数理解析研究所講究録
第251巻 1975年 36-55

Isometryによって不変な測地線について

東工大 理　田中 実

§0. 序

コンパクトなリーマン多様体上のisometryによって不変な測地線の研究において、無限次元多様体の理論を用いることが有効な手段であることを、K. Groveが初めて示した。測地線 $\gamma: \mathbb{R} \to M$ （Mは勝手なリーマン多様体）があるisometry hによって不変だとは、勝手な $t \in \mathbb{R}$ に対して、$h\gamma(t) = \gamma(t+a)$ となるような定数が存在するときを言う。そのような2つの測地線 γ_1, γ_2, がもし $\gamma_1(\mathbb{R}) \neq \gamma_2(\mathbb{R})$ の時 γ_1 と γ_2 は幾何学的に異なるという。§3で単連結コンパクトなリーマン多様体上において、ある種のisometryによって不変な測地線が幾何学的に異なるもので無限に存在することを証明する。我々は、D. Gromoll とW. Meyer [2]で使われた方法を用いる。彼らは、ある弱いtopologicalな性質を満たす勝手なコンパクトな多様体上に幾何学的に異なる閉測地線が無限に存在すること

を証明した。我々の主定理は、この結果を拡張したものである
。

§1．

$(M, \langle\ ,\ \rangle)$ を$(n+1)$次元のコンパクトなリーマン多様体としhをM上の勝手な isometry とする。連続な曲線 $\gamma: [0, 1] \longrightarrow M$ がもし絶対連続で、$\int_0^1 \langle \gamma', \gamma' \rangle dt < \infty$ である時、γ を H^1 曲線と呼ぶ。各H^1曲線γに対して、γに沿った連続なベクトル場XがH^1ベクトル場とは、絶対連続で $\int_0^1 \langle X', X' \rangle dt < \infty$ である時を言う。$\Omega(M, h)$ を H^1 曲線σで $h(\sigma(0)) = \sigma(1)$ を満たす曲線全体からなる集合とする。各 $\sigma \in \Omega(M, h)$ に対して、$T_\sigma \Omega(M, h)$ をσに沿ったH^1ベクトル場Xで、$h_*(X(0)) = X(1)$ を満たすものからなる集合とする。$T_\sigma \Omega(M, h)$ 上に内積が(1)により定義される。

(1) $\langle\langle X, Y \rangle\rangle = \int_0^1 (\langle X, Y \rangle + \langle X', Y' \rangle) dt$

この内積により $T_\sigma \Omega(M, h)$ は Hilbert 空間になる。$\Omega(M, h)$ は、リーマン、ヒルベルト多様体（すなわち無限次元多様であり、リーマン構造をもつ多様体）の構造が導入できる。([3]).
各$\sigma \in \Omega(M, h)$ における接空間は $T_\sigma \Omega(M, h)$ であり(1)により、リーマン構造が与えられる。$\Omega(M, h)$ 上にエネルギー関数 E^h を、$E^h(\sigma) = 1/2 \int_0^1 \langle \sigma', \sigma' \rangle dt$ によって定義する。次のことはよく知られた事実である。

(a) $E^{h}: \Omega(M,h) \to R$ は C^{∞} 関数で Palais, Smale の性質(C)を満たす。

(b) $\sigma \in \Omega(M,h)$ が E^{h} の critical point であるための必要十分条件は、σ が M の測地線でしかも $h_{*}\sigma'(0) = \sigma'(1)$ を満たすことである。特に、$\sigma \in \Omega(M,id)$ が E^{id} の critical point であるための必要十分条件は、σ が M の閉測地線である事である。

(c) E^{h} の Hessian H_c (critical pt c における)は
$H_c(X,Y) = \int_0^1 (\langle X', Y' \rangle - \langle R(X,c')c', Y \rangle) dt$ である。

各点 $\sigma \in \Omega(M,h)$ に対して、σ は $\mathbb{R}$ 上で定義されていると考えることができる。すなわち、任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して、

(2) $\sigma(t) = h^{[t]}(\sigma(t-[t]))$ と定義する。g をある正の整数 s に対して $g^{s} = id$ を満たす isometry とする。$\$O(2) = [0, s]/\{0, s\}$ とおけば $\$O(2)$ は $\Omega(M,g)$ 上の action と考えられる。

$$\$O(2) \times \Omega(M,g) \longrightarrow \Omega(M,g)$$
$$(\alpha, \sigma) \longmapsto \alpha(\sigma) \qquad \alpha(\sigma)(t) := \sigma(t+\alpha)$$

この action は連続的に act している。しかも、各元 $\alpha \in \$O(2)$ は $\Omega(M,g)$ 上の isometry である。[4]。

