数理解析研究所講究録
第251巻 1975年 99-121

Laplacianの固有値と測地線

九大工　酒井 隆

(M,g)をd次元コンパクト，連結，C^∞－リーマン多様体，ΔをM上のC^∞－函数に作用するLaplacian，$\mathrm{Spec}(M,g):=\{0=\lambda_0<\lambda_1\leqq\lambda_2\leqq\cdots\}$を$\Delta$の固有値の集合とする．$\mathrm{Spec}(M,g)$から$(M,g)$がどの程度定まるかという問題で，$\lambda_i$の分布状態を知ることが一つの有力な手段を与える．Minakshisundaram－Pleijel [5]は次の漸近展開を与えた。すなわち(M,g)によって決まる定数a_i $(i=0,1,\cdots)$が存在して，

$$\sum_n e^{-\lambda_n t} = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}}\sum_{n=0}^{k} a_n t^n + O(t^{k+1-d/2}) \quad \text{for } \forall k.$$

この事実の証明は(M,g)上の熱方程式の基本解FSRHEを構成することに帰着される．(M,g)上の熱方程式は，与えられた初期条件$f:M\to\mathbb{R}$に対して，次の2条件を満たす$G: M\times\mathbb{R}_+\ni(x,t)\to G(x,t)\in\mathbb{R}$を求めることを問題とする．

$$\Delta_x G + \frac{\partial G}{\partial t} = 0, \quad G(\cdot,0) = f(\cdot).$$

これは次の条件によって定義されるFSRHE $E: M\times M\times\mathbb{R}^*_+ \longrightarrow \mathbb{R}$が求まれば直ちに解くことができる．

(i) Eは3変数についてC^0、最初の2変数についてC^2, tに関してC^1であって、$\Delta_2 E + \frac{\partial E}{\partial t} = 0$をみたす。ここで$\Delta_2$は第2変数に関するLaplacianを表わす。また$\mathbb{R}_+^* = \{t>0\,;\,t\in\mathbb{R}\}$.

(ii) $\forall x \in M$, $\lim_{t\to+0} E(x,\cdot,t) = \delta_x$, ただし$\delta_x$は$x$におけるDirac distributionである。

さて(M,g)はコンパクト故、FSRHEは存在して一意である。実際$\{\varphi_i\}$をΔの固有函数よりなる正規直交函数系とすれば、$\sum e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x)\varphi_n(y)$は収束して、$E(x,y,t) = \sum e^{-\lambda_n t}\varphi_n(x)\varphi_n(y)$. したがって積分して、$\sum_n e^{-\lambda_n t} = \int_M E(x,x,t)\,\nu_g(x)$を得る。したがって$\sum_n e^{-\lambda_n t}$の様子はFSRHEによって決まる。

最近Colin de Verdiere [4]は$C^\infty(M;\mathbb{C})$上作用するΔに対して、複素熱方程式の基本解FSCHEを構成し、それを綿密に調べることによって、$\sum_{n\geq 0} e^{-\lambda_n/z} = \int_M E(x,x,1/z)\,\nu_g(x)$の, $z = \xi_0 + iy$ $(\xi_0 > 0 : fix)$で$y\to\infty$のときの漸近展開を得た。これは(M,g)の閉測地線に密接に関連することが分かる。ここではColin de Verdiereの結果を紹介することを目的とする。なおFourier積分作用素の理論を用いたapproachの仕方[2], [4]もある。また確率論的立場から熱方程式の基本解を扱ったものに[6]がある。

§1. 閉測地線. $\Omega(M) := \{\gamma : S^1 \to M \mid \text{class } H^1 \text{ の loop}\}$は

Hilbert多様体の構造を持ち、$\Omega(M)$上の energy 積分 $E:\Omega(M)\to\mathbb{R}$ を $E(\gamma):=\int_{S^1}|\dot\gamma(t)|^2dt$ で定義すれば、これは C^∞-函数となる。Eの critical points が (M,g) の閉測地線(点曲線を含む)で、critical value は閉測地線の長さの平方である。$\mathcal{L}$で閉測地線の長さの集合を表わすことにする。Mがコンパクト故 $\mathcal{L}$ は $\mathbb{R}^+$ の閉部分集合である。

さて $L\in\mathcal{L}$ が (ND) (non-degenerate) とは、E の critical value L^2 に対応する critical points 全体が有限個のコンパクト、非退化な critical submanifolds の和集合として表わされる場合を云う。ここに W が E の非退化な critical submanifold であるとは、

(i) W は $\Omega(M)$ の連結部分多様体で、各元 $w\in W$ は E の critical point である。

(ii) $\forall w\in W$ に対して、接空間 $T_w\Omega$ の閉部分空間 T_wW, 及び N_w による直和分解 $T_w\Omega=T_wW\oplus N_w$ で $\mathrm{Hess}_wE|N_w$ が非退化な2次形式となる様なものが存在する。

この様な W の nullity $n(W)$ を $L\neq 0$ のときは $\dim W-1$ で、$L=0$ のときは $\dim W\ (=\dim M)$ で定義する。また W の index $j(W)$ を $\mathrm{Hess}_wE|N_w$ の index (これは $w\in W$ の取り方によらない)で定義する。

<u>Definition (1.1)</u> (M,g) が条件 $(\mathcal{P}_1)$ を満たすとは、$\forall L\in\mathcal{L}$ が (ND) であることとする。次に $(\mathcal{P}_2)$ を満たすとは、$\forall L\in\mathcal{L}-\{0\}$

が(ND)であり、nullity 0、かつ γ を長さ L の閉測地線とすると、energy L^2 の critical points 全体の集合は丁度次の2つの critical submanifolds W_+, W_- からなる。

$W_+ := \{t \to \gamma(t+a);\ a\in[0,1[\}$, $W_- := \{t\to\gamma(a-t);\ a\in[0,1[\}$.

注意. $(P_1) \Rightarrow \mathcal{X}$ は discrete. $(P_2) \Rightarrow$ 閉測地線は isolated でそれらの長さはすべて異なる。(P_1), (P_2) は generic.

以下の議論では $\Omega(M)$ よりも、$\Omega(M)$ の piecewise geodesic loops よりなる有限次元多様体による近似の方が用いられる。

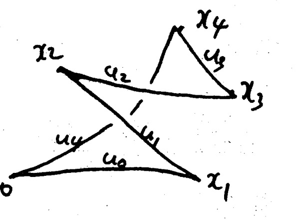
$X_n := \{(u_0,u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^{n+1} \mid u_i\in]0,1[,\ \sum u_i=1\}$ n次元開単体.

$\overline{xy}$: M の2点 x,y の(g に関する)距離.

ρ: (M,g) の injective radius.

