数理解析研究所講究録
第 254 巻 1975 年 41-62

微分可能な力学系の生成的性質について

名大 教養部 白岩謙一
池上宜弘

§0. 序. 微分可能な力学系の理論において，生成的性質の研究は最も重要であった．ここでは，現在までに知られている生成的性質について概観する．第一章では一般の力学系に関する生成的性質について，第二章では保存系に関する生成的性質について述べる．Baire空間の要素に関する性質Pが生成的であるとは，適当なBaire集合があって，その各要素に対してPが成立することである．

第一章. 一般の微分可能な力学系について.

§1. Kupka-Smale の定理.

MをC^∞多様体とする．$\mathcal{D}^r(M)$をM上のC^r級微分同相写像全体にWhitney位相を入れた空間とし，$\mathcal{X}^r(M)$をM上のC^r級ベクトル場全体にWhitney C^r位相を入れた空間とする．$\mathcal{D}^r(M)$, $\mathcal{X}^r(M)$は$1 \leqq r \leqq \infty$でBaire空間である．

xを$f\in\mathcal{D}^r(M)$の不動点とする．xが双曲型であるとは，$T_xf: T_x(M)\to T_x(M)$の固有値の絶対値が皆1とならないことである．fの周期点xが双曲型であるとは，xの基本周期をpとするときxはf^pの双曲型不動点であることである．xを$X\in\mathfrak{X}^r(M)$の特異点($X_x=0$)とする．$\exp(T_xX)$の固有値の絶対値が皆1とならないときxが双曲的であるという．γを周期τのXの閉軌道とするとき，γが双曲的であるとは，γ上の点xに於て，$T_x\varphi_\tau$の固有値の絶対値が軌道方向の固有値の他は1とならないことである．但し，φ_tはXに対応する流れとする．Xの特異点と閉軌道をXのcritical elementという．

$x\in M$を通るfの安定集合$W_f^s(x)$，不安定集合$W_f^u(x)$は次のように定義される．dを任意に与えたMの距離とするとき，

$$W_f^s(x)=\{y\in M\mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(x),\ f^n(y))=0\},$$
$$W_f^u(x)=\{y\in M\mid \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(x),f^{-n}(y))=0\}.$$

$X\in\mathfrak{X}^r(M)$に対する$W_X^s(x)$, $W_X^u(x)$は次のように定義される，

$$W_X^s(x)=\{y\in M\mid \lim_{t\to\infty} d(\varphi_t(x),\ \varphi_t(y))=0\},$$
$$W_X^u(x)=\{y\in M\mid \lim_{t\to\infty} d(\varphi_{-t}(x),\ \varphi_{-t}(y))=0\}.$$

ΛをMの部分集合とするとき，力学系f又はXに対するΛの安定・不安定集合は，$W^s(\Lambda)=\bigcup_{x\in\Lambda}W^s(x)$，$W^u(\Lambda)=\bigcup_{x\in\Lambda}W^u(x)$により定義される．

fの周期点xが双曲型ならば$W_f^s(x)$, $W_f^u(x)$はeuclidean space

を injective に C^r immerse した多様体で[3], X の critical element が双曲型ならば $W^s_X(\gamma)$, $W^u_X(\gamma)$ (x は $W^s_X(x)$, $W^u_X(x)$) は injective に C^r immerse された多様体である[30].

<u>定理</u> 1. (Kupka-Smale の定理). [5], [30], [15].

$r \geqq 1$ とするとき, $\mathcal{D}^r(M)$, $\mathfrak{X}^r(M)$ に於ける次の性質は生成的である. (M は noncompact でもよい.)

(i) 全ての不動点, 周期点; critical element は双曲型.

(ii) 全ての不動点, 周期点; critical element の W^s や W^u は全て互に横断的交わりを持つ.

§2. Closing lemma とその応用.

<u>定理</u> 2. (Closing lemma [18]).

M を compact, $X \in \mathfrak{X}^1(M)$, x は X の非遊走集合 $\Omega(X)$ の点とする. このとき $\mathfrak{X}^1(M)$ に於て, X に任意の近くに Y が存在して, x は Y の閉軌道に含まれる.

次の $\mathcal{D}^1(M)$ に関する closing lemma は [20] の結果より導くことができる.

<u>定理</u> 2'. M を compact, $f \in \mathcal{D}^1(M)$, $x \in \Omega(f)$ とする. このとき, $\mathcal{D}^1(M)$ に於て f に任意の近くに g が存在して, x は g の周期点となる.

