square_2 is consider.

$$\begin{aligned} d(\lambda'_\eta h_i) &= (d(\lambda(D^0, D') \tilde{c}_i) - d(\overline{\lambda(D^0, D') \tilde{c}_i})) / 2NF \\ &= (\lambda(D') \tilde{c}_i - \overline{\lambda(D') \tilde{c}_i}) / 2NF - (\lambda(D^0) \tilde{c}_i - \overline{\lambda(D^0) \tilde{c}_i}) / 2NF \\ &= (\lambda'_\eta c_i - \lambda'_\eta \bar{c}_i) / 2NF - 0 \\ &= \lambda'_\eta ((c_i - \bar{c}_i) / 2NF) = \lambda'_\eta (dw h_i). \quad // \end{aligned}$$

is λ'_η is $WU(k)_g$ a cohomology is complex de Rham cohomology is a homomorphism is induce is.

命題 6.2 $\lambda'_\eta^*: H^*(WU(k)_g) \rightarrow H^*(M)$ is η is \mathbb{R} -equivalence class is depend is.

証明 g_0, g_1 is V is a metrics, D'_0, D'_1 is η is compatible is V is a \mathbb{R} -flat connections is. is $p: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ is projection, $\tilde{\eta}$ is $M \times \mathbb{R}$ is a class g is

canonical foliation とすると、次のものが存在する。

\tilde{D}^1 : \tilde{G} -vector bundle p^*V 上の \tilde{G} -flat connection z として $j_s^* \tilde{D}^1 = sD_1^1 + (1-s)D_0^1$ とするもの、

\tilde{g} : p^*V 上の metric z として $j_s^* \tilde{g} = g_0, j_1^* \tilde{g} = g_1$ とするもの、

\tilde{D}^0 : \tilde{g} を preserve する metric connection on p^*V 。

生成元のうち $\tilde{c}_i, \tilde{c}_i | = \tilde{c}_i$ とは \mathbb{S}^1 の \mathbb{Z}_2 より成立するが、 h_i に対して $s=0, 1$ とし

$$\begin{aligned} j_s^*(\lambda(\tilde{D}^0, \tilde{D}^1)\tilde{c}_i) &= i \int_0^1 \tilde{c}_i (j_s^* \tilde{D}^1 - j_s^* \tilde{D}^0, j_s^* \Theta^t) dt \\ &= i \int_0^1 \tilde{c}_i (\Theta_s^1 - \Theta_s^0, \Theta_s^t) dt \\ &= \lambda(D_s^1, D_s^0)\tilde{c}_i. \end{aligned}$$

よって $j_s^* = j_s^* : H^*(M \times \mathbb{R}) \rightarrow H^*(M)$ であることが主張は成立することになる。 //

定義 χ_n^* の image から特性類を除いたものを η (または \mathcal{F} -vector bundle V) の \mathcal{F} -に関する exotic 特性類と呼ぶこととする。

命題 4.6 または 4.7 より次の事が解る。

命題 6.3 Complex \mathcal{F} -vector bundle V の構造群が $U(n)$ かつ \mathcal{F} -reducible ならば V の exotic 特性類は \mathbb{Z} の \mathbb{Z}_2 になる。(つまり、構造群が $U(n)$ かつ \mathcal{F} -reduction の存在に対する obstructions と存してなる。)

[7] に出る n の V_{reg} の方法

命題 6.4 $WU(\mathbb{R})'_g$ には n の $u_i^- := (c_i - \bar{c}_i)/2NF$, $u_i^+ := (c_i + \bar{c}_i)/2$

