

## Hamiltonian Systems

京大 教養 今西英登

古典力学は、Lagrange の方程式から出発して、Hamilton の正準方程式、 $\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i}$ ,  $\frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$  の形で定式化される。E. Cartan による微分形式の理論は、多様体上の微分解析を、座標によらない intrinsic な形で行うことを可能にし、Hamilton 系も大域的に定義できることとなった。ここでは古典理論との関連に、[4]に従って、注意しながら、大域的定式化により、Hamilton 系の、力学系としての特徴が明らかになる様相を述べてみたい。局所理論と関連づけるため、大域的 formula には、なるべく、局所表示も書くことにした。(証明に局所表示を用いることもある。より徹底した大域理論は [1], [2].)

本稿の構成は、次のようになっている。

- §1. 接ベクトル空間と共変接ベクトル空間
- §2. 共変接ベクトル空間上の基本1形式  $\theta$  と2形式  $\Omega$ .
- §3. Symplectic 多様体と Hamilton ベクトル場

- § 4. 力学の保存則と対称性.
- § 5. 力学系としての Hamilton 系の特徴
- § 6. 時間を含む Hamilton 系と正準変換
- § 7. Legendre 変換.

Appendix: 線形代数, 微分形式論からの準備.

§ 7 は筆者が解析力学を学んだ時, 解りにくかったので, 他の人もそうだろうという老婆心から書いたもので, 本稿の本筋からは余分なことである.

なお考える多様体, 写像, ベクトル場は全て  $C^\infty$  級とする.

### § 1. 接ベクトル空間と共変接ベクトル空間

力学の舞台である, 位置・速度-相空間は, 自然に多様体の接ベクトル空間と考えられる. 他方, 位置・運動量-相空間は, 座標変換に対して, 運動量成分が共変ベクトル成分として変換されるので, 多様体の共変接ベクトル空間と考えられる.

1.1  $M$  は  $n$  次元多様体,  $x \in M$  での接ベクトル空間を  $T_x M$  とする.  $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$  を  $M$  の接ベクトル空間と言う.  $\pi: TM \rightarrow M$  が,  $\pi(\xi) = x$  for  $\xi \in T_x M$ , として定まる.  $(U, \alpha)$ ,  $\alpha(x) = (x^1(x), \dots, x^n(x))$  を  $M$  の局所座標とする.  $(\pi^{-1}(U), T\alpha)$  を  $\xi \in \pi^{-1}(U)$  に対し,  $T\alpha(\xi) = (\xi^1(\xi), \dots, \xi^n(\xi), \dot{\xi}^1(\xi), \dots, \dot{\xi}^n(\xi)) \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\xi^i(\xi) = x^i(\pi(\xi))$ ,  $\xi = \sum \dot{\xi}^i(\xi) \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_{\pi(\xi)}$  で定義すると,  $TM$  は  $(\pi^{-1}(U), T\alpha)$  を局所

座標とする  $2n$  次元多様体となる。

1.2  $T_x^*M$  を  $T_xM$  の双対空間とする。  $T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M$  を  $M$  の共変接ベクトル空間と言う。  $\pi: T^*M \rightarrow M$  が (4.1) と同様に定義される。  $(\pi^{-1}(U), T^*\alpha)$  を  $T^*\alpha(\ell) = (q_1(\ell) \cdots q_n(\ell), p_1(\ell) \cdots p_n(\ell))$ ,  $q_i(\ell) = x^i(\pi(\ell))$ ,  $\ell = \sum p_i(\ell) (dx^i)_{\pi(\ell)}$  で定義すると、  $T^*M$  も  $2n$  次元多様体となる。

$TM$  と  $T^*M$  は微分同相ではあるが自然な同相写像はない。

(1). 力学系の運動エネルギーが速度成分の二次形式の場合は、(1.4) で定義される  $\mathcal{L}_g$  が古典的な Legendre 変換である (97)。

1.3  $M$  の Riemann 計量  $g$  とは、各  $T_xM$  に内積  $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$  を定めることを言う。  $(U, \alpha)$  では  $T\alpha(\xi_i) = (\xi^1 \cdots \xi^n, \xi^1 \cdots \xi^n)$   $i=1, 2$ , に対し、  
 $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_g = \sum_{i,j} g_{ij}(x) \xi_i^1 \xi_j^2$ ,  $x = \pi(\xi_i)$  で、  $(g_{ij}(x))$  は  $U$  で微分可能な正定値対称行列となる。  $\|\xi\|^2 = \langle \xi, \xi \rangle_g$  とおく。

1.4 Riemann 計量  $g$  により、  $\mathcal{L}_g: TM \rightarrow T^*M$  が  $\mathcal{L}_g(\xi)(\ell) = \langle \xi, \ell \rangle_g$ ,  $\xi, \ell \in T_xM$  として定まる。  $\mathcal{L}_g$  は微分同相で  $\pi \circ \mathcal{L}_g = \pi$  である。 局所的には、  $\mathcal{L}_g(\xi^1 \cdots \xi^n, \xi^1 \cdots \xi^n) = (q_1, \cdots, q_n, \sum_j g_{1j} \xi_j^1, \cdots, \sum_j g_{nj} \xi_j^n)$  と表わされる。

1.5  $T_x^*M$  の内積を  $\langle l_1, l_2 \rangle_g = \langle \mathcal{L}_g^{-1}(l_1), \mathcal{L}_g^{-1}(l_2) \rangle$  で定義する。  
 $T_x^*M \ni l$  のノルムを  $\|l\|^2 = \langle l, l \rangle_g$  と定める。

1.6.  $g_i$  を  $M_i$  の Riemann 計量 ( $i=1, 2$ )。  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  を微分同相とする。  $\varphi$  が計量を保つば (即ち  $\langle T\varphi(\xi_1), T\varphi(\xi_2) \rangle_{g_2} = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle_{g_1}$ )

$T^*\varphi \cdot \mathcal{L}_{g_1} = \mathcal{L}_{g_2} \cdot T\varphi$  となる ( $T\varphi, T^*\varphi$  の定義は (A.3.7) (A.3.8)).

$M$  上のベクトル場から  $TM, T^*M$  上のベクトル場を以下のように定める. (1.9) の  $T^*X$  は Hamilton 場であり (2.6), 保存則との関連 (4.2) で重要である.

1.7  $X$  を  $M$  上のベクトル場,  $\{\varphi_t\}$  を解とする.  $\{T\varphi_t\}$  は  $TM$  上の flow であるが,  $\{T\varphi_t\}$  を生成する  $TM$  上のベクトル場を  $TX$  で表わす. 局所的には  $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  に対し,  $TX$  の方程式は,

$$\frac{d\delta^i}{dt} = X^i(\delta^1, \dots, \delta^n) \quad \dots (a) \quad \frac{d\delta^i}{dt} = \sum_j \frac{\partial X^i}{\partial x^j} \delta^j \quad \dots (b)$$

(b) を (a) の変分方程式と言う. ((a) の解の初期値に関する微分を (b) の解が表わす.) 明らかに  $T\pi(TX)_\xi = X_{\pi(\xi)}$  である.

1.8 特に  $X_x = 0$  の時 (b) は (a) の線形近似となっている. この時,  $X'_x(\xi) = \lim_{t \rightarrow 0} (T\varphi_t(\xi) - \xi)/t$  とおくと  $X'_x$  は  $T_x M$  の線形変換で,  $X'_x$  の固有値を,  $X$  の  $x$  での特性指数と言う.