C^2 級の closing lemma は期待できないようである[19].

closing lemma より次の定理が導かれる．$\Omega(X)$, $\Omega(f)$ は各々 X, f の非遊走集合としている．又 $\Gamma(X)$, $\Gamma(f)$ を各々 X の critical element に含まれる点の集合，f の不動点，周期点の集合とする．

定理3．（General density theorem [18]）．M を compact とするとき $\mathfrak{X}^1(M)$ に於て $\Omega(X)=\overline{\Gamma(X)}$ なる性質は生成的である．

定理3′．（[20]）M を compact とするとき，$\mathfrak{D}^1(M)$ に於て $\Omega(f)=\overline{\Gamma(f)}$ は生成的に成立する．

$X\in\mathfrak{X}^1(M)$ の第1積分とは，次の条件をみたす C^r 級の関数 $f: M\to R$ である；(i) r は M の次元，(ii) M の任意の開集合上で f は定数ではない，(iii) $L_X f=0$（即ち X の流れは f を保存する．）．次の定理も closing lemma を使って証明された．

定理4．（Peixoto [16]）．M が compact のとき，$\mathfrak{X}^1(M)$ に於て，生成的に X は第1積分を持たない．

第1積分に関しては Arraut [2] の結果がある．

§3．構造安定性，Ω-爆発．

構造安定性の概念ができた頃より，これは生成的かという事が問題となった．$\mathfrak{X}^r(M)$ では M が compact 2次元のときは生成的であり，$\mathfrak{D}^r(M)$ では $M=S^1$ のときは生成的である（[19]）．一方，2次元以上の non-compact 多様体では，構造安定でないよう

なベクトル場からなる開集合が$\mathfrak{X}^r(M)$に存在する([17]). 又Mが2次元以上でcompactならば常に$\mathfrak{D}^r(M)$に構造安定でない要素からなる開集合が存在する.

構造安定性を特徴づけようという試みからSmaleが定義した次の概念がある.

Axiom A.

(a) Ωは双曲型集合である. この意味は$f\in\mathfrak{D}^r(M)$の場合は$T(M)|\Omega=E^u\oplus E^s$なるsplittingが存在し, $X\in\mathfrak{X}^r(M)$の場合はΩ_0を特異点の集合, Ω_1を$\Omega(X)-\Omega_0$とするとき, $T(M)|\Omega_0=E^u\oplus E^s$, $T(M)|\Omega_1=E^u\oplus E^s\oplus E^X$なるsplittingが存在することである. 但し$t>0$, $n>0$に対してTf, $T\varphi_t$はE^uではexpandし, E^sではcontractする. そしてE^Xはベクトル場Xで張られるものとする.

(b) $\Omega=\overline{\Gamma}$.

ST. (Strong transversality property): 任意の$x\in M$に対して, $W^s(x)$と$W^u(x)$は横断的交わりを持つ. (Axiom Aのもとでは$W^s(x)$, $W^u(x)$はimmerseされた多様体である.)

構造安定性については次の結果が得られている. 定理5の$2\leqq r\leqq\infty$は[22], $r=1$は[24]の結果であり, 定理5'は[25]の結果である.

定理5. Mがcompact, $1\leqq r\leqq\infty$とする. $f\in\mathfrak{D}^r(M)$がAxiom

A と ST をみたせば，f は $\mathfrak{D}^r(M)$ の中で構造安定である．

<u>定理</u> 5′．M を compact とする．$X \in \mathfrak{X}^r(M)$ が Axiom A と ST をみたせば，X は $\mathfrak{X}^r(M)$ の中で構造安定である，$r \geqq 1$．

他に compact や open 多様体上の力学系の Ω-構造安定性に関しての仕事[31]，[21]，[8] 等がある．

<u>定理</u> 6．(Shub [26]) M を compact とするとき，$\mathfrak{D}^r(M)$ の中で構造安定な $f \in \mathfrak{D}^r(M)$ は $\mathfrak{D}^0(M)$ の中に稠密に存在する．

次に Ω-爆発について述べる．

<u>定義</u>．$f \in \mathfrak{D}^r(M)$，$0 \leqq r \leqq \infty$，の <u>*filtration*</u> とは境界を持つ多様体の列 $M = M_k \supset \cdots \supset M_0 = \phi$ で $f(M_i) \subset \mathrm{Int}\, M_i$，$\mathrm{Int}\, M_i \supset M_{i-1}$ をみたすものである．C^0 位相で f に近い g は f と同じ filtration を持つ．$K_i = \bigcap_{n \in \mathbb{Z}} f^n(M_i - \mathrm{Int}\, M_{i-1})$ は $M_i - M_{i-1}$ に含まれる最大の不変集合である．特に $K_i = \Omega(f) \cap (M_i - M_{i-1})$ のとき，この filtration は <u>*fine*</u> であるという．