とすれば、 $WU(\mathbb{R})'_g = E_C(h_1, h_2, \dots, h_k) \otimes \mathbb{C}_g[u_1^-, u_1^+, \dots, u_k^-, u_k^+]$
 $d_W u_i^- = d_W u_i^+ = 0$ かつ $d_W h_i = u_i^-$ と取れる。 $WU(\mathbb{R})'_g$ の
 cocycles a base としたときもこのようになる。

$$\otimes h_{i_1} \wedge \dots \wedge h_{i_r} \otimes u_{j_1}^- \dots u_{j_m}^- u_{s_1}^+ \dots u_{s_t}^+$$

$$1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq k, \quad 1 \leq j_1 \leq \dots \leq j_m \leq \min(g, k), \\ 1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_t \leq \min(g, k),$$

$$i) \quad i_1 + j_1 + \dots + j_m + s_1 + \dots + s_t > g,$$

$$ii) \quad i_1 \leq j_1.$$

$g' \geq g$ とすれば、canonical projection

$$p_{g'}^g : WU(\mathbb{R})'_{g'} \rightarrow WU(\mathbb{R})'_g$$

が定義でき、これは cochain homomorphism である。

M' が余次元 g' の foliation \mathcal{F}' を持ち、 $\eta' \in H^1(M', \underline{GL}(\mathbb{R}, \mathbb{C})_{\mathcal{F}'})$
 とすれば、命題 4.4 より次の事が解る。

命題 6.5 $f: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -map ならば、次の
 diagram は可換である。

$$\begin{array}{ccc} H^*(WU(\mathbb{R})'_g) & \xleftarrow{(p_{g'}^g)^*} & H^*(WU(\mathbb{R})'_{g'}) \\ (\lambda_{\mathcal{F}} \eta)^* \downarrow & & \downarrow (\lambda_{\mathcal{F}'} \eta')^* \\ H^*(M) & \xleftarrow{f^*} & H^*(M') \end{array} .$$

前記の命題 6.2 の証明の方法を使って次の事を知り。

命題 6.6 $\eta_0, \eta_1 \in H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}})$ が $\eta_0 \cong \eta_1$ を満たすならば、

$$(\lambda'_{\eta_0})^* u = (\lambda'_{\eta_1})^* u \quad \text{for } u \in \text{Im}(p_{\frac{q+1}{2}}^*)^* .$$

この命題と命題 2.2 より、

系 \Rightarrow a $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -maps $f_0, f_1: M \rightarrow M'$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{F}')$ -homotopic z'' , $\eta' \in H^1(M', \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}'})$ とすれば、

$$(\lambda'_{f_0 \eta'})^* u = (\lambda'_{f_1 \eta'})^* u \quad \text{for } u \in \text{Im}(p_{\frac{q+1}{2}}^*)^* .$$

注意 η が特 \mathbb{C} の時、 $(\lambda'_{\nu \otimes \mathbb{C}})^* \text{Im}(p_{\frac{q+1}{2}}^*)^*$ の元は $[\]$ η が rigid と呼ばれる。

$\eta \in H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}})$ に対して、cohomology a 中 z''

$$\text{Chern}^*(\eta) \subset \lambda'_{\eta}^* \text{Im}(p_{\frac{q+1}{2}}^*)^* \subset \lambda'_{\eta}^* H^*(WU(k|q))$$

は順に、 $\cong, \sim_{\mathcal{F}}, \cong_{\mathcal{F}}$ に対応する不変量と成る。

V が real \mathcal{F} -vector bundle a 時 \mathbb{C} は、 V の複素化である $V \otimes \mathbb{C}$ に対して $(\lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}})^*$ が定義できる。この時、次の事が解る。

命題 6.7 D^1, D^0 を V 上の connections s が s 定義 I は $V \otimes \mathbb{C}$ 上の \mathcal{F} -flat connection, metric connection とすれば、 $\det(I - \frac{1}{2\pi i} A) = 1 + \sum_{i=1}^k t^i \tilde{c}_i^{\mathbb{R}}(A)$ for $A \in \text{cgl}(k, \mathbb{C})$ z'' 定義される $\tilde{c}_i^{\mathbb{R}}$ を使って、 $\lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}}$ は次の様に表わされる。

$$\begin{aligned} \lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}} u_i^- &= (-1)^{\frac{i+1}{2}} \lambda(D') \tilde{c}_i^{\mathbb{R}} \text{ for } i = \text{odd, otherwise} = 0, \\ \lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}} u_i^+ &= (-1)^{\frac{i}{2}} \lambda(D') \tilde{c}_i^{\mathbb{R}} \text{ for } i = \text{even, otherwise} = 0, \\ \lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}} h_i &= (-1)^{\frac{i+1}{2}} \lambda(D^0, D') \tilde{c}_i^{\mathbb{R}} \text{ for } i = \text{odd, otherwise} = 0. \end{aligned}$$