1.9  $T^*M$  上でも同様に  $\{T^*\varphi_t\}$  がベクトル場  $T^*X$  を生成し,  $(T\pi)(T^*X)_\ell = X_{\pi(\ell)}$  となる.  $T^*X$  は局所的には

$$\frac{d\delta^i}{dt} = X^i(\delta^1, \dots, \delta^n) \quad \frac{dP_i}{dt} = -\sum_j \frac{\partial X^j}{\partial x^i} P_j \quad \text{と表わされる.}$$

§2. 共変接ベクトル空間上の基本1形式  $\theta$  と 2形式  $\Omega$ .

2.1  $T_x^*M \ni \ell, T_\ell(T^*M) \ni \xi$  に対し,

$T\pi(\xi) \in T_x M$  であり,  $\theta_\ell(\xi) = \ell(T\pi(\xi)) \in \mathbb{R}$

と定義すると,  $\theta_\ell$  は  $T_\ell(T^*M)$  上の

$$\begin{array}{ccc} \xi \in T(T^*M) & \xrightarrow{\pi} & T^*M \ni \ell \\ T\pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ TM & \xrightarrow{\pi} & M \ni x \end{array}$$

1次形式となり、 $l \mapsto \theta_l$  という対応は  $T^*M$  上の微分1形式を定める。これを  $\theta$  で表わし  $T^*M$  の基本1形式と言う。

2.2. 局所座標では、 $l = \sum p_j(l) (dx^j)_x$  とすると、 $T\pi \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right)_l = \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x$ 、 $T\pi \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \right)_l = 0$  より、 $\theta_l \left( \left( \frac{\partial}{\partial q^i} \right)_l \right) = l \left( \frac{\partial}{\partial x^i} \right)_x = p_i(l)$ 、 $\theta_l \left( \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \right)_l \right) = 0$ 。従って、 $\theta = \sum p_i dq^i$  と表わされる。

2.3. 定理 (i)  $T^*M_i$  ( $i=1,2$ ) 上の基本1形式を  $\theta_i$  とする。微分同相  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  に対し、 $(T^*\varphi)^* \theta_2 = \theta_1$  となる。

(ii)  $X$  を  $M$  上のベクトル場、 $\theta$  を  $T^*M$  の基本1形式とすると、 $L_{T^*X} \theta = 0$

証明 (i)  $\pi_i: T^*M_i \rightarrow M_i$  とする。  $\theta_i$  の定義と (A.3.8), (A.3.9) より  $\xi \in T_l(T^*M_1)$  に対し、 $((T^*\varphi)^* \theta_2)_l(\xi) = (\theta_2)_{T^*\varphi(l)}((T^*\varphi)_* \xi)$   
 $= (T^*\varphi(l)) (T\pi_2 \circ T(T^*\varphi) \xi) = (T^*\varphi(l)) (T(\pi_2 \circ T^*\varphi) \xi)$   
 $= (T^*\varphi(l)) (T(\varphi \circ \pi_1) \xi) = ((\varphi^{-1})^* l) (T\varphi \circ T\pi_1(\xi)) = l(T\pi_1(\xi)) = (\theta_1)_l(\xi)$ 。

(ii) は (i) と  $T^*X$  及び Lie 微分の定義 (A.3.11) より明らか。

2.4  $T^*M$  上の基本2形式  $\Omega$  を、 $\Omega = -d\theta$  で定義する。局所的には  $\Omega = \sum dq^i \wedge dp_i$  と表わされ、 $\Omega_l$  は  $T_l T^*M$  上の Symplectic 形式となる (A.2.2)。

2.5. 定理 (i)  $T^*M_i$  上の基本2形式を  $\Omega_i$ 、 $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  を微分同相とすると、 $(T^*\varphi)^* \Omega_2 = \Omega_1$ 。

(ii)  $X$  を  $M$  上のベクトル場とすると、 $L_{T^*X} \Omega = 0$ 。

証明は (2.3) と (A.3.10) より明らか。

2.6.  $M$  上のベクトル場  $X$  に対し,  $f_X: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  を  $f_X(\ell) = \theta_\ell((T^*X)\ell)$  で定義すると  $df_X = T^*X \lrcorner \Omega$  となる.  $f_X$  を  $X$  の momentum 関数と言う (§4 参照). 局所的には  $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $\ell = \sum p_i dx^i$  に対し,  $f_X(\ell) = \sum X^i(\pi(\ell)) p_i(\ell)$  と表わされる.

証明 (2.3) と (A.3.11) より,  $0 = L_{T^*X} \theta = T^*X \lrcorner d\theta + d(T^*X \lrcorner \theta)$   
 $= -T^*X \lrcorner \Omega + d(\theta(T^*X)).$

### §3. Symplectic 多様体と Hamilton ベクトル場.

$(T^*M, \Omega)$  の性質を抽象して Symplectic 多様体を定義し, その上で Hamilton ベクトル場という概念を考える.

3.1.  $N$  は  $2n$ -次元多様体.  $\Omega$  が  $N$  上の 2 形式で次の性質をもつ時,  $(N, \Omega)$  を Symplectic 多様体と言う.

(i)  $d\Omega = 0.$

(ii)  $\Omega_x$  は  $T_x N$  上の Symplectic 形式

3.2. Darboux の定理  $(N, \Omega)$  が Symplectic 多様体なら,  $\forall x \in N$  の局所座標  $(q^1(x), \dots, q^n(x), p^1(x), \dots, p^n(x))$  がとれて,  $\Omega_x = \sum (dq^i)_x \wedge (dp^i)_x$  と表わされる. (証明は [1], [2], [7] 参照).

この定理より,  $(N, \Omega)$  は局所的には,  $(T^*M, \Omega)$  と同じものであることが分る. 以下座標は常にこのようなものとする.

3.3. 定理 ベクトル場  $X$  に  $\omega_X = X \lrcorner \Omega$  を対応させると,  $N$  上のベクトル場と 1 形式が 1:1 に対応する.  $\omega$  に対応する,  $\omega$

クトル場を  $\omega_X$  で表わす.

証明は Symplectic 形式の定義で明らか. 局所座標では,  
 $X = \sum (A_i \frac{\partial}{\partial q^i} + B_i \frac{\partial}{\partial p^i})$  に対し,  $\omega_X = \sum (-B_i dq^i + A_i dp^i)$  ((A.2.1), (A.2.2)). 従って  $\omega = \sum (a_i dq^i + b_i dp^i)$  に対し,  $X_\omega = \sum (b_i \frac{\partial}{\partial q^i} - a_i \frac{\partial}{\partial p^i})$ .

3.4.  $N$  上の閉 1 形式  $\omega$  に対応する  $X_\omega$  を局所 Hamilton 場と言う. 特に  $N$  上の関数  $F$  に対し,  $X_{dF}$  を  $F$  を Hamiltonian とする Hamilton 場と言う. 局所的には  $dF = \sum (\frac{\partial F}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial F}{\partial p^i} dp^i)$  だから, (3.3) により  $X_{dF}$  に対応する微分方程式は,

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial p^i}, \quad \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial q^i} \quad i=1, 2, \dots, n$$

という, 古典的な正準方程式となる.

3.5. 定理  $X_\omega$  が局所 Hamilton 場  $\Leftrightarrow L_{X_\omega} \Omega = 0$ . 即ち  $X_\omega$  の解  $\{\varphi_t\}$  は  $\Omega$  を不変にする.

証明 (A.3.11) より,  $L_{X_\omega} \Omega = X_\omega \lrcorner d\Omega + d(X_\omega \lrcorner \Omega) = d\omega$ .

(3.5) は Hamilton 場の力学系としての特徴を調べるのに重要である (§5). 歴史的には Hamilton 場の第一積分を求めることが大きな問題であったが, 積分の性質を調べるのに,

Poisson bracket が有用である.