$M_0^{n+1} := \{(x_0,x_1,\dots,x_n)\in \underbrace{M\times\cdots\times M}_{n+1} \mid \overline{x_ix_{i+1}}<\rho\ \ i=0,\dots n.\ \text{ただし } x_{n+1}=x_0\}$

と約束する。さて $U\in X_n$ を一つ与えた時、imbedding $j_U: M_0^{n+1}\hookrightarrow \Omega(M)$、$\gamma=j_U(x_0,\dots,x_n)$ を次の様に定義する。$t_0=0$, $t_1=u_0$, $\dots$, $t_i=u_0+\dots+u_{i-1}$ とおくとき、$\gamma|[t_i,t_{i+1}]$ が x_i と x_{i+1} を結ぶ最短測地線で、弧長に比例して径数づけられたものとして、γ を定義する。このとき、$E\circ j_U(x_0,x_1,\dots,x_n)=\sum_{i=0}^{n} \frac{\overline{x_ix_{i+1}}^2}{u_i}$ は容易に分かる。M_0^{n+1} 上の C^∞-函数 $E_U = E\circ j_U$ の critical point $(x_0,\dots,x_n)$ は $j_U(x_0,\dots,x_n)$ が閉測地線であり



(即ち, $\dot{\gamma}|_{[t_{i-1},t_i]}(t_i-0)=\dot{\gamma}|_{[t_i,t_{i+1}]}(t_i+0)$), $\frac{\overline{x_0x_1}}{u_0}=\cdots=\frac{\overline{x_nx_{n+1}}}{u_n}$ で特徴づけられる。第一変分，第二変分を考えることによって.

<u>Proposition (1.2)</u> $h: X_n\times M_0^{n+1}\longrightarrow X_n\times\Omega(M)$ を $h=id_{X_n}\times j_U$ によって，また $\hat{E}: X_n\times M_0^{n+1}\to\mathbb{R}$ を $\hat{E}(U;(x_i))=E\cdot j_U((x_i))$ によって定義する。このとき，h は imbedding であって，$\hat{E}$ の critical points の集合と，$\{(U,\gamma)\mid\gamma:$ 長さ $L_\gamma<\rho/\mathrm{Max}(u_i)$ の閉測地線$\}$ の間の1対1上への対応を与える。更に W が E の critical value L^2 $(<|(n+1)\rho|^2)$ の非退化，critical submanifolds であるとすれば，$h^{-1}(X_n\times W)$ は次元が $n(W)+n+1$ ($L=0$ のとき $n+d$) index が $j(W)$ の $\hat{E}$ の非退化 critical submanifold である。

§2. 熱方程式に対する複素基本解の構成

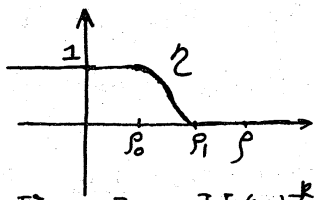
<u>Definition (2.1)</u>. $\mathbb{C}_+:=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Re}\,z>0\}$ とおく。$E: M\times M\times\mathbb{C}_+\to\mathbb{C}$ が複素熱方程式の基本解 FSCHE であるとは．

(i) E は3つの変数に関して C^0, 最初の2つの変数に関して C^2, 第3の変数に関して holomorphic で，$\Delta_2 E+\frac{\partial E}{\partial z}=0$ をみたす。

(ii) $^\forall f: M\to\mathbb{C}$ 連続函数，$^\forall\alpha\in\mathbb{C}$ $|\alpha|<\pi/2$ に対して，

$$\lim_{|z|\to 0\ |\mathrm{Arg}\,z|\leqq|\alpha|}\int_M E(x,y;z)f(y)\,\nu_g(y)=f(x)$$ が成立する。

さて FSCHE は存在して一意である。(Berger etc. [1]) 構成法は以下の通り。まず ρ_0,ρ_1 を $0<\rho_0<\rho_1<\rho$ をみたす正数，



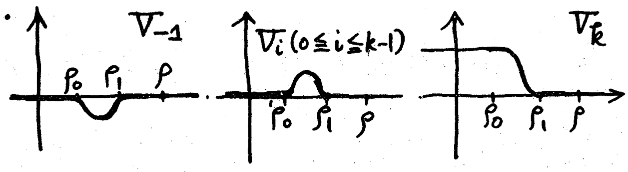
ηを図の様なC^∞-函数として、まず熱方程式の parametrix $H_k : M\times M\times \mathbb{C}_+ \longrightarrow \mathbb{C}$ を

(2.2) $H_k(x,y;z) := \eta(\overline{xy})(4\pi z)^{-d/2}\exp\left(-\dfrac{\overline{xy}^2}{4z}\right)\left(U_0(x,y)+U_1(x,y)z+\cdots+U_k(x,y)z^k\right)$

の形で定義する。ここでzの巾は$\mathbb{C}_+$に於ける分枝を取ることにし、$U_0,\ldots,U_k$ は $\left(\dfrac{\partial}{\partial z}+\Delta_2\right)\left\{(4\pi z)^{-d/2}\exp\left(-\dfrac{\overline{xy}^2}{4z}\right)(U_0(x,y)+\cdots+U_k(x,y)z^k)\right\}$ がzに関して$(k-\frac{d}{2})$次の項だけに reduce する様に微分方程式の解として帰納的に決定されるC^∞-函数である。$L_k(x,y;z) := \left(\dfrac{\partial}{\partial z}+\Delta_2\right)H_k(x,y;z)$と定義すれば、直接の計算で

(2.3) $L_k(x,y;z) = (4\pi z)^{-\frac{d}{2}}\exp\left(-\dfrac{\overline{xy}^2}{4z}\right)\left(\displaystyle\sum_{i=-1}^{k} V_i(x,y)z^i\right)$

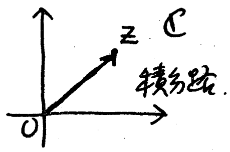
の形にかけることが分かる。ここにV_iは$M\times M$上C^∞-(実数値)函数で図の様な性質を持つ。



$\eta(\overline{xy})U_i(x,y)$を改めて$U_i(x,y)$と書くことにすれば $\mathrm{supp}(U_i)\subset\{(x,y)\in M\times M \mid 0\leqq \overline{xy}\leqq \rho_1\}$.

いま函数の合成積(*)を

$$(A*B)(x,y;z) = \int_0^z\int_M A(x,\xi;\theta)B(\xi,y;z-\theta)\nu_g(\xi)\,d\theta$$



で定義すればこれは容易に分かる様に $z\displaystyle\int_{X_1}\int_M A(x,x_1;u_0z)B(x_1,y;u_1z)\,\nu_g\otimes\mu_1$ に等しい。ここにμ_1はX_1上の total mass 1 の自然な測度。*は associative であって、帰納法で

$$(L_k)^{*n}*H_k(x,y;z) = z^n\int_{M^n\times X_n} L_k(x,x_1;u_0z)\cdots L_k(x_{n-1},x_n;u_{n-1}z)H_k(x_n,y;u_nz)\lambda_n$$

——ただし $\lambda_n = \nu_g(x_1)\otimes\cdots\otimes\nu_g(x_n)\otimes\mu_n(U)$, μ_n は X_n 上の total mass $1/n!$ の自然な測度—— が証明される。よって (2.2), (2.3) より

$$(2.4)\quad (L_k)^{*n} * H_k(x_0,x_{n+1};z) = \int_{M^n\times X_n} \exp\Big(-\frac{1}{4z}\sum_{i=0}^{n}\frac{\overline{x_ix_{i+1}}^2}{u_i}\Big) P_n^k\big(x_0,x_1,\dots,x_n;U;\tfrac{1}{z}\big) \bigotimes_{i=1}^{n}\nu_g(x_i)\otimes\mu_n(U).$$

ただし

$$(2.5)\quad P_n^k((x_i);U;z) = z^{-n}\prod_{i=0}^{n-1}\Big\{\Big(\frac{z}{4\pi u_i}\Big)^{d/2}\sum_{j=-1}^{k}V_j(x_i,x_{i+1})\Big(\frac{u_i}{z}\Big)^j\Big\}\cdot\Big(\frac{z}{4\pi u_n}\Big)^{d/2}\Big\{\sum_{j=0}^{k}U_j(x_n,x_{n+1})\times\Big(\frac{u_n}{z}\Big)^j$$

[redacted] $\Big\}$.