Ω の分解 $\Omega = \Omega_1 \cup \cdots \cup \Omega_k$ で，次の条件をみたすものを <u>Ω-分解</u>という；(i) $\forall\, \Omega_i$ は閉不変集合，(ii) $\Omega_i \cap \Omega_j = \phi$ $(i \neq j)$，(iii) Ω_i は topologically transitive．$(W^u(\Omega_i) - \Omega_i) \cap (W^s(\Omega_j) - \Omega_j) \neq \phi$ のとき $\Omega_j < \Omega_i$ と書く．そして，$\Omega_{i_0} < \Omega_{i_1} < \cdots < \Omega_{i_\ell} = \Omega_{i_0}$ $(\ell \geqq 1)$ なる ($\Omega_{i_0}, \cdots, \Omega_{i_\ell}$) を <u>*cycle*</u> という．

<u>定理</u>．[27] $f \in \mathfrak{D}^r(M)$ が fine filtration を持つための必要十

分条件は，f がcycleのないΩ-分解を持つことである．

f のfiltrationの列 $\{M=M^\alpha_{k_\alpha}\supset\cdots\supset M^\alpha_1\}_{\alpha=1,\dots,n}$ が<u>fine sequence of filtration</u>であるとは，(i) $\forall i\ \exists j\ M^\alpha_i - M^\alpha_{i-1}\subset M^{\alpha-1}_j - M^{\alpha-1}_{j-1}$，(ii) $\bigcap_{\alpha>0}K^\alpha=\Omega(f)$，(但し，$K^\alpha_i$ を上の K_i と同様なものとするとき，$K^\alpha=\bigcup_i K^\alpha_i$ とする.)． f がC^r <u>Ω-爆発</u>を持たないとは，任意の開近傍 $U(\Omega(f))$ に対して，f の近傍 $N(f)\subset\mathcal{D}^r(M)$ が存在して，任意の $g\in N(f)$ に対して $\Omega(g)\subset U(\Omega(f))$ であることである．

<u>定理</u>[28]． $f\in\mathcal{D}^0(M)$ が C^0 Ω-爆発を持たないための必要十分条件は f がfine sequence of filtrationを持つことである．

<u>定理7</u>．(Palis-Shub-Sullivan[13])． $\dim M\neq 4$ のとき，$\mathcal{D}^0(M)$ の中でfine sequence of filtration を持つもの(従って C^0 Ω-爆発を持たないもの)は生成的に存在する．

次にζ-関数について述べる． $f\in\mathcal{D}^r(M)$ に対して $N_p(f)$ を f^p の不動点の個数とする．このとき f の<u>ζ-関数</u>は $\zeta(f,t)=\exp\left(\sum_{p=1}^\infty \frac{1}{p}N_p(f)t^p\right)$ で定義される．Manningは[6]に f がAxiom A をみたせばζは有理関数であることを示した．一方Simonは$\mathcal{D}^r$(3-torus)の中では，ζが有理関数であるようなものは生成的でない事を示した[29]．

§4. Bifurcation.

$\Xi^r(\Lambda)$ を多様体 Λ から $\mathfrak{X}^r(M)$ への C^r 写像 ξ の全体に C^r 位相を入れた空間とする．但し，ξ が C^r 級であるとは $\hat{\xi}(x,\lambda)=\xi(\lambda)(x)$ が $M\times\Lambda$ 上で C^r 級であることである．$\Sigma(\xi)\subset\Lambda$ を $\xi(\lambda)$ が構造安定なベクトル場であるような λ の全体から成る部分集合とする．このとき $\Lambda-\Sigma(\xi)=\Lambda_1(\xi)$ を ξ の <u>bifurcation set</u> という．$\xi(\lambda_1)$ と $\xi(\lambda_2)$ が位相的に同値でないような２つの構造安定な族の中にあるときは $\lambda\in\Lambda$ が存在して $\xi(\lambda)$ は構造安定でなくなる．しかも $\Xi^r(\Lambda)$ の中で ξ を少々動かしても同じことがなりたつ．このように bifurcation を除くことができなくても，bifurcation のきれいな表現(しかも生成的に存在するようなもの)を探すことを目的とする．ここでは，この様な目的で力学系の bifurcation を取扱かったものの中で代表的なものを紹介し，他の文献も掲げておく．

次に示すのは[32]の一般化である Sotomayor [33] の結果である．

力学系の不動点，周期点，特異点，周期軌道が双曲型でない場合，力学系はこれ等の近くで局所的に安定でない．x を M の C^r 級微分同相写像 f の不動点とする．T_xf を保つ T_xM の splitting $E^c\oplus E^u\oplus E^s$ が存在して，$T_xf|E^c$, $T_xf|E^u$, $T_xf|E^s$ の固有値の絶対値は各々 1，>1，<1 となる．($E^c=\{0\}$ のとき x は双曲型となる.) すると局所部分多様体 W^c, W^{cu}, W^{cs} が存在し