$E^g: \Omega(M,g) \to R$ の critical point c は，$E^g(c) \neq 0$ であるならば常に critical submanifold $SO(2)c$ の中の一点である。$\exp$ を M の exponential map とすると，$\overline{\mathrm{Exp}}: N \to \Omega(M,g)$ $Y \mapsto \exp \circ Y$ で $\overline{\mathrm{Exp}}$ を定義する。ここで N は normal bundle $\pi: N \to SO(2)c$ の total space を示す。$\tilde{N} \to SO(2)c$ を normal disc bundle としたとき，$\tilde{N}$ が十分小さいならば，$\mathcal{D} = \overline{\mathrm{Exp}}(\tilde{N})$ が $SO(2)c$ の tubular neighborhood になるようにできる。c での fiber $\mathcal{D}_c = \overline{\mathrm{Exp}}(\tilde{N}_c)$ ($\tilde{N}_c$: c 上の fiber) の接空間は N_c (c 上の normal space) になる。作り方から，各 $\alpha \in SO(2)$ に対して，$\alpha(\mathcal{D}_c) = \mathcal{D}_{\alpha c}$ が成り立つ。E^g_c を E^g の $\mathcal{D}_c$ への制限とする。c での E^g_c の hessian $\tilde{H}_c$ は，明らかに，$\tilde{H}_c = H_c | N_c \oplus N_c$ である。

Lemma 1.　c を E^g の critical point とする。$\langle\langle A_c X, Y \rangle\rangle = H_c(X, Y)$ によって定義される operator A_c: $T_c\Omega(M,g) \to T_c\Omega(M,g)$ は，ある compact operator K が存在して，$A_c = id + K$ となる。明らかに，$\tilde{H}_c$ に対応して決まる operator $\tilde{A}_c$ もまた，$\tilde{A}_c = id + \tilde{K}$，($\tilde{K}$: compact operator) の分解が存在する。

この Lemma は Gromoll と Meyer [2] により証明されている。一般に，f を ~~[illegible]~~ あるヒルベルト空間 $(H, \langle , \rangle)$ の原点の近傍で定義された C^∞ な関数とする。原点は f の孤

立した critical point で $f(0)=0$ とする。d^2f_0 を f の原点でのhessianとし，$\langle Ax, y\rangle = d^2f_0(x,y)$ により定義される $A: H\to H$ は $A-id: H\to H$ が compact operator になると仮定する。$N=\mathrm{Ker}A$，$E=N^{\perp}$ とおけば，$H=E\oplus N$ となる。次の "splitting lemma" は Gromoll と Meyer [1] による。

Lemma 2.（splitting lemma）f を，上で述べた関数とする。その時，原点の近傍で定義された diffeo な map Φ，$\Phi(0)=0$ と，原点の N の中における近傍から E の中への C^∞ な関数 h，$h(0)=0$，が存在して，

$$f\circ\Phi(x,y) = \langle Px, Px\rangle - \langle (I-P)x, (I-P)x\rangle + f(h(y), y)$$

（P は orthogonal projection $: E\to E$）となる。

Corollary 3. f は Palais と Smale の condition (C) を原点のある十分小さな近傍で満たす。

Prop. 4. もし，c を E^g_c の孤立した critical point であって，$\mathcal{D}_c$ を十分近さくとれば，condition (C) が E^g_c に対して，成立する。

さて，E^g の孤立した critical orbit $SO(2)c$ に対して，[1] で local homological invariant と呼ばれる homology を定義する。十分小さな tubular neighborhood $\mathcal{D}$ をとり，そこで E^g_c が condition (C) を満たし，c が E^g_c の孤立した critical point となるようにする。(p.502 [2])。W_c, W_c^- を c における $\mathcal{D}_c$ 上のエネルギー関数 E_c^g に対する admissible regions ([1]) とする。そこで c での E_c^g の local homological invariant を $\mathcal{H}(E_c^g, c) = H_*(W_c, W_c^-)$ と定義する。homology は標数 zero の体を系数とする singular homology を使う。孤立した critical orbit $SO(2)c$ の E^g の local homological invariant を $\mathcal{H}(E^g, SO(2)c) = H_*(W, W^-)$, $W = SO(2)W_c$, $W^- = SO(2)W_c^-$ と定義する。これは $W_c, W_c^-, \mathcal{D}$ の取り方には依存しない。次の lemma は Gromoll と Meyer ([2]) により証明されている。

Lemma 5. b をある $\varepsilon > 0$ に対して $[b-\varepsilon, b+\varepsilon]$ の中において、唯一の critical value とする。$(E^g)^{-1}(b)$ のすべての critical set は有限個の critical orbits $SO(2)c^1, \ldots, SO(2)c^r$ からなると仮定する。その時、

$$H_*(\Omega^{b+\varepsilon}(M,g), \Omega^{b-\varepsilon}(M,g)) = \sum_{i=1}^{r} \mathcal{H}(E^g, SO(2)c^i)$$

(ここで $\Omega^{b\pm\varepsilon}(M,g) = (E^g)^{-1}[0, b\pm\varepsilon]$) が成り立つ。

c での isotropy group $\Gamma = \{\alpha \in SO(2) \mid \alpha(c) = c\}$ は trivial bundle $SO(2) \times W_c$ 上で covering transformation として act させることができるから、

(3). $H_*(W, W^-) \subset H_*(SO(2) \times W_c, SO(2) \times W_c^-)$

キュネットの公式より.