したがって、P_n^k は

$$(2.6)\quad P_n^k((x_i);U;z) = \sum_{l=l_0}^{(n+1)d/2} P_{n,l}^k((x_i);U)\,z^l \quad (2l_0\in\mathbb{Z})$$

の形を持ち、z の最高次の係数は

$P^k_{n,\frac{(n+1)d}{2}}((x_i);U) = \Big\{\prod_{i=0}^{n-1}\frac{V_{-1}(x_i,x_{i+1})}{u_i(4\pi u_i)^{d/2}}\Big\}\Big\{$ $U_0(x_n,x_{n+1})$ [redacted] $/(4\pi u_n)^{d/2}\Big\}$ である。

さて上の条件をみたす任意の p_0,p_1,q, $\forall k>d/2$ に対して、$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(L_k)^{*n}*H_k$ は収束して FSCHE であることが示される。したがって FSCHE の性質は (2.4) の形の積分の無限和からでる訳であるが、$\sum_{i=0}^{n}\frac{\overline{x_ix_{i+1}}^2}{u_i} = E_U((x_i))$ であることに注意しよう。(2.4) の形の積分は $E_U((x_i))$ の critical value が重要な役割りを果す (stationary phase method)。しかしこの積分は P_n^k が z, u に関して負の巾を持つこと、また X_{n+1} がコンパクトでないこと等の理由によって、技術的に困難な点が多い。

後に用いられる評価式を挙げておこう。

<u>Proposition (2.7)</u> $k > d/2$, $z : \mathrm{Re}(z) = \xi_0 > 0$ を fix する。このとき、n に無関係な正数 C_1, C_2 が存在して、

$$\int_{M^n \times X_n} \exp\left[-\frac{\xi_0}{4}\sum_{i=0}^{n} \frac{\overline{x_i x_{i+1}}^2}{u_i}\right] |P_n^k|((x_i);U;z) \bigotimes_{i=1}^{n} V_g(x_i) \otimes \mu_n(U) \leqq C_1 C_2^n |z|^{\frac{(n+1)d}{2}} \frac{1}{\{n(k-[\frac{d}{2}])\}!}$$

ただし $|P_n^k|((x_i);U;z) = \sum_{l=l_0}^{\frac{(n+1)d}{2}} |P_{n,l}^k((x_i);U)|\, |z|^l$ である。

<u>Proposition (2.8)</u> $C_{\xi_0} := \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \geqq \xi_0 > 0 \}$ とおく。このとき、

$\forall \xi_0 > 0$, $\forall \alpha > 0$; $\exists C, C' > 0$ s.t.

$\forall z \in C_{\xi_0}$ に対して $|E(x, y; \frac{1}{z})| \leqq C \exp(C'|z|^\alpha)$.

(2.8) は $k - [\frac{d}{2}] > d/2\alpha$ となる k を選び、(2.7) を用いることにより簡単に示せる。

§3. 擬 Fourier 変換・展開 $(F\alpha)$.

以下 (2.4) の積分を直接扱うのではなく、Fourier 変換に似た変換を施したものを考える。$\mathbb{C}_+^1 = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0 \}$ とおく。$z \to \infty$ と書くときには、$\xi_0 > 0$ が固定されていて、$z = \xi_0 + iy$, $y \to \infty$ を意味するものとする。

<u>Definition (3.1)</u> $f : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ は bounded by exponential when $z \to \infty$ であるとする。(i.e. $\exists A, B > 0$ 正定数 s.t. $|f(\xi_0 + \sqrt{-1}y)| \leqq A e^{By}$). このとき、$(\sigma, t) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ に対して

$$\hat{f}(\sigma, t) := \int_R f(\xi_0 + iy) \exp(ity - \sigma(y - \tfrac{1}{\sqrt{\sigma}})^2)\, dy \qquad (\xi_0 : \text{fix})$$

と定義する。仮定により $\hat{f}$ は絶対収束する。

<u>Definition (3.2)</u>. $\{t_n\}_{n \in N} \subset R$ 単調増加列，$t_n \geqq 0$. $f, f_n : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$. このとき記号 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-t_n z) f_n(z)$ (F_0) は

(i) $\forall t \notin \{t_n\}$ に対しては $\hat{f}(\sigma, t) = o(1/\sqrt{\sigma})$.

(ii) $\forall n \in N$ $\hat{f}(\sigma, t_n) = \hat{f_n}(\sigma, 0) \exp(-\xi_0 t_n) + O(1/\sqrt{\sigma})$.

が成立することを意味する。次に実数 α に対して，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-t_n z) f_n(z) \quad (F_\alpha)$$ は，

$$z^\alpha f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-t_n z) z^\alpha f_n(z) \quad (F_0)$$ を意味するものとする。

我々は $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{\lambda_n}{z})$ の この様な展開を考えるのであるが，そこで表われる $f_n(z)$ は次の型の函数である．$g : \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ が type T_α の函数であるとは，

$$g(z) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{N} a_j z^{\alpha_j} & \text{for } \mathrm{Im}(z) \geqq 0. \\ \overline{g(\bar{z})} & \text{for } \mathrm{Im}(z) < 0 \end{cases} \qquad \text{ここに } -\alpha < \alpha_1 < \cdots < \alpha_N, \quad a_j \in \mathbb{C}.$$

の形に書ける場合をいう。

このとき、次の事実を証明することができる。

<u>Proposition (3.4)</u> $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-t_n z) f_n(z)$ (F_α) において．すべての f_n が type T_α の函数であれば，この展開は一意的である。

<u>注意</u>. 定義(3.1)で $-\sigma(y - \frac{1}{\sqrt{\sigma}})^2$ の代りに $-\sigma y^2$ とすると(3.4)

は成立しない．また展開(F.α)を考えるのは．$\sum \exp(-\frac{\lambda_n}{z})$ の漸近展開で高次の係数を定める際に必要となるためである。

定理の証明で必要となる $\hat{f}$ の性質を挙げておこう。

Lemma (3.5) $f: \mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}$ が $z \to \infty$ のとき有界であれば．

$$\hat{f}(\sigma, t) = O(1/\sqrt{\sigma}).$$

Lemma (3.6). $P: z \to \sum_{p=p_0}^{p_1} a_p z^{p/2}$ ($p_0, p_1, p \in \mathbb{Z}$). $|P|: z \to \sum_{p=p_0}^{p_1} |a_p| |z|^{p/2}$ とおく．$\sigma \leqq 1$ に対して以下が成立する．

(3.7). $p_0 \geqq 0, t \leqq 0$ ならば $|\hat{P}(\sigma, t)| \leqq C\,\Gamma(\frac{p_1}{4} + \frac{1}{2})\,\sigma^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{t^2}{4\sigma})\,|P|(2\xi_0 + \frac{|t|+4}{\sigma})$

(3.8). $p_0 \geqq 0$, $|t| > 0$ ならば $\hat{P}(\sigma, t) = O(1/\sqrt{\sigma})$. 更に $|t| \geqq |t_0| > 0$ ならば これは一様に成立する。

(3.9). $p_1 \leqq 0$ ならば $|\hat{P}(\sigma, t)| \leqq (\pi/\sigma)^{1/2} |P|(\xi_0)$.

