数理解析研究所講究録
第 254 巻 1975 年 143-152

Horseshoes, Symbolic dynamics

北大 理学部 倉田雅弘

ここでは Symbolic dynamics が微分力学系（の hyperbolic invariant set）にどのように関連するかを述べる。ひとつは無限個の periodic points をもつ微分同型の例として構成された Smale の horseshoe であり、もう一方は Sinai や Bowen による Axiom A を満す微分同型の non-wandering set の Markov partition からひきおこされる subshift との semi-conjugacy である。

§1. Shift.

はじめに Shift の定義を述べる。Sを有限集合とする。X_Sを$\mathbb{Z}$からSへの函数全体とする。ただし、S, $\mathbb{Z}$には離散トポロジーが入っているものとし、X_Sには Compact-open トポロジーを入れる。map

$$\rho : X_S \longrightarrow X_S$$

を $\rho((a_i)_{i\in Z}) = (a'_i)_{i\in Z}$ ただし、 $a'_i = a_{i+1}$ とする。X_S を symbol S 上の shift, ρ を shift transformation という。

X_S は距離づけ可能で、たとえば次のように距離が定義される。$(a_n)_n$, $(b_n)_n \in X_S$ に対して、

$$d((a_n), (b_n)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^{-|n|} \delta_{a_n b_n}$$

ただし、$\delta_{a_n b_n} = \begin{cases} 0 & \text{if } a_n = b_n \\ 1 & \text{if } a_n \neq b_n \end{cases}$。

shift については次が成りたつ。

(1) ρ は位相同型

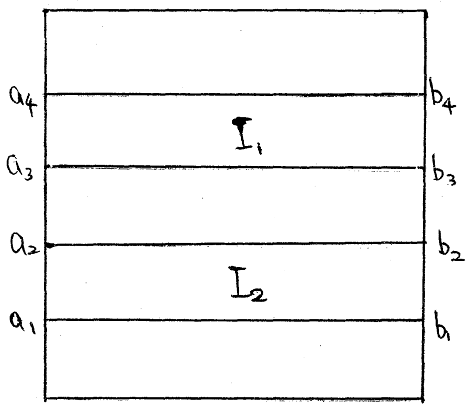
(2) X_S は完全不連結 (i.e. 各点を含む連結成分は一点のみ)

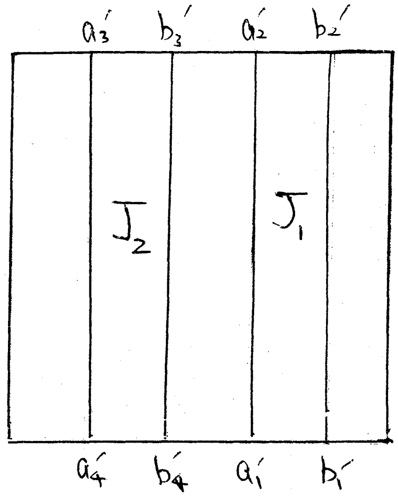
(3) ρ の周期点は X_S で稠密。従って $\Omega(\rho) = X_S$。周期 k の周期点の個数を C_k とすると $C_k = N^k$ ここで $N = \# S$。

§2. Horseshoe ([6]).

$R^2 \supset B_1 = [0, 1] \times [-1, 2]$, $B = [0, 1] \times [0, 1]$ として、

a_i. a_i'. b_i. b_i'. J_i. I_i を下図のとおりとする。





$f: B \longrightarrow B_1$ を次のようにする。

$f(a_i) = a_i'$ $\quad f(b_i) = b_i'$ $\quad (i = 1, \cdots, 4)$.

f は I_i を J_i に linear に写す。$(i = 1, 2)$.