(4) $\mathcal{H}(E^g, SO(2)c) \subset H_*(SO(2)) \otimes \mathcal{H}(E^g_c, c)$

λをcの指数(index)とすれば, shifting theorem [1]を用いると, $\mathcal{H}_{k+\lambda}(E^g_c, c) = \mathcal{H}^0_k(E^g_c, c)$, ($\mathcal{H}^0_k$はcharacteristic invariantである。)が成り立つ。上の式と(4)式より,

(5) $\mathcal{H}_k(E^g, SO(2)c) \subset \mathcal{H}^0_{k-\lambda}(E^g_c, c) \oplus \mathcal{H}^0_{k-\lambda-1}(E^g_c, c)$

したがって,

(6) $B_k(c, g) \leq B^0_{k-\lambda}(c, g) + B^0_{k-\lambda-1}(c, g)$.

ここで, $B_k(c, g) = \dim \mathcal{H}_k(E^g, SO(2)c)$. $B^0_k(c, g) = \dim \mathcal{H}^0_k(E^g_c, c)$である。$a < b$を$E^g$の~~critical~~ regular valuesとし, $(E^g)^{-1}[a, b]$内のすべてのcritical orbitsは $SO(2)c^1, \cdots, SO(2)c^r$と仮定する。その時 Morseの不等式が成り立つ。

(7) $b_k(\Omega^b(M, g), \Omega^a(M, g)) \leq \sum_{i=1}^{r} B_k(c^i, g)$

ここで, $b_k(\Omega^b(M, g), \Omega^a(M, g)) = \dim H_k(\Omega^b, \Omega^a)$である。

§2.

各整数$m\ (\neq 0)$に対して, iteration map $m: \Omega(M, g) \to \Omega(M, g^m)$を$m(\sigma)(t) = \sigma_m(t) = \sigma(mt)$で定義する。$\Omega(M, g)$の元は, (2)式により$\mathbb{R}$から$M$の中への写像として考える。次の定理は重要な定理で, 本質的に, Gromoll と Meyer ([2])により証明されている。

Theorem 6. $SO(2)c$を$\Omega(M, g)$のnon constantな

critical orbit で，ある整数 m に対して，$SO(2)C_m$ が孤立した critical orbit で $\nu(C,g)=\nu(C_m,g^m)$ が成り立つとする。その時，任意の k に対して，$\mathcal{H}_k^0(E_c^g,C)=\mathcal{H}_k^0(E_{C_m}^{g^m},C_m)$ が成り立つ。ここで $\nu(C,g)$ と $\nu(C_m,g^m)$ はそれぞれ $\Omega(M,g)$ の critical orbit $SO(2)C$ の nullity，$\Omega(M,g^m)$ の critical orbit $SO(2)C_m$ の nullity を表わす。

今後 s は素数と仮定し，f を，$f^s=id$ を満たす isometry とする。一つの critical point から iteration map によって得られるすべての critical orbit の index と nullity について調べよう。エネルギー関数 $E^f:\Omega(M,f)\to\mathbb{R}$ の critical point は次の4種がある。

1) $C(t)\equiv p$,　$t\in[0,1]$，p は f の不動点．

2) critical point を閉測地線と見た時のその基本週期は1である。

3) critical point の基本週期は s/m_0，$(1\leqq m_0<s)$ である。

4) critical point の基本週期は1より小である。

タイプが4) の critical point は，タイプが2) または，3) の critical point の iteration によって得られる。タイプ1) の critical point は constant であると呼ばれている。その

