数理解析研究所講究録
第254巻 1975年 89-91

Morse – Smale Systems I

横浜市立大学　文理　一楽重雄

1. 安定多様体，不安定多様体

$f: M^n \longrightarrow M^n$ を微分同相写像，$p \in M^n$ を固定点，すなわち，$f(p)=p$ が成りたつとする。このとき，f の p での微分，$Df(p): T_pM \longrightarrow T_pM$ が，絶対値1の固有値を持たないとき，p を双曲的と呼ぶ。p が双曲的固定点なら，T_pM は絶対値1以下の固有値に対応する固有空間 E^s と絶対値1以上の固有値に対応する固有空間 E^u との直和に分解する。すなわち，

$$T_pM = E^u \oplus E^s$$

$$Df(p)(E^u) = E^u, \quad Df(p)(E^s) = E^s$$

$Df(p)|E^u : E^u \to E^u$ は expansion

$Df(p)|E^s : E^s \longrightarrow E^s$ は contraction。

f をくり返し施すことによって，p に近づく点全体を考えると，それは~~R^sと同相M^nにはめ込まれた~~M^nの部分多様体（但し，正則ではない場合が多い。すなわち，多様体としての位相と部分集合としての位相は，一般には一致しない。）にな

り，pでの接空間はE^sである。これをpの安定多様体と言い，$W^s(p)$と書く。また，多様体としては，$W^s(p)$はR^sに微分同相である。まとめると，

$$W^s(p)=\{q\in M^n \mid \lim_{n\to\infty} d(f^n(q),p)=0\}$$ は，1対1にはめこまれたR^sの像であり，

$$T_pW^s(p)=E^s.$$

まったく，双対的に，不安定多様体が定義される。

$$W^u(p)=\{q\in M^n \mid \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(q),p)=0\}$$

$$T_pW^u(p)=E^u.$$

次に，pが周期点のときは，その周期をrとして，f^rの固定点と見做せば，同様の議論が成りたつ。例えば，

$$W^u(p)=\{q\in M^n \mid \lim_{n\to\infty} d(f^{-n}(q),f^{-n}(p))=0\}$$

とすれば良い。

2. Morse - Smale diffeomorphism

$f:M^n\longrightarrow M^n$ 微分同相が，次の条件を満たすとき，Morse - Smale diffeo. と呼ぶ。

(1) $\Omega(f)=\{f$の非遊走点$\}$が有限。従って，$\Omega(f)=Per(f)$.

(2) すべての $p\in Per(f)$ は双曲的。

(3) $p,q\in Per(f)$に対して，$W^s(p)$と$W^u(q)$は横断的に交わる。すなわち，$^\forall x\in W^s(p)\cap W^u(q)$に対して，$T_xW^s(p)$と

$T_x W^u(p)$を合わせたものは，$T_x M^n$ を張る。

Morse－Smale diffeo.は，最も扱い易い diffeo.であって，色々，調子の良い性質を満たす。Anosov diffeo, Axiom A diffeo.と発展してゆくなかで，最も単純，基本的なものである。

3. Morse－Smale 不等式及びホモロジー群

ベクトル場の0点に関する古典的な Poincaré－Hopf の定理，あるいは，Morse 関数とホモロジー群の関係と同様に，周期点の数とホモロジー群は，次の Morse－Smale 不等式で関係づけられる。 $f: M \to M$，Morse－Smale とすると，次が成りたつ。（Smale）

$$M_0 \geqq B_0$$

$$M_1 - M_0 \geqq B_1 - B_0$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i M_i = \sum_{i=0}^{\dim M} (-1)^i B_i$$

ここで，B_iはMの i 番目ベッチ数。M_j は $\dim W^u(p) = j$ なる周期点 p の個数である。 証明は，$M = \bigcup_{p \in Pe(f)} W^u(p)$が，（open） cell 分割を与えることを用いる。

また，$f(W^u(p)) = W^u(p)$ であることから，f の導びくホモロジー群の準同型，$f_*: H_*(M;\mathbb{R}) \longrightarrow H_*(M;\mathbb{R})$

の固有値は1の巾根であることが分かる。（Shub） 以上