§4. この節では定理を述べる．

Theorem. (M^d, g) d次元コンパクト連結リーマン多様体．$(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ を $C^\infty(M, \mathbb{C})$ 上作用する Δ のスペクトルとする．($0 = \lambda_0 < \lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \cdots$). $\mathcal{L}$ で (M, g) の閉測地線の長さ全体のなす $\mathbb{R}^+$ の閉集合を表わす。このとき．

$Z(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{\lambda_n}{z})$ は各 $z \in \mathbb{C}^+$ に対して収束して．

(I). $t \notin \{\frac{L^2}{4} \mid L \in \mathcal{L}\}$ ならば $\forall \alpha \geqq 0$ に対して $\widehat{z^\alpha Z(z)}(\sigma, t) = O(\frac{1}{\sqrt{\sigma}})$.

(II). $\mathcal{L}$: discrete であるとする。$L_0=0<L_1<L_2<\cdots<L_m<\cdots$ と $\mathcal{L}$ の元を並べるとき，$\forall\alpha\geq 0$ に対して f_m^α が存在して．

$$Z(z)=\sum_{m=0}^{\infty} f_m^\alpha(z)\exp\left(-z\frac{L_m^2}{4}\right) \qquad (F\alpha)$$

の形の展開式を得る。更に L_m が (ND) (§1) で対応する critical submanifolds $(W_\lambda)_{1\leq\lambda\leq\Lambda}$ が nullity n_λ, index j_λ を持てば．

$$P_\lambda^\alpha(z):=\begin{cases}\exp\left(\sqrt{-1}\,j_\lambda\frac{\pi}{2}\right)\left(a_0 z^{\frac{n_\lambda+1}{2}}+a_1 z^{\frac{n_\lambda-1}{2}}+\cdots+a_\ell z^{-\frac{2\alpha-1}{2}}\right) & \text{if } \operatorname{Im} z\geq 0\\ \overline{P_\lambda^\alpha(\bar z)} \quad \text{if } \operatorname{Im} z<0. & \text{ここに } a_0>0.\end{cases}$$

の形の函数が存在して．$f_m^\alpha(z)=\sum_{\lambda=1}^{\Lambda}P_\lambda^\alpha(z)$ と書ける．ここで $f_m^\alpha(z)$ は type $T\alpha$ でしたがって一意に決まる．

注意1. $m=0$ のときが Minakshisundaram-Pleijel の展開式に他ならない．(この時は上式で $n_\lambda+1=d$ ととる)

注意2. M^d が flat torus の場合．critical submanifolds はすべて次元 d, index 0 を持ち，$\forall\alpha$ $P_\lambda^\alpha(z)=\left(\frac{z}{4\pi}\right)^{d/2}\mathrm{vol}(M)$.
(II) の展開式は Poisson の公式 $\mathrm{vol}(\Gamma)t^{\frac{d}{2}}\sum_{x\in\Gamma}e^{-\pi|x|^2t}=\sum_{y\in\Gamma^*}e^{-\pi\frac{|y|^2}{t}}$ (Γ は torus を定義する lattice．Γ^* は Γ の dual lattice) に他ならない．

注意3. $\mathcal{P}_2$ をみたす (M,g) に対しては spectrum は $\mathcal{L}$ を定める。しかし一般には spectrum から $\mathcal{L}$ は決まらない。実際ある $L\in\mathcal{L}$ に対して長さ L, nullity 0 の丁度2つの閉測地線で，それらの index が2だけ違うものが存在すれば，$\exp(-\frac{z}{4}L^2)$ の対応する2項は打消しあって，L は漸近展開には現われない．

定理の証明の前に証明において本質的な役割りを果す stationary phase method について述べる。

§5. stationary phase method

<u>Theorem 5.1</u>. X^N; N次元 C^∞-多様体; $g: X \to \mathbb{C}$ を compact support を持つ X 上の C^∞-函数; $f: X \to \mathbb{R}$ を C^∞-函数とする。

(i) f が g の support 内に critical point を持たないとすれば、任意の実数 b に対して、$\int_X z^b \exp(-zf(x))g(x)dx$ は $\mathrm{Im}\, z \to +\infty$ のとき有界である。

(ii) g の support 内の f の critical points が次元 n, index j の非退化 critical submanifold W をなすとする。$x \in W$ に対して $\mathrm{Hess}_\perp f(x)$ で、f の hessian の x における W の normal space への制限を表わすことにする。このとき任意の整数 K に対して

$$\int_X \exp(-zf(x))g(x)\,v_g(x) = \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{N-n}{2}} \exp\left(\sqrt{-1}\, j\,\frac{\pi}{2} - zf(W)\right)\left(\sum_{k=0}^{K} a_k z^{-k} + z^{-K} r_K(z)\right)$$

ここに $a_0 = \int_W g(x)\,|\det(\mathrm{Hess}_\perp f(x))|^{-\frac{1}{2}}\, v_W(x)$ で、$\mathrm{Im}\, z \to +\infty$ のとき $r_K(z) \to 0$ をみたす。

証明)(i). $\mathrm{supp}\, g$ 内に f の critical point は存在しないから、変数変換 $f(x) = t$ を行って Fubini の定理を用いれば、

$$\int_X z^b \exp(-zf(x))g(x)dx = \int_\alpha^\beta \left(\int_{f(x)=t} g(f^{-1}(t))\, z^b \exp(-zt)\right)dt$$

$$(f(\mathrm{supp}\, g) \subset [\alpha, \beta])$$

$= \int_\alpha^\beta z^b u(t) \exp(-zt)\,dt$, $u(t)$: C^∞-函数の形にかける。

部分積分を繰り返し行えば、(i) が示される。

(ii) $f(W) = 0$ と仮定してよい。1 の分割によって g の support が f に関する Morse chart 内に含まれる場合を考えれば十分である。即ち局所座標系 $\varphi: U \to X$ を適当にとって、

$$f\circ\varphi(x_1, \cdots, x_N) = -(x_1^2 + \cdots + x_j^2) + x_{j+1}^2 + \cdots + x_{N-n}^2$$

の形に書ける。したがって

$$\int_X \exp(-zf(x))g(x)\nu_X(x) = \int_{\mathbb{R}^N} \exp(z(x_1^2 + \cdots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \cdots - x_{N-n}^2)) \times$$

$$\times\, g\circ\varphi(x_1, \cdots, x_N)\,|\mathrm{Jac}\,\varphi(x_1, \cdots, x_N)|\,dx_1 \cdots dx_N.$$

まず最後の n 個の変数について積分することによって、

$$= \int_{\mathbb{R}^{N-n}} \exp(z(x_1^2 + \cdots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \cdots - x_{N-n}^2))\,\bar{g}(x_1, \cdots, x_{N-n})\,dx_1 \cdots dx_{N-n}$$

ただし

$$\bar{g}(x_1, \cdots x_{N-n}) = \int_{\mathbb{R}^n} g\circ\varphi(x_1, \cdots x_N)\,|\mathrm{Jac}\,\varphi(x_1, \cdots, x_N)|\,dx_{N-n+1} \cdots dx_N.$$

したがって (ii) は次の補題に帰着される。

<u>Lemma 5.2</u> $g: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ compact support を持つ C^∞-函数

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(z(x_1^2 + \cdots + x_j^2 - x_{j+1}^2 - \cdots - x_d^2))\,g(x_1, \cdots, x_d)\,dx_1 \cdots dx_d$$

$$= \left(\frac{\pi}{z}\right)^{d/2} \exp\left(\sqrt{-1}\,\frac{\pi}{2} j\right)\left(g(0) + \sum_{k=1}^{K} a_k z^{-k} + z^{-K} v_K(z)\right)$$

ここに $\mathrm{Im}(z) \to +\infty$ のとき、$v_K(z) \to 0$.