3.6.  $N$  上の関数  $F, G$  の Poisson bracket を  $\{F, G\} = \Omega(X_{dF}, X_{dG})$  で定義する. 局所的に  $X_{dF} = \sum (\frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i})$ ,  $X_{dG} = \sum (\dots)$  だから,  $\{F, G\} = \sum (\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p^i} - \frac{\partial F}{\partial p^i} \frac{\partial G}{\partial q^i})$  と表わせる (A.1.2).

3.7. 定理 (i)  $[X_{dF}, X_{dG}] = -X_{d\{F, G\}}$ .

(ii)  $\{F, G\} = X_{dG}F$ . 即ち  $\{F, G\}$  は  $X_{dG}$  に沿った  $F$  の変化.

証明 (ii) は局所表現より明らか. (i) は (ii) と (A.3.11), (3.5) より

$$\begin{aligned} [X_{dF}, X_{dG}] \lrcorner \Omega &= L_{X_{dF}}(X_{dG} \lrcorner \Omega) - X_{dG} \lrcorner (L_{X_{dF}} \Omega) \\ &= L_{X_{dF}}(dG) = d(L_{X_{dF}} G) = d(X_{dF} G) = -d\{F, G\}. \end{aligned}$$

3.8.系 (i)  $N$  上の Hamilton 場, 関数の集合は, それぞれ  $[, ], \{, \}$  により Lie algebra となる.

(ii)  $X_{dF}G = 0 \Leftrightarrow X_{dG}F = 0 \Leftrightarrow \{F, G\} = 0$ . 特に  $F$  は  $X_{dF}$  の積分となつてゐる (全エネルギーの保存則).

(iii)  $X_{dH}F = X_{dH}G = 0 \Rightarrow X_{dH}\{F, G\} = 0$ . 即ち,  $F, G$  が  $X_{dH}$  の積分なら,  $\{F, G\}$  もそうである.

証明 (i), (ii) は (3.7) より明らか. (iii) は Jacobi 律  $\{H, \{F, G\}\} + \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} = 0$  と (ii) により明らか.

#### §4. 力学の保存則と対称性.

ここでは, Hamilton 系のもつ対称性が, 保存則を生じることをもっと一般に定式化も可能だが ([1]参照), 古典的な場合について述べ, 簡単な例をあげる.

4.1 位置空間  $M$  に Riemann 計量が定義され, 運動エネルギーが  $\frac{1}{2}\|\dot{\gamma}\|^2$ ,  $\dot{\gamma} \in TM$  と表わされ, ポテンシャル  $V: M \rightarrow \mathbb{R}$  が存在する場合,  $T^*M$  上の Hamiltonian は  $H = K + \bar{V}$ ,  $K(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2}\|\dot{\gamma}\|^2$ ,  $\bar{V} = V \circ \pi$  となり  $X_{dH}$  が運動を記述する (7.7).

4.2. 定理  $Y$  を  $M$  上のベクトル場,  $\{\varphi_t\}$  を  $Y$  の解とする.  $\varphi_t$  が  $M$  の等長変換で,  $U$  を不変にするなら, momentum 関数  $f_Y$  は,  $X_{dH}$  の積分である.

証明 (2.6) により,  $T^*Y = X_{df_Y}$  である. 従って (3.8)(ii) より,  $T^*Y(H) = 0$  を示せば良い.  $\langle \varphi_t^*l, \varphi_t^*l \rangle_g = \langle l, l \rangle_g$  より,  $K(T^*\varphi_t(l)) = K(l)$ . 従って  $(T^*Y)K = 0$ . 又,  $(T^*Y)U = (d\pi^*U)(T^*Y) = dU(T\pi \cdot T^*Y) = dU(Y) = Y(U) = 0$ . 従って  $(T^*Y)H = 0$ .

4.3. 系  $M$  に  $k$  次元 Lie 群  $G$  が, 等長且つ  $U$ -不変に作用しているならば,  $X_{dH}$  の  $k$  個の積分が存在する.

証明 は,  $G$  の Lie 環の基は, (4.2) をみたす  $k$  個の  $M$  上のベクトル場を定めることから明らかである.

4.4. 中心力問題  $\mathbb{R}^3$  の中を質量  $m$  の質点か, 原点からの距離の関数であるポテンシャルの下で運動する時,  $M = \mathbb{R}^3 - \{0\} \ni (x, y, z)$ .

$TM = M \times \mathbb{R}^3 \ni \xi = (x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ ,  $T^*M = M \times (\mathbb{R}^3)^* \ni l = (p_x, p_y, p_z, p_x, p_y, p_z)$ .

Riemann 計量は,  $\|\xi\|^2 = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$  ととり,  $L_\xi(\xi) = l$  とする.

(1.4)(1.5) より,  $p_x = m\dot{x}$ ,  $p_y = m\dot{y}$ ,  $p_z = m\dot{z}$  となり,

更に  $\|l\|^2 = \frac{1}{m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$  となる. ポテンシャルは,  $U(x, y, z) =$

$U(r)$   $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$  であるから, Hamiltonian は  $H(l) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(\sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2})$ .  $M$  には, 3次元回転群  $SO(3)$  が等長,  $U$

不変に働く,  $Z = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $X = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $Y = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}$  は

(4.2) をみたし,  $f_Z = p_x p_y - p_y p_x$ ,  $f_X = p_y p_z - p_z p_y$ ,  $f_Y = p_z p_x - p_x p_z$

は  $X_{dH}$  の積分である (角運動量の保存則).  $x = (x, y, z)$ ,  $p = (p_x, p_y, p_z)$  とおくと, 上の3つの式は  $x \times p = c = \text{定ベクトル}$  を表わし,  $x$  と  $p$  は ( $c \neq 0$  なら) 定平面を張る. 特に,  $x$  は定平面上を運動することが分る. 上の3つの積分に, エネルギー積分  $H$  を考えると, 問題は2次元曲面上の微分方程式に帰着される.

4.5. n体問題.  $\mathbb{R}^3$  の  $n$  を質量  $m_1, m_2, \dots, m_n$  の質点があり, 相互の距離の関数  $V$  であるポテンシャルの下で運動する時,  $M = \mathbb{R}^3 - \Delta \ni a = (a^1, \dots, a^n)$ ,  $a^i = (x^i, y^i, z^i)$ ,  $\Delta = \{a \mid a^i = a^j \text{ } i \neq j\}$ ,  $TM = M \times (\mathbb{R}^3)^n \ni (a, \dot{a}) = (a^1, \dots, a^n, \dot{a}^1, \dots, \dot{a}^n)$   $\dot{a}^i = (x^i, y^i, z^i)$  で表わす.  $T^*M$  についても (4.4) と同様. Riemann 計量は,  $\|(a, \dot{a})\|^2 = \sum m_i \|\dot{a}^i\|^2 = \sum m_i \{(x^i)^2 + (y^i)^2 + (z^i)^2\}$ . ポテンシャルは,  $V(a) = P(\|a_i - a_j\|_{i < j})$  という形である.  $M$  には3次元 Euclid 運動群が  $g \cdot a = (g \cdot a^1, \dots, g \cdot a^n)$  として等長  $\cdot V$ -不変に働く. 従って6個の積分が存在する. 具体的には  $X_x = \sum \frac{\partial}{\partial x^i}$ ,  $X_y = \sum \frac{\partial}{\partial y^i}$ ,  $X_z = \sum \frac{\partial}{\partial z^i}$ ,  $Y_x = \sum (y_i \frac{\partial}{\partial z^i} - z_i \frac{\partial}{\partial y^i})$ ,  $Y_y = \sum (z_i \frac{\partial}{\partial x^i} - x_i \frac{\partial}{\partial z^i})$ ,  $Y_z = \sum (x_i \frac{\partial}{\partial y^i} - y_i \frac{\partial}{\partial x^i})$  の momentum 関数  $\sum p_{x^i}$ ,  $\sum p_{y^i}$ ,  $\sum p_{z^i}$  (線運動量),  $\sum (y_i p_{z^i} - z_i p_{y^i})$ ,  $\sum (z_i p_{x^i} - x_i p_{z^i})$ ,  $\sum (x_i p_{y^i} - y_i p_{x^i})$  (角運動量) が保存される. この他に  $p_{x^i} = m_i \dot{x}^i$  ... という関係と  $\sum p_{x^i} = \text{const}$  から, 重心の等速直線運動 という一種の保存則が従うが.  $\sum m_i x^i$