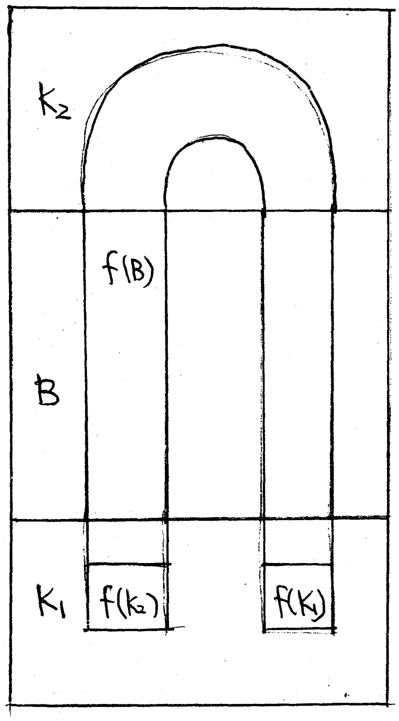
$K_1 = [0, 1] \times [-1, 0]$, $K_2 = [0, 1] \times [1, 2]$ とすると、f を B_1 から B_1 の中への map に次のように拡張する。

$f(K_i) \subset K_1 \quad (i = 1, 2)$

$f|K_1$ はただひとつの fixed point p_1 をもち他に non-wandering point をもたない。

これを改めて f とおく。

$S^2 \supset B_1$ として、fを次のようにS^2上の微分同型に拡張する。(これを、あらためてfとする。)



$f|S^2-B_1$ はただひとつのfixed point p_0をもち、他にnon-wandering pointをもたない。

すると、

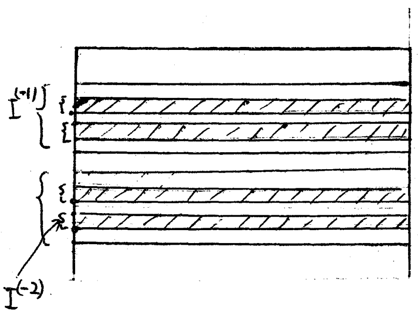
$$\Omega(f) = p_0 \cup p_1 \cup \Omega(f|B)。$$

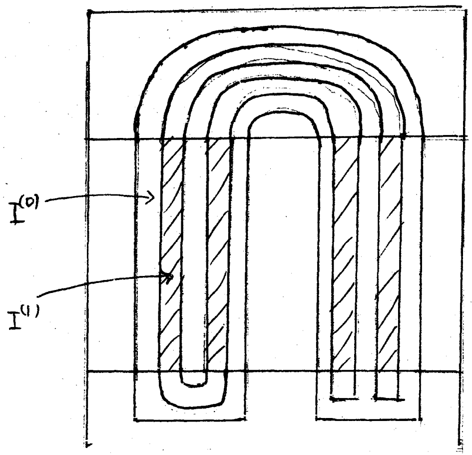
$\Omega(f|B)$を考える。

$$I^{(-1)} = I_1 \cup I_2$$

$$I^{(i)} = \begin{cases} f(I^{(i-1)}) \cap B & \text{for } i \geq 0 \\ f^{-1}(I^{(i+1)}) \cap B & \text{for } i < -1 \end{cases}$$

とする。





$\bigcap_{i\geq 0} I^{(i)}$ (resp. $\bigcap_{i<0} I^{(i)}$) は Cantor set × [0, 1] (resp. [0, 1] × Cantor set) となっている。

$\Lambda = \bigcap_{i\in\mathbb{Z}} I^{(i)}$ とする。 $S=\{1, 2\}$, X_SをS上の shift とすると、

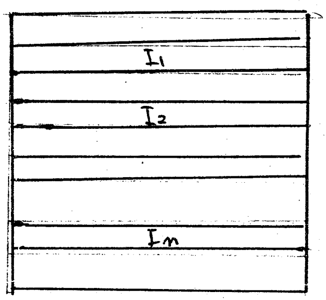
Prop 1　$f|\Lambda$ は X_S と topologically conjugate である。つまり、homeomorphism $\pi: \Lambda \longrightarrow X_S$ があって、$\rho\pi = \pi f$ となる。

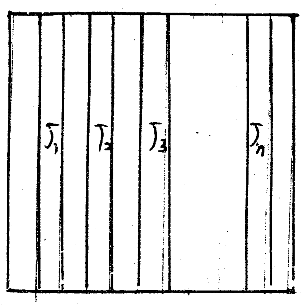
$\pi: \Lambda \longrightarrow X_S$ は次のように与えられる。$\pi(x) = (x_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ただし、$x_i = \alpha$ if $f^{-i}(x) \in I_\alpha$ $(\alpha = 1, 2)$。