他の critical point は non constant と呼ばれている。最初にタイプ3) の critical point について研究しよう。$(m_0, s)=1$ であるから，$m_0 \cdot n_0 = 1 + sk_0$，(すなわち $n_0 = \frac{1}{m_0} + \frac{s}{m_0} \cdot k_0$) となる整数 n_0, k_0 が存在する。$\bar{c}(t) = c(t/m_0)$，$t \in [0,1]$ $g = f^{n_0}$ とおけば，$\bar{c}$ は E^g の critical point である。$\bar{c}$ の最小週期はちょうど s である。明らかに各整数 m と r に対して，$\bar{c}_{ms+rm_0}$ は E^{f^r} の critical point である。$V_{\bar{c}}$ を $\bar{c}$ に直交する $\bar{c}$ に沿った C^∞ ベクトル場からなるベクトル空间とする。線型写像 $L_{\bar{c}} : V_{\bar{c}} \to V_{\bar{c}}$ が $L_{\bar{c}}X = -X'' - R(X, \bar{c}')\bar{c}'$ で定義されているとする。$\lambda(\bar{c}_{ms+rm_0}, f^r)$ と $\nu(\bar{c}_{ms+rm_0}, f^r)$ を critical orbit $SO(2)\bar{c}_{ms+rm_0} \subset \Omega(M, f^r)$ のそれぞれ index，nullity とする。したがって，我々は

$$\lambda(\bar{c}_{ms+m_0}, f) = \sum_{\mu<0} \dim \{X \in V_{\bar{c}} ;\ L_{\bar{c}}X = \mu X,\ X(t+ms+m) = f_*(X(t)),\ {}^\forall t \in \mathbb{R}\}$$

$$\nu(\bar{c}_{ms+rm_0}, f^r) = \dim \{X \in V_{\bar{c}} ;\ L_{\bar{c}}X = 0\ \ X(t+ms+rm_0) = f_*^r(X(t))\ \text{ for } {}^\forall t \in \mathbb{R}\}$$

を得る。(Theorem 2.3 in [6, p.45] を参照せよ)
$V_{\bar{c}}$ を複素化し，それを再び $V_{\bar{c}}$ と書く。さらに，f_*，g_*，$L_{\bar{c}}$ を $\mathbb{C}$-linear map に拡張し，再び，それらをそれぞれ f_*，g_*，$L_{\bar{c}}$ とする。各複素数 $w \in S^1 \subset \mathbb{C}$，と実数 μ，と整数 m に対して，次のような微分方程式を考える。

$L_{\mathbb{C}} Y = \mu Y$, 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対して $Y(t+m) = w g_*^m (Y(t))$ を満たす。

$S_{\mathbb{C}}[\mu, m, w g_*^m]$ を $V_{\mathbb{C}}$ の複素ベクトル場で上の微分方程式の解のつくるベクトル空間とする。

Lemma 7. $S_{\mathbb{C}}[\mu, m, g_*^m] = \bigoplus_{w^m=1} S_{\mathbb{C}}[\mu, 1, w g_*]$

証明. $S_{\mathbb{C}}[\mu, m, g_*^m] \supset \bigoplus_{w^m=1} S_{\mathbb{C}}[\mu, 1, w g_*]$ であることは自明である。各 $Y \in S_{\mathbb{C}}[\mu, m, g_*^m]$ と w, $w^m=1$ に対して, $Y_w(t) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} w^{-l} g_*^{-l+1}(Y(t+l-1))$ とおけば, $L_{\mathbb{C}} Y_w = \mu Y_w$, $Y = \sum_{w^m=1} w Y_w$ を満足する。又, $Y_w(t+1) = \frac{1}{m}\sum_{l=0}^{m-1} w^{-l} g_*^{-l+1}(Y(t+l)) = \frac{w}{m} g_*\left(\sum_{l=0}^{m-1} w^{-l-1} g_*^{-l}(Y(t+l))\right)$

$$= \frac{w}{m} g_*\left(\sum_{l=0}^{m-1} w^{-l} g_*^{-l+1}(Y(t+l-1)) + w^{-m} g_*^{-m+1}(Y(t+m-1))\right)$$

$$= \frac{w}{m} g_*\left(\sum_{l=0}^{m-1} w^{-l} g_*^{-l+1}(Y(t+l-1))\right)$$

$$= w g_*(Y_w(t)) \qquad \text{(q.e.d.)}$$

$S_{\mathbb{C}}[\mu, ms+rm_0, f_*^r] \subset S_{\mathbb{C}}[\mu, (ms+rm_0)s, id]$ であるから, $S_{\mathbb{C}}[\mu, ms+rm_0, f_*^r] = \bigoplus_{w^{(ms+rm_0)s}=1} S_{\mathbb{C}}[\mu, 1, wg] \cap S_{\mathbb{C}}[\mu, ms+rm_0, f_*^r]$

$$= \bigoplus_{w^{(ms+rm_0)}=1} S_{\mathbb{C}}[\mu, 1, w g_*]$$

$\Lambda_{\overline{c}}(w) = \sum_{\mu<0} \dim_{\mathbb{C}} S_{\overline{c}}[\mu, 1, w g_*]$, $N_{\overline{c}}(w) = \dim_{\mathbb{C}} S_{\overline{c}}[0, 1, w g_*]$