即ち、real \mathfrak{F} -vector bundle a 時 k は、次 a cochain complex を考之れは十分である。

定義 $l \leq k$ 以下の最大な奇数 l とし、

$$WO(k)_g := E_{\mathbb{C}}(h_1, h_3, \dots, h_l) \otimes \mathbb{C}_g[u_1^-, u_2^+, \dots, u_l^-, (u_{l+1}^+)]$$

z differential は $dw h_j = u_j^-$, $dw u_i^+ = dw u_i^- = 0$ として決まるものとする。

z complex は $k=g$ の時、 $[z]$ a WO_g の複素化である $WO_g \otimes \mathbb{C}$ と一致する。

例 6.1 $WO(k)_g$ z $g \geq 1$ か $k \geq 1$ の時を考之ると、

$$dw(h_1(u_1^-)^g) = (u_1^-)^{g+1} = 0 \text{ in } WO(k)_g.$$

よって $\eta \in H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{R})_{\mathfrak{F}})$ に対して $\lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}} [h_1(u_1^-)^g]$ は $H^{2g+1}(M)$ の元である。特に \mathfrak{F} が余次元 1 の foliation である場合は $\lambda'_{\eta \otimes \mathbb{C}} [h_1(u_1^-)^g]$ は Godbillon-Vey の不変量である。

また例 3.3 における \mathfrak{F} -vector bundle T/E に対して $H^1(M, \underline{GL}(p, \mathbb{R})_{\mathfrak{F}})$ の元 ν_E とすれば、 $F = c(E)$ の時 $\lambda'_{\nu_E \otimes \mathbb{C}} [h_1(u_1^-)^g]$ は $[g]$ z generalized Godbillon-Vey invariant と呼ばれることも一致する。

例 6.2 M 上 a vector bundle V が flat connection D を持つ時、 V は \mathcal{J} -vector bundle の構造が決まる。更には命題 4.3 より \mathcal{Z} の構造と flat connection \mathcal{L} は一対一に対応する。 \mathcal{Z} a \mathcal{J} -vector bundle a 構造に対応するものは $H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{J}})$ の元を η_D とおく。

① \mathcal{J} は \mathcal{Z} 上の $\mathcal{L} = 0$ であるから

$$WU(k)_{\mathcal{L}}' = E_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \dots, h_k), \quad d\omega h_i = 0.$$

よって $H^*(WU(k)_{\mathcal{L}}') \cong WU(k)_{\mathcal{L}}'$ 。

前記の命題 6.6 より、

② D と D' が V 上 a flat connection として $\eta_D \cong \eta_{D'}$ の時、

$$\lambda_{\eta_D}^*[ch_i] = \lambda_{\eta_{D'}}^*[ch_i] \quad \text{for } i \geq 2.$$

§7. $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ -vector bundles a exotic 特性類

M 上 複素余次元 $q/2$ a complex analytic foliation $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ が与えられているとする。 V は $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ -vector bundle として $\eta \in H^1(M, \underline{GL}(k, \mathbb{C})_{\mathcal{F}_{\mathbb{C}}})$ に associate しているとする。この時、 V は $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ a underlying 的 smooth foliation \mathcal{F} (余次元は q) に属する \mathcal{F} -vector bundle と見做せる。

§6 a homomorphism $\lambda_{\eta}^* : H^*(WU(k)_{\mathcal{L}}') \rightarrow H^*(M)$ が定義できる。 V が更には $\mathcal{F}_{\mathbb{C}}$ -vector bundle であることより、 $\text{Im}(\lambda_{\eta}^*)$ a 含むものは 0 に属する事を示す。

先ず次々よる各 cochain complex を定義する。

定義 $\mathbb{C}[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k]$ は \mathbb{C} と同値 polynomial ring $\mathbb{C}[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k]$ の c_i 及び \bar{c}_i の monomials について $\dim > q$ の c_i 及び \bar{c}_i 及び $\dim > q$ の c_i 及び \bar{c}_i の生成する ideal を含む。この時、graded algebra

$$WU(k)_{q/2} := E_{\mathbb{C}}(h_1, h_2, \dots, h_k) \otimes \mathbb{C}[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k] / I_{q,q}$$