Prop $\Omega(f|B) = \Lambda$, $\overline{\mathrm{Per}(f|B)} = \Omega(f)$。

何故なら、$x \in B$ が、$f^n(x) \notin I_1 \cup I_2$ ならば、$f^m(x) \longrightarrow p_1$ $(m \longrightarrow +\infty)$, $f^m(x) \longrightarrow p_0$ $(m \longrightarrow -\infty)$。

以上のことは、次のように一般化できる。$B \supset I_1, \cdots I_n, J_1 \cdots J_n$ とし、I_iはJ_jのどれかに linear に写す。

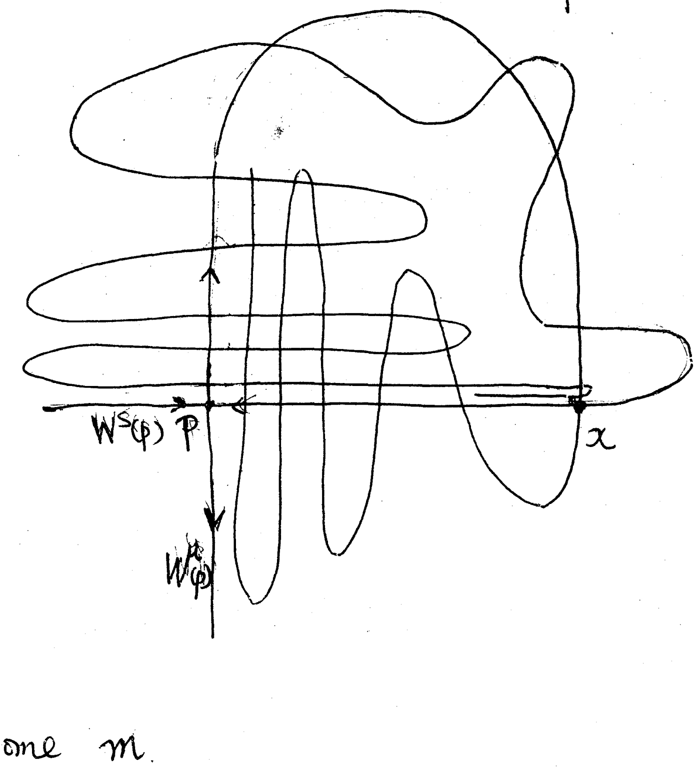




このとき non-wandering set は $\Sigma = \{1 \cdots n\}$ 上の shift と top. conjugate となる。

§3. homoclinic point

$x \in M$ が微分同型 $f : M \longrightarrow M$ の homoclinic point とは、$x \in W^s(p) \cap W^u(p)$, $p \neq x$, p は hyperbolic periodic point となることである。更に $T_x W^s(p) + T_x W^u(p) = T_x M$ のとき x を transversal homoclinic point という。例えば上の horseshoe で Λ には transversal homoclinic point は稠密にある。



Prop ([6]).

$x \in M$ が f の transversal homoclinic point ならば Cantor set $\Lambda \subset M$ があって

(1) $x \in \Lambda$

(2) $f^m \Lambda = \Lambda$ for some m.

(3) Λ は shift と top. conjugate。

従って、transversal homoclinic point は periodic points の closure に入っている。

§4. Axiom A を満す微分同型の non-wandering set

微分同型 $f: M \longrightarrow M$ が

1) non-wandering set $\Omega(f)$ は hyperbolic
2) $\overline{Per(f)} = \Omega(f)$

のとき Axiom A を満すというが、以下のように $\Omega(f)$ と subshift との対応がある。

$\Omega(f)$ の basic set (i.e. indecomposable closed subset) の subset A は次のとき rectangle という。

1. diam A が充分小さい。
2. $A = \overline{\mathrm{int} A}$
3) $x, y \in A$ ならば $W^s_{loc}(x) \cap W^u_{loc}(y) \in A$.