とおけば，(8)式を得る。

$$(8) \quad \begin{cases} \lambda(\overline{c}_{ms+m_0}, f) = \sum_{w^{ms+m_0}=1} \Lambda_{\overline{c}}(w) \\ \\ \nu(\overline{c}_{ms+rm_0}, f^\perp) = \sum_{w^{ms+rm_0}=1} N_{\overline{c}}(w) \end{cases}$$

故に，$\lambda(\overline{c}_{ms+m_0}, f)$, $\nu(\overline{c}_{ms+rm_0}, f^\perp)$ は non negative な整数値をとる S^1 上の関数 $\Lambda_{\overline{c}}(\cdot)$ と $N_{\overline{c}}(\cdot)$ によりそれぞれ完全に決定される。

Lemma 8. 高々 $2n$ 個の点を除いて，$N_{\overline{c}}(z)=0$ である。$N_{\overline{c}}(z) \neq 0$ なる z を Poincaré point と呼ぶ。

このLemmaはヤコビ場の性質を使えば容易に証明できる。次の定理は M. Morse の（[6, P.51]）Theorem 3.1. と 3.2. に含まれている。

Theorem 9. J をその両端がともに境界条件 $Y(t+1) = z g_*(Y(t))$ に関する $L_{\overline{c}}$ の固有値ではない有界な区間であるとする。その時 z の S^1 での近傍 U で次の~~条件~~性質を満たすものが存在する。J の両端は，各元 $w \in U$ に対する境界条件 $Y(t+1) = w g_*(Y(t))$ に関する $L_{\overline{c}}$ の固有値ではなく，しかも

$$\sum_{\mu \in J} \dim_{\mathbb{C}} S_{\overline{c}}[\mu, 1, w g_*] = \sum_{\mu \in J} \dim_{\mathbb{C}} S_{\overline{c}}[\mu, 1, z g_*]$$

を満たす。

定理9より，(9)式を得る。

(9) $\Lambda_{\bar{c}}(\cdot)$ は Poincaré points 以外では、局所一定である。

$\varliminf_{z \to z_0} \Lambda_{\bar{c}}(z) \geq \Lambda_{\bar{c}}(z_0)$

Lemma 8. (8)式、(9)式より、2つの lemma を得る。

Lemma 10. すべての m に対して、$\lambda(\bar{C}_{ms+m_0}, f)=0$ であるか、もしそうでなければ、ある正数 a と ε が存在して、勝手な非負整数 m_1 と m_2 に対しては

$\lambda(\bar{C}_{m_1 s+m_0}, f) - \lambda(\bar{C}_{m_2 s+m_0}, f) \geq (m_1 - m_2)\varepsilon - a$

勝手な負整数 m_1、と m_2 に対しては、

$\lambda(\bar{C}_{m_1 s+m_0}, f) - \lambda(\bar{C}_{m_2 s+m_0}, f) \geq (m_2 - m_1)\varepsilon - a$

が成り立つ。

Lemma 11. 正整数 $k_1, \cdots, k_g$ と 数列 $m_j^i \in \mathbb{Z}$, $i>0$, $j=1, \cdots, g$ が存在して、$m_j^i k_j$ は互いに異なり、$\{m_j^i k_j\} = \{ms+m_0 \,;\, m \in \mathbb{Z}\}$ を満たし、さらに、

$\nu(\bar{C}_{m_j^i k_j}, f) = \nu(\bar{C}_{k_j}, f^{r})$ (ここで r は $r m_j^i \equiv 1 \bmod s$ を満たす整数)を満たす。

Theorem 6. と Lemma 11. により、

Corollary 12. C を type 3) の E^f の critical point とし すべての critical orbits $SO(2)\bar{C}_{ms+m_0}$ は $\Omega(M, f)$ の中で孤立していると仮定する。その時、すべての k と m に対して $B^0_k(\bar{C}_{ms+m_0}, f) \leq B$ となるある定数 B が存在する。さら

に、すべての $k > k_0$ と m に対して、$B_k^0(\bar{C}_{ms+m_0}, f) = 0$ となるような k_0 が存在する。

(6)式と Lemma 10. と Corollary 12 により、

Corollary 13. Cor. 12 と同じ仮定と同じ記号の下で、$B_k(\bar{C}_{ms+m_0}, f)$ は一様に $2B$ で上から有界である。さらに、勝手な $k > k_0+1$ に対して、$B_k(\bar{C}_{ms+m_0}, f) \neq 0$ となる critical orbits の個数は k に依存しない定数 C 以下である。