に differential d を $dw c_i = dw \bar{c}_i = 0$, $dw h_i = (c_i - \bar{c}_i) / 2N \pi$

で定義した cochain complex をする。

更に homomorphism $\lambda_{\eta} : WU(k)_{q/2} \rightarrow A^*(M)$ を、 λ_{η} を η の \mathbb{C} -flat connection ∇ を用いて定義する。これは cochain homomorphism であり、命題 6.2 と同様の証明で次々を得る。

命題 7.1 $\lambda_{\eta}^* : H^*(WU(k)_{q/2}) \rightarrow H^*(M)$ は η の \mathbb{C} -equivalence class によって決まる。

$\mathbb{C}[c_1, \bar{c}_1, \dots, c_k, \bar{c}_k]$ の z^n ideal I_{2q} は $I_{q,q}$ を含む。したがって、次々よる canonical projection が存在する。

$$p : WU(k)_{q'} \rightarrow WU(k)_{q/2} .$$

$$\begin{array}{ccc} H^*(WU(k)_{q'}) & \xrightarrow{\lambda_{\eta}^*} & H^*(M) \\ p^* \downarrow & \nearrow \lambda_{\eta}^* & \\ H^*(WU(k)_{q/2}) & & \end{array}$$

左の diagram は可換。

\mathcal{F}_c -bundle と \mathcal{F} -bundle とある写像が induce する

系. $\eta \in \text{Im}(\lambda_{\mathcal{F}_c}^*)$ とするに、

$$\lambda_{\mathcal{F}}^* u = 0 \quad \text{for } u \in \text{Ker}(p^*).$$

($\eta \in \text{Im}(\lambda_{\mathcal{F}_c}^*)$ とは η が \mathcal{F}_c -cocycle かつ \mathcal{F} -equivalent である事である。)

特に、 \mathcal{F} の余次元 q の almost complex foliation、 \mathcal{F} の normal bundle は $\nu \in H^1(M, \underline{GL}(q/2, \mathbb{C})_{\mathcal{F}})$ に associate する事である。この時、 M の cohomology の subgroup $\lambda_{\nu}^*(\text{Ker } p^*)$ の元は \mathcal{F} が complex analytic foliation であるための obstructions と呼ばれる。すなわち、

$$\lambda_{\nu}^*(\text{Ker } p^*) \supset \bigcup_{2q \geq r > q} \text{Chern}^r(T/\mathcal{F})$$

である。

特に、 $NU(q)_q$ は [3] の NU_q と同じである。

参考文献

- [1] N. Abe, On cohomology and characteristic classes of a foliated manifold, 修士論文 (1975)
- [2] R. Bott, Lecture Notes in Math., 279, Springer (1972).

- [3] R. Bott and A. Haefliger, On characteristic classes of P -foliations, Bull. of A.M.S. 78 (1972) 1039-1044.
- [4] S.S. Chern, Complex manifolds without potential theory, van Nostrand (1967).
- [5] L. Conlon, Transversally parallelizable foliations of codimension two, Trans. of A.M.S. 194 (1974) 79-102.
- [6] C. Godbillon et J. Vey, Un invariant des feuilletages de codimension 1, C.R. Acad. Sci. 273 (1971) 92.
- [7] J.L. Heitsch, Deformations of secondary characteristic classes, Topology 12 (1973) 381-388.
- [8] F. Hirzebruch, Topological Methods in Algebraic Geometry, Springer (1966).
- [9] H. Kitahara and S. Iozu, A generalized Godbillon-Vey invariant for a subbundle which is not integrable.
- [10] J. Pasternack, Topological obstructions to integrability and the Riemannian geometry of smooth foliations, Thesis, Princeton Univ. (1970).
- [11] B.L. Reinhart, Foliated manifolds with bundle-like metrics, Ann. of Math., 69 (1959) 119-132.
- [12] ———, Harmonic integrals on foliated manifolds, Amer. J. Math. 81 (1959) 529-536.