これは運動方程式が Galilei 群により不変であることの反映

である。

### §5. 力学系としての Hamilton 系の特徴.

Hamilton 系の力学系としての特徴は全て flow が Symplectic 形式を保つこと (3.5) から導かれる。ここでそのいくつかの帰結を述べる。この節では  $(M, \Omega)$  は  $2n$ 次元 Symplectic 多様体、 $H$  は Hamiltonian で  $\{q_t\}$  を  $X = X_{dH}$  の解とする。

5.1. 定理  $\omega_0 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} / n! \cdot \underbrace{\Omega \wedge \dots \wedge \Omega}_n$  は  $N$  上の体積要素であるが、 $\{q_t\}$  はこの体積を保つ。即ち  $N \supset A$  に対し  $\int_A \omega_0 = \int_{q_t(A)} \omega_0$ 。  
 $\omega_0$  は局所的には  $dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n \wedge dp^1 \wedge \dots \wedge dp^n$  と表わされる。

証明は (3.5) と (A.3.11) より明らか。

5.2. 定理  $X$  の  $k$  個の積分  $F_1, \dots, F_k$  は  $F: N \rightarrow \mathbb{R}^k$  を定めるが、 $\mathbb{R}^k \ni c$  が  $F$  の regular value, 即ち  $(dF_i)_x, \dots, (dF_k)_x$  が  $\forall x \in \Sigma_c = F^{-1}(c)$  で一次独立, なら  $\Sigma_c$  は  $(2n-k)$ 次元多様体となるが、 $\Sigma_c$  上に体積要素  $\omega_c$  が存在して、 $X|_{\Sigma_c}$  は  $\omega_c$  を不変にする。

証明  $\Sigma_c$  の近傍で  $dF_1, \dots, dF_k$  は一次独立だから、 $dF_1 \wedge \dots \wedge dF_k \wedge \omega = \omega_0$  とする  $(2n-k)$ -形式  $\omega$  が存在する。 $L_X dF_i = 0$  より、 $dF_1 \wedge \dots \wedge dF_k \wedge L_X \omega = L_X \omega_0 = 0$ 。従って  $L_X \omega$  は  $dF_1, \dots, dF_k$  で生成される ideal に入っている。 $\omega$  を  $\Sigma_c$  に制限したものを  $\omega_c$  とおけば  $\Sigma_c$  上では  $L_X \omega_c = 0$  となる。

次の系は、古典的には Jacobi の最終乗積の理論である。

5.3 系 (i)  $\Sigma_c$  上の体積要素  $\omega_c, \omega_c'$  が (5.2) をみたすとする.  $\omega_c' = f\omega_c$  と表わせるが. この時  $f$  は  $X \lrcorner \Sigma_c$  の積分である.

(ii)  $\Sigma_c$  が 2 次元曲面の時.  $X \lrcorner \omega_c$  は閉 1 形式で局所的には  $X \lrcorner \omega_c = dG$  と表わされるが.  $G$  も局所的に  $X \lrcorner \Sigma_c$  の積分であり. 元の方程式は局所的に解ける.

証明 (iii)  $\Sigma_c$  上で.  $0 = L_X \omega_c = d(X \lrcorner \omega_c)$ . 従って  $X \lrcorner \omega_c = dG$ .

$X(G) = X \lrcorner dG = X \lrcorner (X \lrcorner \omega_c) = 0$  より  $G$  は  $X \lrcorner \Sigma_c$  の積分.

(ii)  $0 = L_X(f\omega_c) = L_X f \cdot \omega_c + f \cdot L_X \omega_c = X(f) \cdot \omega_c = 0$  より  $X(f) = 0$ .

5.4. Poincaré の回り帰定理 (5.2) で更に  $\int_{\Sigma_c} \omega_c$  は有限.  $X \lrcorner \Sigma_c$  の任意の解は  $-\infty < t < \infty$  で定義されているとする. この時  $t \in \mathbb{R}$  に対し.  $\Sigma_c$  の測度 0 の集合以外の点  $P$  で  $P = \lim_{n_i \rightarrow \infty} \varphi_{n_i} P$  となる数列  $\{n_i\}$  がとれる. 特に  $\varphi_t$  の non-wandering set は  $\Sigma_c$  である.

証明 は例えば [6] §37 参照.

5.5.  $X$  の特異点の特性指数は.  $\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$  が同じ重複度で現われる. 特に純虚数が重複度 1 で現われれば.  $H$  を少し変えても同じことが言える.

証明  $x$  を特異点とする.  $\xi, \eta \in T_x N$  に対し (3.5) より.

$\Omega_x(T\varphi_t \xi, T\varphi_t \eta) = \Omega_x(\xi, \eta) \therefore 0 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (\Omega_x(T\varphi_t \xi, T\varphi_t \eta) - \Omega_x(\xi, \eta))$   
 $= \Omega_x(X'_x \xi, \eta) + \Omega_x(\xi, X'_x \eta)$  より  $X'_x$  は無限小 Symplectic 変換となり. (A.2.4) により (5.5) が言える.

5.6  $\gamma$  を  $X$  の閉軌道.  $x \in \gamma$  での Poincaré map を  $\mathcal{P}$  とする.

$(T\mathcal{O})_x$  の固有値は、1 が奇数の重複度で、 $\lambda, \lambda, 1/\lambda, 1/\lambda$  が同じ重複度で現われる。

証明  $\Sigma$  を  $\mathcal{O}$  を定義する  $\gamma$  の local section とする。  $(T\mathcal{O})_x \otimes 1: T_x \Sigma \otimes \mathbb{R} \rightarrow T_x \Sigma \otimes \mathbb{R}$  は  $(T\varphi_\tau)_x: T_x N \rightarrow T_x N$  ( $\tau$  は  $\gamma$  の周期) と共役で、 $(T\varphi_\tau)_x$  は Symplectic 変換だから (A.2.3) より (5.6) が言える。

### §6 時間を含む Hamilton 系と正準変換

正準変換の理論は古典力学の頂点とも言えるのだが、generating function 等は全域的な定式化は難しい。ここでは (3.5) を Hamiltonian  $H$  が時間の関数でもある場合に拡張するための手段という立場でのみ扱うことにする。

6.1.  $(N, \Omega)$  は  $2n$ 次元 Symplectic 多様体。  $\pi: N \times \mathbb{R} \rightarrow N$  を射影  $\omega = \pi^* \Omega$ ,  $t: N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を射影とする。  $H: N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  を Hamiltonian とする Hamilton 場  $\bar{X}$  とは  $N \times \mathbb{R}$  上のベクトル場で

$$(1) \bar{X}(t) \equiv 1, \quad (2) \bar{X} \lrcorner (\omega + dH \wedge dt) = 0$$

を満たすものを言う。

6.2. 上の (1), (2) は (1) と  $\bar{X} \lrcorner \omega = dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt$  と同値である。局所座標では  $\bar{X} = \sum (\frac{\partial H}{\partial p^i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p^i}) + \frac{\partial}{\partial t}$ , 微分方程式の形では

$$\frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^i}, \quad \frac{dp^i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^i} \quad \text{という形で表わされる。}$$

証明 (1), (2) より  $\bar{X} \lrcorner \omega = -(\bar{X} \lrcorner dH) \wedge dt + dH$ . 左  $\mathcal{O}$  の  $dt$  の係数 = 0 より  $\bar{X}(H) = \frac{\partial H}{\partial t} \therefore \bar{X} \lrcorner \omega = dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt$ . 局所表示は (3.3) に

よる。逆は局所表示より明らか。

6.3 系  $H_t(x) = H(x, t)$ ,  $N$ 上のベクトル場  $X_t$  を  $(X_t)_x = \bar{X}(x, t) - (\frac{\partial}{\partial t})_{(x, t)}$  と定義すると  $X_t = X_d H_t$ .