次に、Cor. 12と13. と同じような Cor. を タイプ 2) の critical point c に対しても成り立つことを証明する。V_c を、c に直交する c に沿った C^∞ ベクトル場からなるベクトル空間とする。線型写像 $L_c : V_c \to V_c$ を、$L_c X = -X'' - R(X, c')c'$ によって定義する。V_c を複素化してそれをまた $\mathbb{V}_c$ とする。さらに f_*、L_c を $\mathbb{C}$-linear な写像に拡張し、それらを、おのおの f_*、L_c と再び書く。各整数 $m\ (\neq 0)$ と実数 μ と $w \in S^1 \subset \mathbb{C}$ に対して、$S_c[\mu, m, wf_*]$ を $L_c X = \mu X$, $X(t+m) = w f_*(X(t))$ を満たす複素ベクトル場 $X \in \mathbb{V}_c$ からなるベクトル空間とする。

$$S_c[\mu, m, f_*^r] = \bigoplus_{w^{sm}=1} \bigoplus_{z^{m-r}=w^{-m}} S_c[\mu, 1, wf_*] \cap \ker(f_* - z)$$
$$= \bigoplus_{\alpha^s=1} \bigoplus_{w^m=\alpha} \bigoplus_{z^{m-r}=\alpha^{-1}} S_c[\mu, 1, wf_*] \cap \ker(f_* - z)$$

ここで、$f_* : \mathbb{V}_c \to \mathbb{V}_c$ は $(f_* X)(t) = f_*(X(t))$ で定義されている。

故に.

(10)
$$\begin{cases} \lambda(C_m, f) = \sum_{\alpha^s=1} \sum_{w^m=\alpha} \sum_{z^m=\alpha^{-1}} \Lambda_c^z(w) \\ \qquad \text{ここで } \Lambda_c^z(w) = \sum_{\mu<0} \dim_{\mathbb{C}} \{ S_c'[\mu, 1, wf_*] \cap \ker(f_* - z) \} \\ \nu(C_m, f^\nu) = \sum_{\alpha^s=1} \sum_{w^m=\alpha} \sum_{z^{m-\nu}=\alpha^{-1}} N_c^z(w) \\ \qquad \text{ここで } N_c^z(w) = \dim_{\mathbb{C}} \{ S_c[0, 1, wf_*] \cap \ker(f_* - z) \} \end{cases}$$

$\lambda(C_m, f)$ と $\nu(C_m, f)$ は非負整数値をとる S^1 上の関数 Λ_c^z と N_c^z, ($z \in \{ z \in S^1 ; \ker(f_* - z) \neq \phi \}$) によって完全に決定される。

(11)
各元 $z \in \{ z \in S^1 ; \ker(f_* - z) \neq \phi \}$ に対して,
$N_c^z(w)$ は高々 $2n$ 個の点を除いてゼロとなる。$N_c^z(w) \neq 0$ なる点を z に関する Poincaré points と呼ぶ。
Λ_c^z は z に関する Poincaré points を除いて局所一定である。
$$\lim_{w \to w_0} \Lambda_c^z(w) \geq \Lambda_c^z(w_0)$$

(Lemma 8. と Theorem 9. 参照)

$\mathbb{Z}^+$、$\mathbb{Z}^-$ をそれぞれ正の整数、負の整数からなる集合とする。各整数 l に対して, $D_l^+ = \{ m \in \mathbb{Z}^+ ; \ m-1 \equiv l \mod s \}$, $D_l^- = \{ m \in \mathbb{Z}^- ; \ m-1 \equiv l \mod s \}$, $D_l = D_l^+ \cup D_l^-$ とおく。(10)式と(11)式より

Lemma 14. 各 $0 \leq l < s$ に対して, $\lambda(C_m, f) = 0$ が

すべての $m \in D_\ell$ に対して成り立つか．もしそうでないとすれば，ある正数 ε_ℓ，$a_\ell > 0$ で，

任意の $m_i \in D_\ell^+$，$(i=1,2)$ に対して，

$\lambda(C_{m_1}, f) - \lambda(C_{m_2}, f) \geq (m_1 - m_2)\varepsilon_\ell - a_\ell$

任意の $m_i \in D_\ell^-$ に対しては，

$\lambda(C_{m_1}, f) - \lambda(C_{m_2}, f) \geq (m_2 - m_1)\varepsilon_\ell - a_\ell$ が成立するようなものが存在する。

Lemma 15. 各 $0 \leq \ell < s$ に対して，正整数 $k_1, \ldots, k_q$ と数列 m_j^i, $j=1,\ldots,q$, $i > 0$，は，$m_j^i k_j$ は互いに異なり $\{m_j^i k_j\} = D_\ell$ で次の性質を持つものが存在する。

$$\begin{cases} \nu(C_{m_j^i k_j}, f) = \nu(C_{k_j}, f^r) & r \cdot m_j^i \equiv 1 \bmod s \text{ を満たす整数 } r \text{ が存在する時。} \\ \nu(C_{m_j^i}, f) = \nu^T(C_{m_j^i k_j}) = \nu^T(C_{k_j}) & (m_j^i, s) \neq 1 \text{ なる時。} \end{cases}$$