て，f-invariant で x に於て各々 E^c, $E^c \oplus E^u$, $E^c \oplus E^s$ に接する．これ等は一意的には存在しないが，どの様に取っても x に於て r 次の contact を持つ．又 E^u, E^s に x で接する局所多様体 W^{uu}, W^{ss} が一意的に存在する．

x が<u>準双曲型</u>(quasi-hyperbolic) であるとは，ある W^c に対して，$f|W^c$ が次のうちの１つの写像と C^r conjugate となること；

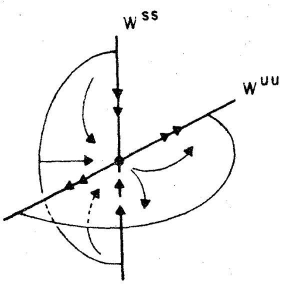
(a) $x \longmapsto x + ax^2 + o(x^2)$, $a \neq 0$, x は十分小さい実数,

(b) $x \longmapsto -x + \alpha x^2 + \gamma x^3 + o(|x|^3)$, $\gamma + \alpha^2 \neq 0$, x は十分小,

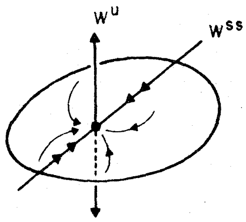
(c) $z \longmapsto \lambda z + \beta |z|^2 z + o(|z|^3)$, $\lambda, \lambda^2, \lambda^3, \lambda^4 \neq 1$, $Re(\frac{\beta}{\lambda}) \neq 0$,

z は十分小さい複素数とする．($|\lambda| = 1$).

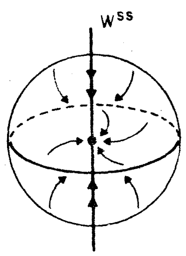
(b) に於て $\gamma + \alpha^2 > 0$ ならば $f|W^c$ は x に向う attractor となり，(c) に於て $Re(\frac{\beta}{\lambda}) < 0$ ならば $f|W^c$ は attractor となる．次に３次元の場合の図の例を示しておく．



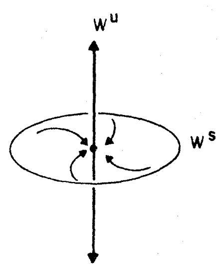
(a)



(b)



(c')



(c'')

xをMのベクトル場Xの特異点とするとき，xが準双曲型であるとは，ある$t>0$に対してxが$\varphi_t: M \to M$の準双曲型不動点となることである(但しφ_tはXの流れとする)．同様にXの周期軌道γが準双曲型であるとは$x \in \gamma$がγのPoincaré写像の準双曲型不動点となることである．

$\Theta(\xi) = \{(x, \lambda) \in M \times \Lambda \mid x$は$\xi(\lambda)$の準双曲型critical elementに入っている$\}$とおくとき，$S_1(\xi)$をprojection $M \times \Lambda \to \Lambda$による$\Theta(\xi)$の像とする．このとき，次はSotomayorの結果である．

__定理__ 8．Λをcompact 1次元多様体とするとき，$\Gamma^r (r \geqq 5)$を次の条件を持つ$\xi \in \mathfrak{X}^r(\Lambda)$の全体とすれば，$\Gamma^r$は$\mathfrak{X}^r(\Lambda)$の中のBaire集合である．(1)．$\xi(\lambda)$は任意の$\lambda \in \Lambda$に対して双曲型又は準双曲型のcritical elementしか持たない．しかも準双曲型のcritical elementはある横断性に関する条件をみたす．
(2)．準双曲型のcritical elementsに対する$S_1(\xi)$は互に交わらない．

詳しくは，この講究録の中の，松元重則「力学系の分岐」を参照されたい．

他に微分同相写像のbifurcationの生成的性質に関する[9]，[10]などの最近の結果がある．

§5．生成的性質に関する予想．

予想1. (Smale 1971). 全ての安定集合$W^s(x)$がなめらかな多様体であることは$\mathcal{D}^r(M)$, $\mathcal{X}^r(M)$で生成的である.

予想2. (Shub-Smale [28]). 微分同相写像の fine sequence of filtration は生成的に存在する.

次に Lyapunov 関数について述べる. 任意の $f:M\to\mathbb{R}$ は nondegenerate な特異点しか持たないような$\bar{f}$で近似できるが更に少し動かして, $\bar{f}$に対して$-\mathrm{grad}\,\bar{f}$は閉軌道を持たない Morse-Smale ベクトル場となるようにできる. このとき, $-\mathrm{grad}\,\bar{f}$は構造安定になる. この様な考え方を発展させたものを次に紹介する. φ_tをXの流れとする.