6.4 系  $\bar{X}(H) = \frac{\partial H}{\partial t}$  従って  $H$  が  $\bar{X}$  の積分  $\Leftrightarrow H$  は  $t$  に無関係.

6.5 定義 微分同相  $\bar{\varphi}: N \times \mathbb{R} \rightarrow N \times \mathbb{R}$  が正準変換とは.

(i)  $\bar{\varphi}$  は time preserving 即ち  $\bar{\varphi}(x, t) = (\varphi_t(x), t)$ ,  $\varphi_t: N \rightarrow N$

(ii)  $W_{\bar{\varphi}}: N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が存在して  $\bar{\varphi}^* \omega = \omega - dW_{\bar{\varphi}} \wedge dt$

6.6 定理  $\bar{\varphi}, \bar{\psi}$  が正準変換なら  $\bar{\varphi}^{-1}, \bar{\psi} \circ \bar{\varphi}$  も正準変換であり.

$$W_{\bar{\varphi}^{-1}} = -(\bar{\varphi}^{-1})^* W_{\bar{\varphi}}, \quad W_{\bar{\psi} \circ \bar{\varphi}} = \bar{\psi}^* W_{\bar{\varphi}} + W_{\bar{\psi}}$$

となる。特に正準変換の集合は群をなす。

証明は単なる計算である。

6.7 定理  $\bar{\varphi}$  が正準変換  $\bar{X}$  が Hamilton 場なら  $\bar{\varphi}^* \bar{X}$  も Hamilton 場で. Hamiltonian は  $H_{\bar{\varphi}^* \bar{X}} = W_{\bar{\varphi}} - \bar{\varphi}^* H_{\bar{X}}$  となる。

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad (\bar{\varphi}^* \bar{X}) \lrcorner (\omega - d(W_{\bar{\varphi}} - \bar{\varphi}^* H_{\bar{X}}) \wedge dt) &= (\bar{\varphi}^* \bar{X}) \lrcorner (\bar{\varphi}^* \omega + \bar{\varphi}^* (dH_{\bar{X}} \wedge dt)) \\ &= \bar{\varphi}^* (\bar{X} \lrcorner (\omega + dH_{\bar{X}} \wedge dt)) = 0. \end{aligned}$$

6.8 定理  $\bar{X}$  を Hamilton 場.  $\varphi_t(x)$  を  $t=0$  で  $(x, 0)$  を通る  $\bar{X}$  の解とする.  $\bar{\varphi}(x, t) = (\varphi_t(x), t)$  とおくと  $\bar{\varphi}_* (\frac{\partial}{\partial t})_{(x, t)} = \bar{X}_{(\varphi_t(x), t)}$  であるが.  $\bar{\varphi}$  は正準変換となる。即ち  $\bar{X}$  は正準変換により、自明なベクトル場  $\frac{\partial}{\partial t}$  にうつされる。

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad i_t: N \rightarrow N \times \mathbb{R} \text{ を } i_t(x) = (x, t) \text{ で定義すると. } (i_t)^* \bar{\varphi}^* \omega &= \varphi_t^* \Omega. \\ \frac{d}{ds} \varphi_s^* \Omega = \varphi_s^* L_{X_s} \Omega = 0 \text{ (3.5) より. } \Omega = \varphi_0^* \Omega = \varphi_t^* \Omega = i_t^* \bar{\varphi}^* \omega. \end{aligned}$$

従って  $\bar{\varphi}^*\omega = \omega - \theta \wedge dt$ ,  $\theta$  は 1 形式, と表わせる.  $(\frac{\partial}{\partial t}) \lrcorner \bar{\varphi}^*\omega$   
 $= \bar{\varphi}^*((\bar{\varphi}_* \frac{\partial}{\partial t}) \lrcorner \omega) = \bar{\varphi}^*(X \lrcorner \omega) = \bar{\varphi}^*(dH - \frac{\partial H}{\partial t} dt)$ . 他方,  $(\frac{\partial}{\partial t}) \lrcorner (\omega - \theta \wedge dt)$   
 $= \theta - \theta(\frac{\partial}{\partial t}) \cdot dt$  より,  $\theta = d\bar{\varphi}^*H$  とおけば,  $\bar{\varphi}^*\omega = \omega - d(\bar{\varphi}^*H) \wedge dt$   
 となり,  $\bar{\varphi}$  は 正準変換である.

6.9.系  $\varphi_t: N \rightarrow N$  は  $\varphi_t^*\Omega = \Omega$  をみたす. 従って §5 で述べた性質は, time dependent の場合も (修正すれば) なりたつ.

6.10.系  $\bar{\varphi}: N \times \mathbb{R} \rightarrow N \times \mathbb{R}$  が time preserving 微分同相,  $X$  は Hamilton 場とする, この時  $\bar{\varphi}$  が 正準変換  $\Leftrightarrow \bar{\varphi}_*X$  が Hamilton 場.

## §7 Legendre 変換.

ここでは Lagrange の方程式から Hamilton 場を導く. Lagrange の方程式を大域的に定式化するのは可能だが ([1], [2]) 面倒なので局所表示を用いることにする.

7.1. Lagrange の方程式は TM 上の関数  $L$  に対し,  $M$  上の 2 階の方程式  $\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i$ ,  $\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0$  と表わされる. これは変分問題の解として得られるから, 座標のとり方に依らない形をしている ([3] その他力学の本参照)

7.2. TM 上のベクトル場  $X$  が Lagrange の方程式をみたすとは  $X = \sum \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i} + \sum a^i \frac{\partial}{\partial \dot{q}^i}$  と表わした時, 関数  $Q^i$  が

$$\sum_j \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \dot{q}^j + \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} Q^j \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0 \quad i=1, 2, \dots, n$$

をみたすことである, 但し,  $\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}\right) \neq 0$  の時に限り  $Q^i$  は一

意的に定まる。以下この条件を仮定する。

7.3. Legendre 変換  $\mathcal{L}: TM \rightarrow T^*M$  を以下のように定義する。

$$\xi, \eta \in T_x M \text{ に対し } \mathcal{L}(\xi)(\eta) = D_\xi(L|_{T_x M})(\eta) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{L(\xi + t\eta) - L(\xi)}{t}$$

局所的には  $\mathcal{L}(\delta^1, \dots, \delta^n, \dot{\delta}^1, \dots, \dot{\delta}^n) = (\delta_1, \dots, \delta_n, p_1, \dots, p_n)$ ,  $\delta_i = \delta^i$ ,  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}^i}$  となる。

$\mathcal{L}$  は局所同相であるが、簡単のため以下  $\mathcal{L}$  は同相と仮定する。

7.4.  $TM$  上のエネルギー関数を  $E(\xi) = \mathcal{L}(\xi)(\xi) - L(\xi)$  と定義する。

$$E(\xi) = \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}^i} \right)_\xi \dot{\delta}^i(\xi) - L(\xi) = \sum p_i(\mathcal{L}(\xi)) \dot{\delta}^i(\xi) - L(\xi) \text{ となる。}$$