ここで $\nu^T(c)$ は，$\Omega(\mathrm{Fix}(f), id)$ の中における critical orbit $SO(2)c$ の nullity を示す。$\mathrm{Fix}(f)$ は，f の不動点からなる集合を表わし，一般に，任意の isometry h に対して $\mathrm{Fix}(h)$ は M の totally geodesic な部分多様体をなす。

（証明）各 $\alpha = e^{2\pi i \frac{t}{s}}$ $(t \not\equiv 0 \bmod s)$ に対して，$Q_\ell^\alpha = \{q \in \mathbb{Z}^+ ;\ \sum_{z^q = \alpha^{-1}} N_c^z(e^{2\pi i \frac{p}{sq}})$，$0 < p \leq sq$，$(p, sq) = 1\}$，

$Q_\ell^\alpha = \{ q \in \mathbb{Z}^+ ;\ \sum_{z^\ell=1} N_c^2 (e^{2\pi i \frac{p}{q}}) \neq 0,\ 0 < p \leq q,\ (p, q) = 1 \}$

$Q_\ell = \bigcup_{\alpha^s=1} Q_\ell^\alpha$ とおく。部分集合 $D \subset Q_\ell$ に対して $K(D)$ を D のすべての元の最小公倍数を表わす。$k_1, \ldots, k_g$ として $\{k_1, \cdots, k_g\} = \{1\} \cup \{K(D) ;\ D \subset Q\}$ を選ぶ。$j \in \{1, \ldots, g\}$ を固定するごとに，$m_j^i k_j$ を，$q \in Q_\ell$ で $q \nmid k_j$ ならば，常に $q \nmid m_j^i k_j$ を満たす最大の部分列を，$mk_j \in D_\ell$ から取り出したものとする。各元 $m \in D_\ell$ に対して，$D = \{ q \in D_\ell ;\ q \mid m \}$ とし，$k_j = K(D)$ とおく。その時仮定から $m = m_j^i k_j$ と一意的に表わせる。もし，ある $\alpha = e^{2\pi i \frac{t}{s}}$ ($t \not\equiv 0 \mod s$) に対して，$\sum_{w^{m_j^i k_j} = \alpha} \sum_{z^\ell = \alpha^{-1}} N_c^2 (w) \neq 0$ ならば，$(m_j^i, s) = 1$ であるから，$(m_j^i, s) \neq 1$ とすれば，$\nu(C_{m_j^i k_j}, f) = \sum_{w^{m_j^i k_j} = 1} N_c^1 (w) = \sum_{w^{k_j} = 1} N_c^1 (w) = \nu^T (C_{k_j})$。もし，$(m_j^i, s) = 1$ ならば，$r \cdot m_j^i \equiv 1 \mod s$ となる整数 r が存在するから，$\{ w \in S^1 ;\ w^{m_j^i k_j} = \alpha,\ \sum_{z^\ell = \alpha^{-1}} N_c^2 (w) \neq 0 \} = \{ w \in S^1 ;\ w^{k_j} = \alpha^r,\ \sum_{z^\ell = \alpha^{-1}} N_c^2 (w) \neq 0 \}$ となる。故に，$\nu(C_{m_j^i k_j}, f) = \sum_{\alpha^s = 1} \sum_{w^{k_j} = \alpha^r} \sum_{z^\ell = \alpha^{-1}} N_c^2 (w) = \nu(C_{k_j}, f^r)$。（証明終り）

もし，critical orbit $SO(2) C_{m_j^i k_j}$ が孤立した critical orbit ならば Theorem 6 と [5] の Lemma 3.6 より，

$$\mathcal{H}^0 (E^f_{C_{m_j^i k_j}}, C_{m_j^i k_j}) = \mathcal{H}^0 (E^f_{C_{k_j}}, C_{k_j}) \quad r \cdot m_j^i \equiv 1 \mod s \text{ なる } r \text{ が存在する時。}$$

$$\mathcal{H}^0(E^f_{c_{m_j};k_j'}, c_{m_j};k_j') = \mathcal{H}^0(C_{k_j})^T \quad (s, m_j') \neq 1$$ なる時。

ここで $\mathcal{H}^0(C_{k_j})^T$ は $\Omega(Fix(f), id)$ の中における C_{k_j} の characteristic invariant を示す。

Corollary 16. Cをタイプ2)の critical point とする。すべての critical orbit $SO(2)C_m$ $(m\neq 0)$ が孤立していると仮定する。その時，すべての $m(\neq 0)$ と k に対して，$B^0_k(C_m, f) \leq B$ となるような定数Bが存在する。さらに、任意の $k > k_0$ とすべての $m(\neq 0)$ に対して，$B^0_k(C_m, f)=0$ となるような k_0 が存在する。

(6)式と Lemma 14より，

Corollary 17. Cor. 16. の仮定の下で，$B_k(C_m, f)$ は一様に$2B$で上からおさえられる。さらに，勝手な $k > k_0+1$ に対して $B_k(C_m, f)\neq 0$ なる critical orbit $SO(2)C_m$ の個数は k に依存しないある定数Cをこえない。

§3.