これは Gauss 積分を用いて計算される。なお

$$\bar{g}(0) = \int_{\mathbb{R}^n} g\circ\varphi(0,\cdots 0, x_{N-n+1},\cdots,x_N)|\mathrm{Jac}\,\varphi(0,\cdots 0; x_{N-n+1},\cdots x_N)|dx_{N-n+1}\cdots dx_N$$

$$= 2^{\frac{N-n}{2}}\int_W g(x)|\det(\mathrm{Hess}_\perp f(x))|^{-\frac{1}{2}} v_W(x)$$ に注意.

§6 定理の証明.

$\alpha=0$ の場合に証明できれば一般の α の場合も同様の証明が有効である。さて $z\in\mathbb{C}^+$ に対しては

$$Z(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\lambda_n}{z}\right) = \int_M E\left(x,x;\frac{1}{z}\right)v_g(x)$$

であって，$Z(z)$ は $z\to\infty$ のとき bounded by exponential であるから (Prop (2.8)) $\hat{Z}(\sigma,t)$ を考えることができる。(2.4), (3.1) から

(6.1) $$\hat{Z}(\sigma,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\times$$

$$\times\int_{M_0^{n+1}\times X_n\times R}\exp\left[-\frac{\xi_0+\sqrt{-1}y}{4}E_U((x_i))+\sqrt{-1}ty-\sigma\left(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right]P_n^k(x_0,x_1,\cdots,x_n,x_0;U;\xi_0+\sqrt{-1}y)$$
$$\bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i)\otimes\mu_n(U)\otimes dy.$$

ただし P_n^k は (2.5) で与えられたものである。これを z に関して正，負の巾に分けて $P_n^k = P_n^{k+} + P_n^{k-}$.

$$P_n^{k+}(z) = \sum_{l\geq 0}P_{n,l}^k((x_i);U)z^l,\quad P_n^{k-}(z) = \sum_{l<0}P_{n,l}^k(z)z^l$$ と分解し

(6.1) の積分を

(6.2) $$\hat{Z}(\sigma,t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(I_n^+(\sigma,t)+I_n^-(\sigma,t))$$ と書く。

以下 証明の方針は まず (3.9) を用いて $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n I_n^-(\sigma,t)=O(1/\sqrt{\sigma})$ をみたすことを見る。$I_n^+(\sigma,t)=\int_{M_0^{n+1}\times X_n\times\mathbb{R}}\exp(-\frac{\sigma}{4}\sum_i E_U((x_i)))\exp[\sqrt{-1}y(t-\frac{E_U((x_i))}{4})-$

$-\sigma(y-\frac{i}{2\sigma})^2]\,P_n^+\bigotimes_{i=0}^{n}\nu_g(x_i)\otimes\mu_n(U)\otimes dy$ に於いて. $\sqrt{-1}y(t-\frac{E_U((x_i))}{4})$

という項があるから. $E_U/4$ が t から離れているときには (3.8) から $I_n^+(\sigma,t)=O(1/\sqrt{\sigma})$ を得る。$E_U/4$ が t に近い所では、被積分函数が compact support を持ち 定理5.1 が適用される。

しかし我々は $I_n^+(\sigma,t)$ の級数を取り扱わねばならない。また u_i の負の巾が現われること, X_n が compact ではないことのために、$I_n^+(\sigma,t)$ を与えられた t から E_U の値が離れている部分とコンパクトな support を持つ部分に分解するためには次の technical な準備が必要である。

<u>Lemma (6.3)</u> $t\geq 0$ が与えられているとする。このとき ρ_0,ρ_1 $(0<\rho_0<\rho_1<\rho)$, k 自然数, C^∞-函数 $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ で t のある近傍で 1, $[t-\beta,t+\beta]$ $(\exists\beta>0)$ 以内 support を持つもの、および 自然数 n_0 で 以下の条件をみたすものがとれる。

(i) $\sum_{n=0}^{\infty}|I_n^-(\sigma,t)|=O(1/\sqrt{\sigma})$, $\sum_{n=n_0+1}^{\infty}|I_n^+(\sigma,t)|=O(1/\sqrt{\sigma})$

(ii) 任意の $n\in\{0,1,\cdots,n_0\}$ に対して $[n\rho_0,n\rho_1]\cap[2\sqrt{t-\beta},2\sqrt{t+\beta}]=\phi$

(iii) $2\sqrt{t}\notin\mathcal{L}$ ならば. $[2\sqrt{t-\beta},2\sqrt{t+\beta}]\cap\mathcal{L}=\phi$

(iv) $2\sqrt{t}$ が $\mathcal{L}$ の孤立点 ならば $[2\sqrt{t-\beta},2\sqrt{t+\beta}]\cap\mathcal{L}=\{2\sqrt{t}\}$

(v) $n=1,\cdots,n_0$ に対して、$((x_i);U;z)\in\mathrm{Supp}\,P_n^{k+}$ ならば $\overline{x_ix_{i+1}}\geq\rho_0$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$.

(vi) $\hat{\sum}(\sigma;t) = \sum_{n=0}^{n_0}(-1)^n \int_{M_0^{n+1}\times X_n\times\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{\xi_0}{4}E_U((x_i)) + \sqrt{-1}\,y\left(t-\frac{E_U((x_i))}{4}\right) - \sigma\left(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right]\times$

$\times\ \varphi\left(\frac{E_U((x_i))}{4}\right) P_n^{k+}((x_i),U;z) \bigotimes_{i=0}^{n} V_g(x_i)\otimes\mu_n(U)\otimes dy + O(1/\sqrt{\sigma}).$

Lemmaの証明). まず I_n の評価を行う。

$|I_n^-(\sigma;t)| \leqq \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{1/2}\int_{M_0^{n+1}\times X_n} \exp\left[-\frac{\xi_0}{4}E_U((x_i))\right]|P_n^{k-}|((x_i),U;\xi_0)|\otimes V_g(x_i)\otimes\mu_n(U)$

(y に関して積分し (3.9) を用いる)

$\leqq \left(\frac{\pi}{\sigma}\right)^{1/2} c_1 c_2^n \frac{\xi_0^{\frac{(n+1)}{2}d}}{\{n(k-[\frac{d}{2}])\}!}$ (Prop (2.7))

よって $\sum_{n=0}^{\infty}|I_n^-(\sigma;t)| = O(1/\sqrt{\sigma})$.