7.5.  $H = E \circ \mathcal{L}^{-1}: T^*M \rightarrow \mathbb{R}$  とすると  $\mathcal{L}_* X = X_{dH}$ . 即ち Lagrange

の方程式をみたすベクトル場は  $\mathcal{L}$  で Hamilton 場になる。

証明  $\xi = (\delta^1, \dots, \delta^n, \dot{\delta}^1, \dots, \dot{\delta}^n)$ ,  $\mathcal{L}(\xi) = \ell = (\delta_1, \dots, \delta_n, p_1, \dots, p_n)$  とすると  $\dot{\delta}^i = \dot{\delta}_i$

$p_i = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}^i} \right)_\xi$  である。(A.3.7) と  $E$  の定義より下の式を得る。

$$(1) \mathcal{L}_* \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\delta}^j} \right)_\xi = \sum_i \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\delta}^j \partial \dot{\delta}^i} \right)_\xi \left( \frac{\partial E}{\partial p_i} \right)_\ell + \left( \frac{\partial E}{\partial \delta_j} \right)_\ell$$

$$(2) \mathcal{L}_* \left( \frac{\partial E}{\partial \delta^j} \right)_\xi = \sum_i \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \delta^j \partial \delta^i} \right)_\xi \left( \frac{\partial E}{\partial p_i} \right)_\ell$$

$$(3) \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\delta}^j} \right)_\xi = \sum_i \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\delta}^j \partial \dot{\delta}^i} \right)_\xi \dot{\delta}^i - \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\delta}^j} \right)_\xi \quad (4) \left( \frac{\partial E}{\partial \delta^j} \right)_\xi = \sum_i \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \delta^j \partial \delta^i} \right)_\xi \dot{\delta}^i$$

$$(2) \text{より} \left( \frac{\partial E}{\partial \delta^j} \right)_\xi = \sum_i \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \delta^j \partial \delta^i} \right)_\xi \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)_\ell \quad \therefore (4) \text{より} \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)_\ell = \dot{\delta}^i(\xi)$$

$$(1) \text{より} \left( \frac{\partial E}{\partial \dot{\delta}^j} \right)_\xi = \sum_i \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\delta}^j \partial \dot{\delta}^i} \right)_\xi \left( \frac{\partial H}{\partial p_i} \right)_\ell + \left( \frac{\partial H}{\partial \delta_j} \right)_\ell = \sum_i \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\delta}^j \partial \dot{\delta}^i} \right)_\xi \dot{\delta}^i(\xi) + \left( \frac{\partial H}{\partial \delta_j} \right)_\ell$$

$$\therefore (3) \text{より} \left( \frac{\partial H}{\partial \delta_j} \right)_\ell = - \left( \frac{\partial L}{\partial \delta^j} \right)_\xi$$

$$\therefore \mathcal{L}_* \left( \sum_j \dot{\delta}^j \frac{\partial E}{\partial \dot{\delta}^j} \right)_\xi = \sum_{i,j} \dot{\delta}^j(\xi) \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{\delta}^j \partial \dot{\delta}^i} \right)_\xi \left( \frac{\partial E}{\partial p_i} \right)_\ell + \sum_j \left( \frac{\partial H}{\partial p_j} \right)_\ell \left( \frac{\partial E}{\partial \delta_j} \right)_\ell$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_* \left( \sum_j a^j \frac{\partial}{\partial q^j} \right)_z &= \sum_{i,j} a^j(z) \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial q^j} \right)_z \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \right)_z \\ &= \sum_i \left( \frac{\partial L}{\partial q^i} \right)_z \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \right)_z - \sum_{i,j} \left( \frac{\partial^2 L}{\partial q^i \partial q^j} \right)_z \dot{q}^j(z) \left( \frac{\partial}{\partial p_i} \right)_z \end{aligned}$$

$$\therefore \mathcal{L}_*(X_z) = \sum_j \left\{ \left( \frac{\partial H}{\partial p_j} \right)_z \left( \frac{\partial}{\partial q_j} \right)_z - \left( \frac{\partial H}{\partial q_j} \right)_z \left( \frac{\partial}{\partial p_j} \right)_z \right\}$$

7.6.  $T$  を運動エネルギー,  $V$  をポテンシャルとすると  $L = T - V$  ( $\bar{U} = U \circ \pi$ ) となることが力学で知られている. 多くの場合,  $T$  は速度成分の二次形式で表わされる. 即ち  $M$  上の Riemann 計量により,  $T(z) = \frac{1}{2} \|\dot{z}\|^2 = \sum g_{ij}(\pi(z)) \dot{q}^i(z) \dot{q}^j(z)$  となる.  $\det \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right) = \det(g_{ij})$  であるから,  $(g_{ij})$  が正定値  $T$  を与えても, 非退化であれば (この時,  $M$  上の pseudo-Riemann 計量と言う) Legendre 変換  $\mathcal{L}_g$  ( $\S 1$  で与えられたもの) により, Hamilton 場が定まる.

7.7. 上の場合,  $E(z) = \sum g_{ij}(\pi(z)) \dot{q}^i(z) \dot{q}^j(z) - (T(z) - V(\pi(z))) = T(z) + V(\pi(z))$  となり,  $E$  及び  $H = E \circ \mathcal{L}_g^{-1}$  は全エネルギーと一致する. 又,  $H(\ell) = \frac{1}{2} \|\ell\|^2 + V(\pi(\ell))$  である.

Appendix. 線形代数. 微分形式論からの準備.

A.1. 外積代数 ([5] による. 本により係数が異なっている)

A.1.1.  $V$  を  $m$  次元実線形空間,  $\Lambda^k(V) = \{ \omega: \overbrace{V \times \cdots \times V}^k \rightarrow \mathbb{R} \mid \omega \text{ は多重線形で反対称, 即ち } \omega(\dots v_i \dots v_j \dots) = -\omega(\dots v_j \dots v_i \dots) \}$  と定義する.  $\Lambda^k(V)$  は  $\binom{m}{k}$  次元線形空間である.  $\Lambda^0(V) \cong \mathbb{R}$  とおく.  $\Lambda^1(V)$

$= V^* = \{ \varphi: V \rightarrow \mathbb{R}: \text{線形} \}$  は  $V$  上の一次形式の空間で、これを  $V$  の双対空間と言う。又  $\wedge^k(V) = \{0\}$   $k < 0$  又は  $k > m$  とする。

A.1.2.  $\omega_1 \in \wedge^i(V)$ ,  $\omega_2 \in \wedge^j(V)$  の外積  $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \wedge^{i+j}(V)$  を  $v_k \in V$  とし

$$(\omega_1 \wedge \omega_2)(v_1, \dots, v_{i+j}) = \frac{1}{(i+j)!} \sum_{\sigma \in S_{i+j}} \omega_1(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(i)}) \cdot \omega_2(v_{\sigma(i+1)}, \dots, v_{\sigma(i+j)})$$

但し  $S_{i+j}$  は  $(i+j)$  次対称群で定義する。  $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{ij} \omega_2 \wedge \omega_1$ ,

$(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$  がなりたつ。  $\omega_1, \dots, \omega_k \in V^*$  の時

$$(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k)(v_1, \dots, v_k) = \det(\omega_i(v_j)) \text{ となる。}$$

A.1.3.  $v \in V$ ,  $\omega \in \wedge^p(V)$  に対し内部積  $v \lrcorner \omega \in \wedge^{p-1}(V)$  を

$$(v \lrcorner \omega)(v_1, \dots, v_{p-1}) = \omega(v, v_1, \dots, v_{p-1}) \text{ で定義する。 } \omega \in \wedge^p(V), \theta$$