Mをコンパクトで単連結なリーマン多様体とする。$C^0(M, h)$ をMの曲線 $\sigma: [0,1]\to M$ で $h(\sigma(0))=\sigma(1)$ を満たすもの全体からなるコンパクト開位相の導入された位相空間とする。$\Omega(M, h)$ から $C^0(M,h)$ の中への inclusion map は homotopy 同値である。([3])。ここで h は任意の isometry を表わす。Mは

単連結と仮定したので．$b_k(\Omega(M,h)) = b_k(C^0(M,h)) = \dim H_k(C^0(M,h))$ は有限である。([7])。

Theorem 18.（主定理）fをある素数sに対して$f^s = id$を満たすisometryとする。もし，$b_k(\Omega(M,f))$が非有界ならば，isometry fによって不変な閉測地線が幾何学的に異なるもので，無限に存在する。

（証明）もし，fによって不変な閉測地線が有限本しかないと仮定すると，有限個の$E^{f^{m_i}}$のcritical point C^i $(1 \leq i \leq r,\ m_i \in \mathbb{Z}^+)$で$\Omega(M,f)$内の任意のcritical pointはある$i$と整数$m$に対して，critical orbit $SO(2)C^i_m$の中存在するようにcritical points $\{C^i;\ 1 \leq i \leq r,\ C^i \in \Omega(M, f^{m_i})\}$を選ぶことができる。Cor. 12と13または，Cor. 16と17で決まったcritical point C^iに対応する定数をB^i，k_0^i，C^i，とする。$\hat{B} = \max_{1 \leq i \leq n} B^i$，$\hat{k}_0 = \max_{1 \leq i \leq n} k_0^i$，$\hat{C} = \sum_{i=1}^{n} C^i$とおく。任意の$k > \hat{k}_0 + 1$に対して，$B_k(C^i_m, f) \neq 0$なるcritical orbit $SO(2)C^i_m \in \Omega(M,f)$の個数は$\hat{C}$以下である。Morseの不等式(7)より，すべてのregular value $0 < a < b$と$k > \hat{k}_0 + 1$に対して，

$$b_k(\Omega^b(M,f),\ \Omega^a(M,f)) \leq 2\hat{C}\hat{B}$$

が成り立つ。aを$0 < a < \min\{E^{f^{m_i}}(C_i);\ 1 \leq i \leq r\}$とすれば，$\mathrm{Fix}(f)$は$\Omega^a(M,f)$の変位レトラクト([3])だから

故に，$b_k(\Omega^b(M,f), \Omega^a(M,f)) = b_k(\Omega^b(M,f), Fix(f))$ となる。Fix(f)は有限次元の多様体であるから，$b_k(\Omega^b(M,f), Fix(f)) = b_k(\Omega^b(M,f))$ がほとんどすべての k に対して成り立つ。$Fix(f) = \phi$ の場合も上の等式は成り立つ。(7)式より，任意の $k > \hat{k}_0 + 1$ と任意の regular value $a \geq b$ に対して $b_k(\Omega^a(M,f), \Omega^b(M,f)) = 0$ となるように regular value b をとることができる。故に，任意の $k > \hat{k}_0 + 1$ に対して，$b_k(\Omega(M,f), \Omega^b(M,f)) = 0$ である。したがって，ほとんどすべての k に対して，$b_k(\Omega(M,f)) = b_k(\Omega^b(M,f)) = b_k(\Omega^b(M,f), Fix(f)) \leqq 2\hat{C}\hat{B}$ となり，定理の仮定に反す。

参考文献

[1]. D. Gromoll, W. Meyer ; On differentiable functions with isolated critical points, Topology, 8 (1969) 361-369

[2] ———————— ; Periodic geodesics on compact Riemannian manifolds, J. Differential geometry 3 (1969) 493-510

[3] K. Grove ; Condition (C) for the energy integral on certain path spaces and applications to the theory of geodesics,

J. Differential Geometry 8 (1973) 207–223
[4] ———— ; Isometry-invariant geodesics, Topology 13 (1974) 281–292
[5] ———— ; Involution-invariant geodesics, preprint
[6] M. Morse ; The calculus of variations in the large, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. vol. 18, (1934)
[7] J. P. Serre ; Homologie singulière des espaces fibrès, Ann. of Math. 54 (1951) 425–505