$X\in\mathcal{X}^r(M)$, ΛをXの不変閉集合とする. このとき$L_X: M\to\mathbb{R}_+$が次の条件を持つとき<u>(X,Λ)に対する Lyapunov 関数</u>であるという; L_Xの critical set $=\Lambda$, $M-\Lambda$上で$\langle \mathrm{grad}\,L_X, X\rangle<0$ (適当なMの Riemannian metric に対して), そしてL_Xは少くとも$C^{\dim M}$級である. 特に$\Lambda=\Omega(X)$のとき単に<u>Xに対する Lyapunov 関数</u>という.

なめらかな境界を持つ部分多様体の列$\phi=M_0\subset M_1\subset\cdots\subset M_k=M$が次の条件を持つとき流れ<u>$\varphi_t$の filtration</u>という; $M_i\subset \mathrm{Int}\,M_{i-1}$, $\varphi_t(M_i)\subset \mathrm{Int}(M_i)$ $\forall t>0$, $\varphi_t(x)$は∂M_iと横断的に交わる $\forall x\in M$, $0<i<k$. filtration が $K_i=\bigcap_{t>0}\varphi_t(M_i-M_{i-1})=$

$\Omega(X)\cap(M_i-M_{i-1})$ をみたすとき <u>*fine*</u> であるという.

<u>定理</u>[21]. $K=\bigcup_{i=1}^{k}K_i$ とする. このとき (X,K) の C^∞ 級の Lyapunov 関数で $L_X(K_i)=i$ となるものが存在する.

又この定理から次が得られる.

<u>定理</u>[21]. X が Axiom A をみたし, cycle を持たないならば C^∞ 級の Lyapunov 関数で有限個の特異値しか持たないものが存在する.

<u>定理</u>[21]. X が有限個の特異値を持つような Lyapunov 関数を持つための必要十分条件は φ_t が fine filtration を持つことである.

$f\in\mathcal{D}^r(M)$ に対して, Λ を f の不変集合とする. このとき, $L_f: M\to\mathbb{R}_+$ が <u>(f,Λ) の Lyapunov 関数</u>であるとは; L_f の critical set $\supset\Lambda$, $L_f(f(x))\leqq L_f(x)$ で等号は $x\in\Lambda$ のときのみ成立, L_f は少くとも $C^{\dim M+1}$ 級をみたすことである. 特に $\Lambda=\Omega(f)$ のとき <u>f の Lyapunov 関数</u>という

<u>定理</u>[27]. $f\in\mathcal{D}^r(M)$, $M=M_k\supset\cdots\supset M_1\supset M_0=\phi$ を f の filtration とし, $K=\bigcup_{i=1}^{k}K_i$ とする. このとき $L_f(K_i)=i$ をみたすような (f,K) の Lyapunov 関数が存在する.

この様に Lyapunov 関数の性質から力学系の構造をみていく研究を Shub は提唱している.

<u>予想</u> 3. (Shub, [27]). 力学系は生成的に Lyapunov 関数

を持つ.

第二章. 保存系について.

保存系の生成性に関してはRobinsonの一連の研究が重要である. 以下にその主なものを中心にして紹介する.

§6. Kupka-Smale型の定理.

Mをm次元のC^∞多様体(compactは仮定しない)とする. Mのvolume Ω (C^∞のnondegenerate n-form)をきめておく. そして次の様な記号を定義する.

$\mathcal{D}^r_V(M)=\{f\in\mathcal{D}^r(M) \mid f^*\Omega=\Omega$ (即ちfはvolumeを保存する)$\}$,

$\mathfrak{X}^r_V(M)=\{X\in\mathfrak{X}^r(M) \mid L_X\Omega(m)=0\ \forall m\in M$ (即ちXはvolumeを保つ)$\}$,

$\mathcal{H}^r(p)=\{f\in\mathcal{D}^r_V(M) \mid f$の周期$p$以下の周期点はすべて双曲形$\}$,

$\mathcal{H}^r=\bigcap_{p=1}^\infty\mathcal{H}^r(p)$,

$\mathcal{J}^r(p)=\{X\in\mathfrak{X}^r_V \mid X$の特異点と周期$p$以下の周期軌道は双曲形$\}$,

$\mathcal{J}^r=\bigcap_{p=1}^\infty\mathcal{J}^r(p)$.

$\mathcal{D}^r_V(M)$, $\mathfrak{X}^r_V(M)$はBaire空間である[23]. この時, 次が成立する.

<u>定理</u>9. (Robinson [23]). $1\leqq r\leqq\infty$とする.