$\in \wedge^q(V)$  に対し、  $v \lrcorner (\omega \wedge \theta) = (v \lrcorner \omega) \wedge \theta + (-1)^p \omega \wedge (v \lrcorner \theta)$  となる。

A.1.4. 線形写像  $f: V \rightarrow W$  に対し、  $f^*: \wedge^k(W) \rightarrow \wedge^k(V)$  が

$$(f^* \omega)(v_1, \dots, v_k) = \omega(f(v_1), \dots, f(v_k)) \text{ で定まる。明らかに } f^*(\omega_1 \wedge \omega_2)$$

$$= f^* \omega_1 \wedge f^* \omega_2, \quad f^*(f(v) \lrcorner \omega) = v \lrcorner f^* \omega \text{ である。 } g: W \rightarrow X \text{ が線}$$

形なす、  $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*: \wedge^k(X) \rightarrow \wedge^k(V)$  である。

A.1.5.  $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$  が  $V$  の基である時、  $e_i^* \in V^*$  を  $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$

で定義すると、  $\langle e_1^*, \dots, e_m^* \rangle$  は  $V^*$  の基となる。これを  $\langle e_1, \dots, e_m \rangle$

の双対基と言う。  $\{e_{i_1}^* \wedge \dots \wedge e_{i_k}^* \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\}$  は  $\wedge^k(V)$  の基と

なる。特に  $\{e_1^* \wedge e_2^* \wedge \dots \wedge e_m^*\}$  は  $\wedge^m(V) \cong \mathbb{R}$  の基である。

A.2.  $V$  上の Symplectic 形式 ([1] 参照)

A.2.1.  $\wedge^2(V) \ni \Omega$  に対し、  $\lrcorner \Omega: V \rightarrow V^*$  が、  $v, v' \in V$  として

$$(v \lrcorner \Omega)(v') = \Omega(v, v') \text{ として定まる。これが同型写像である}$$

時、 $\Omega$  を  $V$  上の Symplectic 形式と言う。Symplectic 形式が存在すれば、 $\dim V = 2n$  である。

A.2.2. Symplectic 形式  $\Omega$  は  $V$  の適当な基  $\{e_1, \dots, e_{2n}\}$  をとれば  $\Omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge e_{n+i}^*$  と表わされる。  $v = \sum_{i=1}^n (a_i e_i + b_i e_{i+n})$  に対し、 $v \lrcorner \Omega = \sum_{i=1}^n (-b_i e_i^* + a_i e_{i+n}^*)$  となる。又  $\Omega \wedge \dots \wedge \Omega = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n!$   $e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \wedge e_{n+1}^* \wedge \dots \wedge e_{2n}^*$  である。

A.2.3. 線形写像  $f: V \rightarrow V$  が  $f^* \Omega = \Omega$  を満たす時、 $f$  を Symplectic 変換と言う。この時  $f$  の固有値は  $\lambda, -\lambda, \bar{\lambda}, -\bar{\lambda}$  が同じ重複度で現れ、 $\pm 1$  の重複度は偶数である。

A.3. 多様体, ベクトル場, 微分形式. ([5], [7] その他)

A.3.1.  $M$  を  $n$  次元多様体、 $\{(U_\alpha, \alpha)\}$  を  $M$  の局所座標系とする。

即ち、 $M = \cup U_\alpha$ ,  $\alpha: U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$  は  $\mathbb{R}^n$  への同相写像で、 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$

なら  $\alpha \circ \beta^{-1}: \beta(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \subset \mathbb{R}^n$  は微分同相。  $\alpha(x) =$

$(x^1(x), \dots, x^n(x)) \in \mathbb{R}^n$  と表わした時、曲線  $c(t) = \alpha^{-1}(c^1(t), \dots, c^n(t), \dots, c^n(t))$

(但し、 $\alpha(x) = (c^1, \dots, c^n)$ ) の  $t=0$  での“接ベクトル”を  $(\frac{\partial}{\partial x^i})_x$  と表わす。

$x$  での“接ベクトル”の全体を  $T_x M$  で表わすと、 $T_x M$  は、

$\langle (\frac{\partial}{\partial x^1})_x, \dots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_x \rangle$  を基とする線形空間である。  $T_x M$  の双対空間を  $T_x^* M$  で表わす。

$\langle (\frac{\partial}{\partial x^1})_x, \dots, (\frac{\partial}{\partial x^n})_x \rangle$  の双対基を  $\langle (dx^1)_x, \dots, (dx^n)_x \rangle$  で表わす。

A.3.1. bis  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  が  $C^\infty$ -級とは、各  $(U_\alpha, \alpha)$  について  $f \circ \alpha^{-1}: \alpha(U_\alpha) \rightarrow \mathbb{R}$  が  $C^\infty$  級であることを言う。(  $M$  の部分集合で定義さ

れた関数についても同様)  $\left(\frac{\partial f \circ \alpha^{-1}}{\partial x^i}\right)_{\alpha(x)}$  を  $\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_x$  と略記する。

$M_1$  が  $n$  次元,  $M_2$  が  $m$  次元多様体の時. 写像  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  が  $C^\infty$ -級とは.  $y = \varphi(x)$  として.  $M_1$  の局所座標  $(U_1, \alpha_1)$ ,  $\alpha_1(x) = (x^1, \dots, x^n)$ ,  $M_2$  の局所座標  $(U_2, \alpha_2)$ ,  $\alpha_2(y) = (y^1, \dots, y^m)$  をとった時.  $\alpha_2 \circ \varphi \circ \alpha_1^{-1}: (x^1, \dots, x^n) \rightarrow (y^1, \dots, y^m)$  が  $C^\infty$ -級のことも言う. 更に  $\varphi$  が 1:1 onto の時  $\varphi$  を微分同相と言う. この時  $\varphi^{-1}$  も微分同相である.

A.3.2.  $X$  が  $M$  上のベクトル場であるとは.  $x \in M$  に対し.  $X_x \in T_x M$  が定まることを言う. 局所的に関数  $a^i: U_x \rightarrow \mathbb{R}$  により  $x \in U_x$  の時  $X_x = \sum_{i=1}^n a^i(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)_x$  と表わされるが.  $a^i$  は  $C^\infty$ -級とする.  $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  と略記することもある.

A.3.3.  $\{\varphi_t \mid \varphi_t: M \rightarrow M, t \in \mathbb{R}\}$  が  $X$  の生成する flow (又は簡単に  $X$  の解) とは. 曲線  $\{\varphi_t(x)\}$  の  $t=0$  での接ベクトルが  $X_x$  となっていることを言う. 局所的には  $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  の時.  $\alpha \circ \varphi_t(x)$  は. 微分方程式  $\frac{dx^i}{dt} = a^i(\alpha(x^1, \dots, x^n))$   $i=1, 2, \dots, n$ , の  $t=0$  で  $\alpha(x)$  となる解を表わしている. この意味でベクトル場と微分方程式を同一視することもある.  $\varphi_t$  は微分同相であり.  $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$ ,  $\varphi_t \circ \varphi_s = \varphi_{t+s}$  である. (なお  $\varphi_t(x)$  の存在する  $t$  の範囲が問題であるが. 簡単のため  $\varphi_t$  について存在するものとした. この点が問題になるのは. 本稿では. (5.4) だけである.)