以下 $t>0$ として証明するが $t=0$ の場合も同様である。

$\rho_0>0$ を $2\sqrt{t}\notin\{n\rho_0 \mid n\in\mathbb{N}\}$ となる様に選び n_0 は $n_0\rho_0 < 2\sqrt{t} < (n_0+1)\rho_0$ をみたす自然数とする。いま $N((x_i)) = N((x_0,\cdots,x_n)) := \#\{i\in\{0,1,\cdots,n-1\} \mid \overline{x_i x_{i+1}} \geqq \rho_0\}$ とおけば、

$E_U((x_i)) = \frac{\overline{x_0x_1}^2}{u_0}+\cdots+\frac{\overline{x_nx_0}^2}{u_n} \geqq (N(x_i)\rho_0)^2$ である。$P_n^{k+}((x_i);U;z)$ を考えると、その項は

$\sum_{j_0,\cdots,j_n} V_{j_0}(x_0x_1)\cdots V_{j_{n-1}}(x_{n-1}x_n)U_{j_n}(x_nx_0)Q_{j_0\cdots j_n}(U)\, z^{n(\frac{d}{2}-1)-\sum_{i=0}^{n}j_i+\frac{d}{2}}$

である。よって $n(\frac{d}{2}-1)+\frac{d}{2} \geqq \sum_{i=0}^{n} j_i$ を得る。ところが U_j, V_j の support に関する条件 (p.6) から $\overline{x_ix_{i+1}}<\rho_0$ をみたす i に対して、P_n^{k+} に現われる $V_{j_i}(x_ix_{i+1})$ の j_i は k でなければならない。$j_n\geqq 0$, $j_0,\cdots j_{n-1}\geqq -1$ であったから $\sum_{i=0}^{n} j_i \geqq (n-N(x_i))k - N((x_i))$ を得る。よって $N((x_i)) \geqq n\frac{k}{k+1} - \frac{d(n-1)-2n}{2(k+1)}$

この式の右辺は $k > d/2+1$ のとき n に関して単調増加であり、n を固定したとき、$k \to \infty$ とすれば単調に n に収束する。よって特に $n = n_0+1$ とおくと、$\exists k$ (自然数) $\exists\, 1 \geq \varepsilon_0 > 0$,

$N(x_i) \geq n\frac{k}{k+1} - \frac{d(n-1)-2n}{2(k+1)} \geq \frac{2\sqrt{t+\varepsilon_0}}{\rho_0}$. したがって同じ k, ε_0 に対して $n \geq n_0+1$ ならば $N((x_i)) \geq \frac{2\sqrt{t+\varepsilon_0}}{\rho_0}$ i.e. $E_U((x_i)) \geq 4(t+\varepsilon_0)$ を得る。すなわち $n \geq n_0+1$ に対して

(6.4) $\operatorname{supp}(P_n^{k+}) \subset \{((x_i), U) \mid E_U((x_i)) \geq 4(t+\varepsilon_0)\} \times \mathbb{C}^+$

であることが示された。ここで k 十分大にすれば (6.4) 及び $n = 1, \cdots, n_0$ に対しては $N(x_i) > n-1$ とできること、すなわち (v) が成立することに注意しておこう。さて ρ_1, β, φ は (ii), (iii), (iv) をみたす様にとれる。そこで $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} |I_n^+(\sigma, t)|$ の評価を行う。$Y_p := \{((x_i), U) \mid E_U((x_i)) \in [4(t+p), 4(t+p+1)[\}$ $(p \geq 1)$,

$Y_0 := \{((x_i), U) \mid E_U((x_i)) \in [4(t+\varepsilon_0), 4(t+1)[\}$ とおく。

(6.4) より $\operatorname{supp}(P_n^{k+}) \subset \bigcup_{p=0}^{\infty} Y_p \times \mathbb{C}^+$, である。$I_n^p(\sigma, t)$ で Y_p 上の積分を表わせば、

$$I_n^p(\sigma,t) = \int_{Y_p \times \mathbb{R}} \exp\Big[-\frac{\xi_0}{4}E_U((x_i)) + \sqrt{-1}\,y\big(\underbrace{t - \frac{E_U((x_i))}{4}}_{\leq -p \text{ or } -\varepsilon_0}\big) - \sigma\big(y - \frac{1}{i\sigma}\big)^2\Big] P_n^{k+} \bigotimes_{i=0}^{n} \nu_g(x_i) \otimes \mu_n(U) \otimes dy$$

$$\leq \frac{C(\xi_0)}{\sqrt{\sigma}} \Gamma\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{(n+1)}{2}d\Big) \exp\Big(-\frac{\overset{(\varepsilon_0^2)}{p^2}}{4\sigma}\Big) \int_{Y_p} \exp\Big[-\frac{\xi_0}{4}E_U((x_i))\Big] |P_n^{k+}| \Big(2\xi_0 + \frac{p+5}{\sigma}\Big) \bigotimes_{i=0}^{n} \nu_g(x_i) \otimes \mu_n(U) \quad ((3.7))$$

$$\leq \frac{C_1}{\sqrt{\sigma}} \exp\Big(-\frac{\overset{(\varepsilon_0^2)}{p^2}}{4\sigma}\Big) \Gamma\Big(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{(n+1)}{2}d\Big) C_2^n \Big(2\xi_0 + \frac{p+5}{\sigma}\Big)^{\frac{(n+1)d}{2}} \frac{1}{\{n(2d+1-[\frac{d}{2}])\}!}$$

$$\leq \frac{C_2'}{\sqrt{\sigma}} C_2^n \exp\Big(-\frac{\overset{(\varepsilon_0^2)}{p^2}}{4\sigma}\Big) \Big(2\xi_0 + \frac{p+5}{\sigma}\Big)^{\frac{(n+1)d}{2}} \frac{1}{\{(n+1)d\}!} \quad (\text{Prop. } 2.7)$$

よって $\sum_{n=n_0+1}^{\infty} I_n^p(\sigma,t) \leqq \frac{C_3}{\sqrt{\sigma}} \exp\left(-\frac{p^2}{4\sigma}\overset{(\varepsilon_0^2)}{} + C_4\sqrt{\frac{p+5}{\sigma}}\right)$ 後は p に関して和をとって (i) を得る。最後に (vi) を示そう。そのためには $n \leqq n_0$ に対して

$$\int_{M_0^{n+1}\times X_n\times\mathbb{R}} \exp\left[-\frac{z_0}{4}E_{\mathcal{U}}((x_i)) + \sqrt{-1}\,y\left(t-\frac{E_{\mathcal{U}}((x_i))}{4}\right) - \sigma\left(y-\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right)^2\right]\left(1-\varphi\left(\frac{E_{\mathcal{U}}((x_i))}{4}\right)\right)P_n^{k+}((x_i);\mathcal{U};z_0+\sqrt{-1}y) \bigotimes_{i=0}^{n}\nu_g(x_i)\otimes\mu_n(\mathcal{U})\otimes dy$$

が $O(1/\sqrt{\sigma})$ であることを示せば十分である。しかし $\frac{E_{\mathcal{U}}((x_i))}{4}$ が t に十分近いとき、$1-\varphi\left(\frac{E_{\mathcal{U}}((x_i))}{4}\right)=0$ になるから被積分函数の support 内では $\left|t-\frac{E_{\mathcal{U}}((x_i))}{4}\right| \geqq {}^{\exists}t_0 > 0$ であるから (3.8) を用いることができる。(lemma の証明終り).