(i) $\dim M\geqq3$ならば, $\mathcal{H}^r(p)$は$\mathcal{D}^r_V(M)$の中でopen, denseである, 従って$\mathcal{H}^r$は$\mathcal{D}^r_V(M)$で生成的である.

(ii) $\dim M \geqq 4$ ならば，$\mathcal{I}^r(p)$ は $\mathfrak{X}_V^r(M)$ の中で open, dense である，従って $\mathcal{I}^r$ は $\mathfrak{X}_V^r(M)$ に於て生成的である．

(M,ω) を symplectic 多様体とする(即ち M は $2n$ 次元の C^∞ 多様体，ω は nondegenerate closed 2-form)．

$$Sym^r(M) = \{f \in \mathcal{D}^r(M) \mid f^*\omega = \omega\}$$

とおけば，これは Baire 空間である [23]． ω が nondegenerate より，ω により bundle 同型 $TM \to TM$ ($v \longmapsto 2\omega(v,\cdot)$) が引き起こされる．この同型により C^r sections $C^r(TM) = \mathfrak{X}^r(M)$ と $C^r(T^*M)$ の同型が得られる． C^{r+1} 級の関数 $H: M \to \mathbb{R}$ に対して，$dH \in C^r(T^*M)$ に対応する $X_H \in \mathfrak{X}^r(M)$ を <u>Hamiltonian ベクトル場</u>という． $\mathfrak{X}_H^r(M)$ で C^r 級 Hamiltonian ベクトル場全体の空間をあらわす． $\mathfrak{X}_H^r(M)$ は Baire 空間である [23]． $H^{-1}(e) = \{m \in M \mid H(m) = e\}$ を X_H の <u>energy 曲面</u>という．

$f \in Sym^r(M)$，m は f の周期点とし，周期を p とする．すると $T_m f^p$ は symplectic，その固有値として λ があれば，$\frac{1}{\lambda}, \bar{\lambda}, \frac{1}{\bar{\lambda}}$ も固有値となり mutiplicity は等しい． <u>principal 固有値</u>を絶対値が 1 より大か，又は絶対値 1 で虚数部分が 0 以上の n 個から成る固有値の集合として定義する(固有値が 1, −1 のものは重複度が偶数だから，各々その半分を取る)．同様に Hamiltonian ベクトル場の特異点の <u>principal characteristic multiplier</u>

を $\exp(T_m X)$ を使って定義する．$X_H \in \mathfrak{X}^r_H(M)$ の周期軌道が周期 t を持つとき，$T_m \varphi_t$ は *symplectic* である．固有値1がベクトル方向に対して存在し，又エネルギー H の増加方向にも固有値1が存在する．<u>周期軌道の *principal characteristic multipliers*</u> を残りの $(2n-2)$ 個の固有値の半分として上と同様に定義する．

周期点，特異点，周期軌道が <u>*elementary*</u>（又は <u>*N-elementary*</u>, $N \geqq 1$）であるとは *principal* 固有値又は *characteristic multipliers* が整数上で乗法的に独立であること（又は $-N$ と N の間で乗法的に独立であること）である．即ち，$\prod a_i^{p_i}=1$ $(-N \leqq p_i \leqq N) \Rightarrow p_i = 0 \ \forall i$．このとき次の部分集合を定義する．
このとき次の記号を定義する．

$\mathcal{E}^r(p,N) = \{ f \in \mathrm{Sym}^r(M) \mid$ 周期 $\leqq p$ の任意の点は N-elementary$\}$,

$\mathcal{E}^r = \bigcap_{p,N} \mathcal{E}^r(p,N)$,

$\mathcal{G}^r(0,N) = \{ X \in \mathfrak{X}^r_H(M) \mid X$ の特異点は N-elementary$\}$,

$\mathcal{G}^r(0) = \bigcap_N \mathcal{G}^r(0,N)$,

$\mathcal{G}^r(p,N) = \{ X \in \mathfrak{X}^r_H(M) \mid$ 特異点と周期 p 以下の周期軌道は N-elementary$\}$,

$\mathcal{G}^r = \bigcap_{p,N} \mathcal{G}^r(p,N)$.

このとき Robinson は次の結果を示した．これは *Abraham-Marsden* の問題提起[1] にそった研究である．

<u>定理</u> 10. [23]. (M, ω) を *symplectic* 多様体とする．

(i) $1 \leqq r \leqq \infty$ ならば $\mathcal{E}^r(p,N)$ は $\mathrm{Sym}^r(M)$ で open dense, 従って $\mathcal{E}^r$ は生成的である.

(ii) $1 \leqq r \leqq \infty$ ならば, $\mathcal{G}^r(0,N)$ は $\mathfrak{X}^r_H(M)$ で open dense, 従って $\mathcal{G}^r(0)$ は生成的である.