更に、

$$\partial^s A = \{x \in A \mid x \notin \mathrm{int}\, W^u(x, A) \text{ in } W^u_{loc}(x)\}$$

$\partial^u A$ も同様、$\partial A = \partial^s A \cup \partial^u A$ とする。

$\Omega(f)$ の basic set Ω_s の有限被覆 $\mathcal{A} = \{A_i\}$ が次のとき Markov partition という。各 A_i は rectangle で $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j \subset \partial A_i \cap \partial A_j$, 更に $x \in \mathrm{int}\, A_i \cap f^{-1}\, \mathrm{int}\, A_j$

のとき、$fW^u(x, A_i) \supset W^u(f(x), A_j)$ かつ $fW^s(x, A_i) \subset W^s(f(x), A_j)$ となる。

定理 $f: M \longrightarrow M$ が Axiom A をみたすなら、Ω_s の Markov patition がある。([1])

Markov patition の存在から、以下のように finite type の subshift からの semi-conjugacy がひきおこされる。([1])

X_S を symbol $S=\{A_1, \cdots, A_n\}$ 上の shift とする。$n \times n$ 0-1 行列 $T=(t_{ij})$ に対して

$$\Sigma = \{(a_i)_i \in X_S \mid a_i = A_{n_i} \text{ のとき } t_{n_i n_{i+1}} = 1\}$$

を T によって決まる finite type の subshift という。

Markov patition $\mathcal{A}=\{A_1, \cdots, A_n\}$ に対して 行列 $T=(t_{ij})$ を

$$t_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } f(\operatorname{int} B_i) \cap \operatorname{int} B_j \neq \emptyset \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とし、Σ を $\mathcal{A}$ を symbol とし T によって決まる finite type の subshift とする。

$$\pi: \Sigma \longrightarrow \Omega_s$$

を $\pi((a_i)_{i\in Z}) = \bigcap_{i \in Z} f^{-i}(a_i)$ とすると π は Ω_s の上への map で $f\pi = \pi p$ となる (semi-conjugate であるという。)

このとき $N>0$ があって $\# \pi^{-1}(x) < N$ for $\forall x \in \Omega_s$ となる。[2] このことから、

1. $x \in \Sigma$ が periodic $\Longleftrightarrow$ $\pi(x)$ が periodic。([2])
2. finite type の subshift の zeta 函数

$$\zeta(z) = \exp \sum_m \frac{N_m}{m} z^m$$

(N_m は周期 m の periodic point の個数) は有理函数であることより、Axiom A 微分同型の zeta 函数も有理函数。([5])

3. Minimal set は 0 次元である。([2])

§5. hyperbolic invariant set の場合.

$\Lambda \subset M$ が f の closed hyperbolic invariant set のとき subshift Σ (finite type とは限らない) からの surjection $\pi: \Sigma \longrightarrow \Lambda$ があって $f\pi = \pi\rho$ となる (もっと一般的に expansive map に対して適当な subshift からの semi-conjugacy がある)([3])。しかし periodic point をかぞえる場合は finite type の subshift が重要である。

Λ の近傍 U が与えられたとき $\Lambda \subset \Lambda' \subset U$ なる hyperbolic inv set があって適当な finite type の subshift Σ からの semi-conjugacy $\pi: \Sigma \longrightarrow \Lambda'$ がある([4])。従って Anosov 微分同型 ($\Omega = M$ を仮定しない) に対しても finite type の subshift からの semi-conjugacy がある。ただし、この場合、$K > 0$ があって $\#\pi^{-1}(x) < K$ for $\forall x \in \Lambda'$

となるようにできるかどうかは、わからない。

References.

[1] R, Bowen ; Markov partitions for Axiom A diffeomorphisms. Amer. J. Math. 92 (1970) 725 - 745.

[2] ―――――― ; Markov partitions and minimal sets for Axiom A diffeomorphism, Amer. J. Math. 92 (1970) 902-918

[3] H.B. Keynes and J.B. Robertson ; Generators for topological entropy and expansiveness. Math. Systems Theory 3 ( ) 51-59

[4] M. Kurata ; Hartman's theorem for hyperbolic sets, to appear.

[5] A. Manning ; Axiom A diffeomorphisms have rational zeta functions. Bull. London Math. Soc. 3 (1971). 215 - 220.

[6] S. Smale ; Differentiable dynamical systems. B.A.M.S 73 (1967) 747 - 817.