したがって定理の証明のためには、$J_n(z) := (-1)^n \int_{M_0^{n+1}\times X_{n+1}} \exp\left(-\frac{z}{4}E_{\mathcal{U}}((x_i))\right) \times P_n^{k+}((x_i);\mathcal{U};z)\,\varphi\left(\frac{E_{\mathcal{U}}((x_i))}{4}\right)\bigotimes_{i=0}^{n}\nu_g(x_i)\otimes\mu_n(\mathcal{U})$ と置くとき、(6.3)(vi) より

$\hat{\mathcal{Z}}(\sigma,t) = \sum_{n=0}^{n_0}\hat{J}_n(\sigma,t) + O(1/\sqrt{\sigma})$ であるから、$\hat{J}_n(\sigma,t)$ を調らべればよい。しかし $M_0^{n+1}\times X_n$ はコンパクトではないから $\varphi\left(\frac{E_{\mathcal{U}}}{4}\right)P_n^{k+}$ は一般には compact support を持たず、したがって stationary phase method を直接使うことはできない。再び J_n を compact support を持つ部分と z に関して有界な部分に分ける必要がある。これは次の補題によって実行することができる。

<u>Lemma (6.5)</u> $f: X_n \to \mathbb{R}$ を $f(u_0,\cdots,u_n) = \sum_{i=0}^{n}\frac{\alpha_i^2}{u_i}$ で定義する。

ここで $0\leqq i\leqq n-1$ に対しては $\alpha_i\in[\rho_0,\rho_1]$, $\alpha_n\in[0,\rho_1]$ であるとする。Φ : $\mathbb{R}$ 上の C^∞-函数で $[n\rho_0, n\rho_1]$ と disjoint な compact support を持つもの. $(k_i)_{0\leqq i\leqq n}$: $k_n\leqq d/2$ をみたす実数とする.
このとき、$\forall k\in\mathbb{N}$, $\exists C_k, D_k>0$ ($n,\rho_0,\rho_1,(k_i),\Phi$ にのみdependする)
s.t. $\forall\alpha_n\leqq D_k$ に対して

$$\left|\int_{X_n}\exp\left(-\frac{z}{4}f(U)\right)\Phi\left(\sqrt{f(U)}\right)u_0^{k_0}\cdots u_{n-1}^{k_{n-1}}u_n^{-k_n}\mu_n(U)\right|\leqq C_k\Big/\left(|z|^k\alpha_n^{d-2}\right)$$

証明) 以下 $C_1, C_2,\cdots$ と書けば $n,\rho_0,\rho_1,(k_i),\Phi$ にのみ depend する正数を表わすものとする。$\varepsilon>0$ に対して $\Omega_i^\varepsilon :=$
$\{U\in X_n \mid |\frac{\alpha_i}{u_i}-\frac{\alpha_{i+1}}{u_{i+1}}|>\varepsilon/2\}$ $i=0,\ldots,n-2$. $\Omega_{n-1}^\varepsilon := \{U\in X_n\mid$
$|\frac{\alpha_i}{u_i}-\frac{\alpha_{i+1}}{u_{i+1}}|<\varepsilon$ $i=0,1,\ldots,n-2\}$ と定義する。このとき $(C_i)_{1\leqq i\leqq 5}$
で、$\varepsilon\leqq C_1$, $\alpha_n\leqq C_2$, かつ $U\in A:=\Omega_{n-1}^\varepsilon\cap\mathrm{supp}(\Phi\circ\sqrt{f})$ に対して

(6.6) (i) $|\frac{\alpha_0}{u_0}-\frac{\alpha_n}{u_n}|\geqq \frac{C_3}{\alpha_n}$ or (ii) $u_n\geqq C_4$, $|\frac{\alpha_0}{u_0}-\frac{\alpha_n}{u_n}|\geqq C_5$

をみたす様なものをとることができる。X_n と $\Omega_0^{C_1},\ldots,\Omega_{n-1}^{C_1}\cap\{u_n>C_4/2\}$, $\Omega_{n-1}^{C_1}\cap\{u_n<C_4\}$ で与えられる開被覆に付随する 1 の分割 $\varphi_0,\ldots,\varphi_n$ を α_i ($i=0,\ldots,n-1$) に連続的に依存する様にとる。
g を上の積分の被積分函数とし、$K_i := \int_{X_n} g\varphi_i\mu_n$ とおく。このとき
K_i ($0\leqq i\leqq n-2$) に対する評価 : X_n を $u_0,\ldots u_i, u_{i+2},\ldots u_n$ で径数づければ $|\frac{\partial f}{\partial u_i}| = |-\frac{\alpha_i^2}{u_i^2}+\frac{\alpha_{i+1}^2}{u_{i+1}^2}|\geqq \varepsilon\rho_0$. K_i の累次積分で u_i についての部分積分を K 回繰り返せば

$$|K_i|\leqq \frac{C_K}{|z|^K}\int_0^\infty \exp(-x^2)\,\alpha_n^{2-d}\,x^{d-3}\,dx \leqq C_K\big/|z|^K\alpha_n^{d-2}$$

を得る。K_{n-1}, K_n の場合 には X_n を $u_0, \cdots, u_{n-1}$ によって径数づける。K_{n-1} に対しては $u_n \geqq C_4$ 故 (6.6) より $\left|\frac{\partial f}{\partial u_0}\right| = \left|\frac{\alpha_n}{u_n}+\frac{\alpha_0}{u_0}\right|\left|\frac{\alpha_n}{u_n}-\frac{\alpha_0}{u_0}\right| \geqq C_5 \rho_0$，$K_n$ に対しては $\left|\frac{\partial f}{\partial u_0}\right| \geqq \frac{c_3}{u_n} \geqq C_3$ より同じ方法が適用できる。(lemma の証明終り)

Lemma (6.7). n_0 は (6.3) で決まった自然数とする。$\forall n \leqq n_0$ に対して $\exists \psi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞ 函数で compact support を持ち、0 の近傍で 1 に等しいもの s.t.

$$K_n(z) := \int_{M_0^{n+1}\times X_n} \exp\left(-\frac{z}{4}E_U((x_i))\right) P_n^{k+}((x_i), U; z)\, \varphi\left(\frac{E_U((x_i))}{4}\right)\psi_n(\overline{x_n x_0}) \bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i) \otimes \mu_n(U)$$

は $z \to \infty$ のとき有界である。更に E_U の critical points $((x_i))$ に対しては $\psi_n(\overline{x_n x_0}) = 0$ が成立する。

証明). $\alpha_i = \overline{x_i x_{i+1}}$, $f(U) = E_U((x_i))$, $\Phi(s) = \varphi\left(\frac{s^2}{4}\right)$ として lemma (6.5) を適用する。lemma (6.3) の (ii), (v) および (2.5) から (6.5) の仮定はみたされている。E_U の critical point では $\frac{\alpha_0}{u_0} = \cdots = \frac{\alpha_n}{u_n}$ が成立しながら (6.6) より $\alpha_n \leqq C_2$ に対しては $\varphi \circ \frac{\tilde{E}}{4}$ の support 内にはいる $\tilde{E}$ の critical point は存在しない。そこで $K = \frac{(n+1)}{2}d$ ととり，ψ_n を $\operatorname{supp}\psi_n \subset]-\infty, \inf(C_2, D_K)]$ となる様にとれば lemma (6.5) より P_n^{k+} の z の最大巾 $= z^{\frac{(n+1)}{2}d}$ 故

$$|K_n(z)| \leqq C_K \int_{M_0^{n+1}} \overline{x_n x_0}^{\,2-d} \bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i)$$