A.3.4.  $X$  の解を  $\{\varphi_t\}$ ,  $f: M \rightarrow \mathbb{R}$  に対し.  $X(f)_x = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_t(x)) - f(x)}{t}$  として  $M$  上の関数  $X(f)$  を定義する. 局所的には.  $X = \sum a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$  に

$X(f)_x = \sum a_i(x) \left( \frac{\partial f}{\partial x^i} \right)_x$  である。  $F: M \rightarrow \mathbb{R}$  が  $X$  の (第一) 積分とは、 $X(F) = 0$ , 即ち  $F(\varphi_t(x)) = F(x)$ , 即ち、解  $\varphi_t(x)$  が "曲面"  $F = \text{const.}$  の上を動くことを言う。

A.3.5.  $\omega$  が  $M$  上の  $k$  (微分) 形式とは  $x \in M$  に  $\omega_x \in \Lambda^k(T_x M)$  が対応することを言う。局所的に  $\omega_x = \sum_{i_1 < \dots < i_k} a_{i_1 \dots i_k}(x) (dx^{i_1})_{x_1} \wedge \dots \wedge (dx^{i_k})_x$  と書けるが、 $a_{i_1 \dots i_k}$  は  $C^\infty$ -級とする。特に 0 形式は  $M$  上の  $C^\infty$  関数である。  $\forall x \in M$  で  $\omega_x \neq 0$  となる  $n$  形式を  $M$  上の体積要素と言う。  $M$  上の  $k$  形式の集合を  $\Lambda^k(M)$  で表わす。

$\omega_1 \in \Lambda^k(M)$ ,  $\omega_2 \in \Lambda^l(M)$  に対し  $\omega_1 \wedge \omega_2 \in \Lambda^{k+l}(M)$  が  $(\omega_1 \wedge \omega_2)_x = \omega_{1x} \wedge \omega_{2x}$ , ベクトル場  $X$ ,  $\omega \in \Lambda^k(M)$  に対し  $X \lrcorner \omega \in \Lambda^{k-1}(M)$  が、  
 $(X \lrcorner \omega)_x = X_x \lrcorner \omega_x$  として定まり、(A.1.2) (A.1.3) の性質をもつ。

A.3.6. 各  $k$  に対し  $\mathbb{R}$ -線形写像  $d: \Lambda^k(M) \rightarrow \Lambda^{k+1}(M)$  を、 $k=0$  に対しては  $(df)(X) = Xf$  で定め、 $d(\omega_1 \wedge \omega_2) = d\omega_1 \wedge \omega_2 + (-1)^k \omega_1 \wedge d\omega_2$  for  $\omega_1 \in \Lambda^k(M)$ , 及び  $d \circ d\omega = 0$  をみたすものとして帰納的に定義すれば  $d\omega$  は一意的に定まる。局所的には、 $df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$ ,  
 $d(\sum a_{i_1 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}) = \sum da_{i_1 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$  と表わされる。

$\Lambda^k(M)$  の  $\omega$  が閉  $k$  形式とは  $d\omega = 0$  となることを言う。この時、 $U_x$  に対し近傍  $V$  が存在して、 $\omega|_V = d\omega'$ ,  $\omega' \in \Lambda^{k-1}(V)$  となる。

A.3.7.  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  に対し、 $\varphi_*: T_x M_1 \rightarrow T_{\varphi(x)} M_2$  が自然に ( $M_1$  の曲線  $C$  の接ベクトルに  $M_2$  の曲線  $\varphi \circ C$  の接ベクトルを対応させて) 定義できる。  $\varphi_*$  は線形である。又  $\varphi^*: T_{\varphi(x)}^* M_2 \rightarrow T_x^* M_1$  が、

$\varphi^*(l)(\xi) = l(\varphi_*\xi)$ ,  $l \in T_{\varphi(x)}^*M_2$ ,  $\xi \in T_xM_1$ , として定義できる。局所的には  $(A, 3, 1, b_i)$  の記号で  $y^i = \varphi^i(x^1, \dots, x^n)$  と表わされた時

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)_x = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}\right)_x \left(\frac{\partial}{\partial y^i}\right)_\varphi, \quad \varphi_*(\sum a^j \frac{\partial}{\partial x^j}) = \sum_{i,j} (a^j \cdot \varphi^i) \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial y^i}$$

$$\varphi^*(dy^i)_\varphi = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}\right)_x (dx^j)_x, \quad \varphi^*(\sum b_i dy^i) = \sum (b_i \circ \varphi) \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j} dx^j$$

と表わされる。

$T\varphi: TM_1 \rightarrow TM_2$  が  $(T\varphi)(\xi) = \varphi_*\xi$  として定義でき  $\pi_2 \circ T\varphi = \varphi \circ \pi_1$  ( $\pi_i: TM_i \rightarrow M_i$ ) である。(TMの定義は(1.1)).

A.3.8 微分同相  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  に対し  $T^*\varphi: T^*M_1 \rightarrow T^*M_2$  が  $T^*\varphi(l) = (\varphi^{-1})^*l$  として定義でき  $\pi_2 \circ T^*\varphi = \varphi \circ \pi_1$  ( $\pi_i: T^*M_i \rightarrow M_i$ ) となる。又  $M_1$  上のベクトル場  $X$  に対し  $M_2$  上のベクトル場  $\varphi_*X$  が  $(\varphi_*X)_\varphi = \varphi_*X_x, \varphi = \varphi(x)$ , として定義できる。 $M_2$  上のベクトル場  $Y$  に対し  $\varphi^*Y = (\varphi^{-1})_*Y$  と定義する。

A.3.9  $M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3$  に対し  $T(\psi \circ \varphi) = (T\psi) \circ (T\varphi), T^*(\psi \circ \varphi) = T^*\psi \circ T^*\varphi, (\psi \circ \varphi)_*X = \psi_*(\varphi_*X), (\psi \circ \varphi)^*\omega = \varphi^*(\psi^*\omega)$  等が成り立つ。

A.3.10  $\varphi: M_1 \rightarrow M_2$  に対し  $\varphi^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = \varphi^*\omega_1 \wedge \varphi^*\omega_2, d(\varphi^*\omega) = \varphi^*(d\omega), \varphi^*(X \lrcorner \omega) = (\varphi^*X) \lrcorner \varphi^*\omega$  但し  $\varphi$  は微分同相, が成り立つ

A.3.11 ベクトル場  $X$  と  $\omega \in \Lambda^k(M)$  に対し Lie微分  $L_X \omega \in \Lambda^k(M)$  を  $L_X \omega = \lim_{t \rightarrow 0} (\varphi_t^* \omega - \omega)/t, \{\varphi_t\}$  は  $X$  の解, として定義する。 $f \in \Lambda^0(M)$  に対しては  $L_X f = Xf$  である。又ベクトル場  $X, Y$  の

Lie bracket  $[X, Y]$  を  $[X, Y] = L_X Y = \lim_{t \rightarrow 0} (\varphi_t^* Y - Y)/t$  とし  
て定義すると  $[X, Y]f = X(Yf) - Y(Xf)$  となる。

$$L_X(\omega_1 \wedge \omega_2) = L_X \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge L_X \omega_2, \quad dL_X \omega = L_X d\omega$$

$$L_X \omega = X \lrcorner (d\omega) + d(X \lrcorner \omega)$$

$$L_X(Y \lrcorner \omega) = [X, Y] \lrcorner \omega + Y \lrcorner (L_X \omega)$$

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \text{ (Jacobi 律)}$$

がなりたつ。

#### 参考文献

- [1] R. Abraham; *Foundations of Mechanics*. Benjamin 1967.
- [2] C. Godbillon; *Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique*. Hermann 1969.
- [3] C. Lanczos; *The Variational Principles of Mechanics*. Univ. of Toronto Press 1949.
- [4] Loomis-Sternberg; *Advanced Calculus*. Addison-Wesley 1968.
- [5] 松島 幸三; *多様体入門*. 裳華房 1965.
- [6] Siegel-Moser; *Lectures on Celestial Mechanics*. Springer 1971.
- [7] Sternberg; *Lectures on Differential Geometry*. Prentice Hall 1964 (吉岡書店より日本語版)