(iii) $2 \leqq r \leqq \infty$ ならば, $\mathcal{G}^r(p,N)$ と $\mathcal{G}^r$ は生成的である.

又, locally Hamiltonian ベクトル場(即ち, ω を保存するベクトル場, $L_X\omega = 0$)でも (ii), (iii) と同様なことが成立する.

以上の仕事の拡張としての Taken [34] や, geodesic flow に関する生成性についての Klingenberg-Taken [4] の結果がある.

§7. Closing lemma とその応用.

<u>定理</u>11. (保存系の closing lemma, Pugh-Robinson [20]).

M を compact とするとき $\mathcal{D}^1_V(M)$, $\mathfrak{X}^1_V(M)$, $\mathrm{Sym}^1(M)$, $\mathfrak{X}^1_H(M)$ の中で次が成立する; m が力学系 φ の非遊走点とする. N を φ の任意の近傍, $U \subset M$ を m の任意の近傍とするとき, $\varphi' \in N$ と $m' \in U$ が存在して m' は φ' の周期点となる.

<u>定理</u>12. (保存系の general density theorem, Pugh-Robinson [20]).

M を compact とするとき, $\mathcal{D}^1_V(M)$, $\mathfrak{X}^1_V(M)$, $\mathrm{Sym}^1(M)$, $\mathfrak{X}^1_H(M)$ に於て, 次の性質は生成的である; $\Omega(\varphi) = \overline{\Gamma(\varphi)}$.

Hamiltonian ベクトル場 X の<u>積分</u>とは次の条件をみたす C^1 級関数 $g: M \longrightarrow \mathbb{R}$ である; (i) g は X の流れによって保存される,

(ii) X の energy 曲面の中の任意の開集合で g は定数ではない.

定理 13. (Robinson, [23]). M を compact とするとき, 積分を持たない Hamiltonian ベクトル場は $\mathfrak{X}^1_H(M)$ に生成的に存在する.

§8. 保存系の構造安定性.

$f \in Sym^r(M)$ が $Sym^r(M)$ の中で ε-Ω-stable であるとは, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, f の近傍 $N_\varepsilon \subset Sym^r(M)$ が存在して, 任意の $g \in N_\varepsilon$ と f とは $|h - id| < \varepsilon$ なる homeomorphism $h: \Omega(f) \to \Omega(g)$ により Ω-conjugate であることである. 同様に $X \in \mathfrak{X}^r_H$ に対しても ε-Ω-stability が定義される. Ω-stability は上から $|h - id| < \varepsilon$ の条件を除いて与えられる.

定理 14. (Robinson [23]). $1 \leqq r \leqq \infty$, (M, ω) は symplectic 多様体とする. このとき, $Sym^r(M)$, $\mathfrak{X}^r_H(M)$ で次が成立する.

(i) $\dim M \geqq 2 \Rightarrow Sym^r(M)$ の中で ε-Ω-stable な系は稠密でない.
   $\dim M = 2 \Rightarrow Sym^r(M)$ の中で Ω-stable な系は稠密でない.

(ii) $\dim M \geqq 4 \Rightarrow \mathfrak{X}^r_H(M)$ の中で ε-Ω-stable な系は稠密でない.
   $\dim M = 4 \Rightarrow \mathfrak{X}^r_H(M)$ の中で Ω-stable な系は稠密でない.

次の定理は Newhouse により最近得られた結果である.

定理 15. [11] M を compact, $1 \leqq r \leqq \infty$, $f \in Sym^r(M)$ とする.

このとき，f が $\mathcal{D}^r(M)$ の中で構造安定なのは f が Anosov のときに限る．

§9．其の他．

1．保存系の位相力学系が ergodic という性質は生成的であるという Oxtoby-Ulam [12] の結果があり，一方 $X \in \mathcal{X}_H^r(M)$ に対してほとんど全ての energy 曲面に対してその少くとも1つの component 上では X は ergodic であるという性質を X が持たないことは生成的である事を示した Markus-Meyer [7] の結果等がある．但し，M は compact の場合である．

2．homoclinic 点の存在．

$f \in \mathcal{D}^r(M)$ の双曲形周期点 x に対して，$W^s(x) \cap W^u(x)$ に含まれる周期点でない点を，x の <u>homoclinic 点</u> という．

<u>定理</u> 16．[35]　M を compact とする．$\mathrm{Sym}^1(M)$ 又は $\mathcal{D}_V^1(M)$ に於て，すべての双曲型周期点は homoclinic point を持つという性質は生成的である．

次に M^2 として任意の単純閉曲線は M^2 を2つの領域に分けて一方は有界となるものを考える．

<u>定理</u> 17．(McGehee-Meyer [36])．少くとも1つの不動点が homoclinic 点を持つ系は $\mathcal{D}_V^1(M^2)$ で開集合となる．（但し C^1-compact open

topology で考えている.)