これは normal coord. を用いて計算すれば容易に絶対収束することがわかる

(lemmaの証明終り)

したがって lemma(3.5) より $\hat{K}_n(\sigma,t) = O(1/\sigma)$ を得る。

以上の準備の下に定理を証明することができる。

(I)の証明. $t \notin \{\frac{L^2}{4} \mid L \in \mathcal{L}\}$ とする。$\varphi_n = \frac{\varphi_0 \hat{E}}{4}(1-\psi_n)P_n^{k+}$,

$$L_n(z) = \int_{M_0^{n+1}\times X_n} \exp\left(-\frac{z}{4}\hat{E}((x_i);U)\right)\varphi_n((x_i),U;z)\bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i)\otimes\mu_n(U) \quad (n=0,\cdots,n_0)$$

と定義すれば、$J_n(z) = (-1)^n\{K_n(z)+L_n(z)\}$ である。φ_n は compact support を持ち、φ_n の support 内には $\hat{E}$ の critical point は存在しない。よって定理5.1(i) と (3.5) から $\hat{L}_n(\sigma,t) = O(1/\sigma)$ を得る。これと (6.3), (6.6) から (I) が出る。

(II)の証明 f_m^2 の存在は明らかで、例えば $Z(z)\exp(z\frac{L_m^2}{4})$ ととればよい。そこで L_m が (ND) であるとする。E の critical value L_m^2 の critical points の set $= \bigcup_\lambda W_\lambda$ (W_λ: 非退化 critical submanifolds). $\{\varphi_\lambda\}$ を $M_0^{n+1}\times X_n$ 上の1の分割で、$h^{-1}(X_n\times W_\lambda)$ の近傍では φ_λ は 1 に等しいものとする。ここに h は Prop(1.2) で定義されたもの。この場合も問題となるのは $L_n(z)$ で

$$L_n(z) = \sum_{\lambda=1}^{\Lambda}\int_{M_0^{n+1}\times X_n}\exp\left(-\frac{z}{4}E_U((x_i))\right)P_n^{k+}((x_i);U;z)\varphi\left(\frac{E_U((x_i))}{4}\right)(1-\psi_n(\overline{x_n x_0}))\varphi_\lambda((x_i);U)\bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i)\otimes\mu_n(U)$$

(I) と異なるのは $\varphi_n\varphi_\lambda$ の support 内に $\hat{E}$ の critical points が現われる点である。これら critical points は次元 $n_\lambda+n+1$ ($L_m=0$ の時は $d+n$), index j_λ の非退化 compact critical submfd. をなすから定理5.1 (ii) を $N=(n+1)d+n$ として適用することが

できる。よって $\mathrm{Im}\, z>0$ であれば

$$L_n(z)=\sum_\lambda\sum_{s=0}^{(n+1)d/2}\int_{M_0^{n+1}\times X_n} z^s \exp\left(-\frac{z}{4}\hat{E}\right)\left(\varphi_0\frac{\hat{E}}{4}\right)(1-\psi_n)\varphi_\lambda P_{n,s}^k \bigotimes_{i=0}^{n} v_g(x_i)\otimes\mu_n(U)$$

$$=\sum_\lambda\sum_s z^s\left(\frac{2\pi}{z}\right)^{\frac{(n+1)d-(n\lambda+1)}{2}}\exp\left(\sqrt{-1}\,f_\lambda\frac{\pi}{2}-z\frac{L_n^2}{4}\right)\left(\sum_{k=0}^{K}a_{k,\lambda}^{(n)}z^{-k}+z^{-K}r_{K,\lambda}^{(n)}(z)\right)$$

$$=\sum_{\lambda=1}^{\Lambda}\exp\left(\sqrt{-1}\,f_\lambda\frac{\pi}{2}\right)\exp\left(-z\frac{L_n^2}{4}\right)(2\pi)^{\frac{(n+1)d-(n\lambda+1)}{2}}\left\{a_{0,\lambda}^{(n)}z^{\frac{n\lambda+1}{2}}+\cdots+z^{\frac{1}{2}}+\underbrace{z\text{の負巾}}\right\}$$

ここで $a_{0,\lambda}^{(n)}$ は定理5.1(ii)から決まり，$s=\frac{(n+1)d}{2}$ の場合であるから
その符号は $P^k_{n,\frac{(n+1)d}{2}}$ の係数 $\left(\frac{-1}{4\pi}\right)^{\frac{(n+1)d}{2}}U_{-1}(x_0x_1)\cdots U_{-1}(x_{n-1}x_n)U_0(x_nx_0)$
の符号 $(-1)^n$ ($\rho_0<\overline{x_ix_{i+1}}<\rho_1,\ i=0,\cdots,n-1,\ \overline{x_nx_0}<\rho_1$) によって与えられる。
後は $\hat{L}_n(\sigma,t)$, $\hat{J}_n(\sigma,t)$ を n について 0 から n_0 まで加えればよい。

§7 補足．[4] では定理5.1の応用として，

<u>Theorem 7.1</u> (M^d,g) compact C^∞-riemann 多様体．$L\in\mathcal{L}-\{0\}$.
このとき次の2条件は同値である。

(i) L : (ND) で定理5.1で決定された函数 $f_L^d(z)$ が $z\to\infty$ のとき
$z^{d-1/2}$ の order を持つ．

(ii) すべての長さ L の測地線が periodic (ただしその周期は L より
小さいこともある)．

また (P_1) をみたす (M,g) への応用が与えられている．
更に定理5.1の拡張として，(M,g) 上 isometry T が与えられた
とき．$t_\lambda :=$ trace of the action of T on $\{f;\ \Delta f=\lambda f\}$ とするとき．
$\sum_\lambda t_\lambda \exp(-\lambda/z)$ の漸近展開が与えられている。

このときは isometry-invariant な測地線の長さ, index が関係してくる。

また $x, y \in M$ に対して $E(x, y; 1/2)$ を与える公式, forms に対する Laplacian の固有値に関する公式も与えられている。

文献

[1] Berger-Gauduchon-Mazet ; Le spectre d'une variété riemanniene, Springer. Lecture Notes in Math 194.

[2] Chazarain. J ; Formula de Poisson pour les variétés riemanniennes, Inventiones Math. 24('74). 65-82

[3]. Colin de Verdiere, Y ; Spectre du Laplacien et longueurs des gédésique periodiques II ; Compositio Math. 27('73). 159-184

[4] Duistermaat, J. J - Guillemin, V. W ; The spectrum of positive elliptic operators and periodic geodesics. (to appear)

[5] Minakshisundaram - Pleijel ; Some properties of the eigen-functions of the Laplace operator on Riemannian manifolds; Can. J. Math. 1. ('49) 242-256

[6] Молчанов, С, А ; ДИФФУЗИОННЫЕ ПРОЦЕССЫ И РИМАНОВА ГЕОМЕТРИЯ, УСПЕХИ МАТ. НАУК. ('75).