参考文献

[1] R. Abraham - J. Marsden, Foundations of Mechanics, Benjamin, Inc., N.Y., 1967.

[2] J. Arraut, Note on structural stability, Bull. A.M.S. 72 (1966), 542-544.

[3] M. Hirsch - C. Pugh, Stable manifolds and hyperbolic Sets, Proc. Symp. Pure Math. 14, A.M.S (1970), 133-165.

[4] W. Klingenberg - F. Takens, Generic properties of geodesic flows, Math. Ann. 197 (1972), 323-334.

[5] I. Kupka, Contribution à la théorie des champs génériques, Contributions Diff. Eq. 2 (1963), 457-484; vol. 3 (1964), 411-420.

[6] A. Manning, Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions, Bull. London Math. Soc. 3 (1971), 215-220.

[7] L. Markus - K. Meyer, Generic Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic, Memoirs of A.M.S. 144 (1974).

[8] P. Mendes, On stability of dynamical systems on open

manifolds, J. Diff. Eq 16 (1974), 144-167.
[9] S. Newhouse-J. Palis, Bifurcations of Morse-Smale dynamical systems, to appear.
[10] ——-——, Cycles and bifurcation theory, to appear.
[11] S. E. Newhouse, Quasi-elliptic periodic points in conservative dynamical systems, to appear.
[12] J. C. Oxtoby-S. M. Ulam, Measure-preserving homeomorphisms and metric transitivity, Ann. of Math, 42 (1941), 874-920.
[13] J. Palis-M. Shub-D. Sullivan, Genericity theorems in topological dynamics, to appear.
[14] M. M. Peixoto, Structural stability on two dimensional manifolds, Topology 1 (1962), 101-120.
[15] M. M. Peixoto, On approximation theorem of Kupka and Smale, J. Diff. Eq. 3 (1966), 214-227.
[16] ——, Qualitative theory of differential equations and structural stability, Inter. Sym. on Nonlinear Diff. Eq. and Nonlinear Mecha. Academic Press. N.Y. 1967, 469-480.
[17] ——-Pugh, Structurally stable systems on open manifolds are never dense, Ann. of Math. 87 (1968), 423-430.
[18] C. C. Pugh, On improved closing lemma and general density theorem, Amer. J. Math. 89 (1967), 1010-1021.

[19] C.C. Pugh, Against the C^2 closing lemma, J. Diff. Eq. 17 (1975), 435-443.

[20] —— - R.C. Robinson, The C^1 closing lemma, including Hamiltonians, to appear.

[21] C.C. Pugh - M. Shub, The Ω-stability theorem for flows, Invent. Math. 11 (1970), 150-158.

[22] J. Robbin, A structural stability theorem, Ann. of Math. 94 (1971), 447-493.

[23] R.C. Robinson, Generic properties of conservative systems I, II, Amer. J. Math. 92 (1970), 562-603, 897-906.

[24] ——, Structural stability of C^1 diffeomorphisms, to appear.

[25] ——, Structural stability of C^1 flows, to appear.

[26] M. Shub, Structurally stable diffeomorphisms are dense, Bull. A.M.S. 78 (1972), 817-818.

[27] ——, Stability and genericity for diffeomorphisms, Dynamical systems, ed. M. Peixoto, Academic Press, N.Y., 1973, 493-514.

[28] —— - S. Smale, Beyond hyperbolicity, Ann. of Math. 95 (1972), 587-591.

[29] C.P. Simon, On a classification of a Baire set of diffeomorphisms, Bull. A.M.S. 77 (1971), 783-787.

[30] S. Smale, Stable manifolds for differentiable equations, Ann. Scuola Normale 18 (1963).

[31] Smale, The Ω-stability theorem, Proc. Symp. Pure Math. 14 A.M.S. (1970), 289-298.

[32] J. Sotomayor, Generic one-parameter families of vector fields on two-dimensional manifolds, Bull. A.M.S. 74 (1968), 722-726.

[33] ——, Generic bifurcations of dynamical systems, Dynamical systems, ed. M. Peixoto, Academic Press, N.Y., 1973, 561-582.

[34] F. Takens, Hamilonian systems: Generic properties of closed orbits and local perturbations, Math. Ann. 188 (1970), 304-312.

[35] ——, Homoclinic points in conservative systems, Inv. Math. 18 (1972).

[36] R. McGehee - K. Meyer, Homoclinic points of area preserving diffeomorphisms, Amer. J. Math. 96 (1974), 409-420.