

コルモゴロフ, ヤトロフスキー, ビスクノフ型の
 非線型拡散方程式

大阪市立大, 理, 亀高 惟倫

非線型拡散方程式に対する初期値問題

$$(1) \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 \right] u = f(u), & 0 \leq u \leq 1 \\ u(x, 0) = u_0(x) \end{cases} \quad \begin{matrix} (x, t) \in \mathbb{R}^1 \times (0, \infty) \\ x \in \mathbb{R}^1 \end{matrix}$$

を考える。以下の仮定を置く。

仮定: $f(\xi) \in C^\infty[0, 1]$, $f(0) = f(1) = 0$, $f'(0) > 0 > f'(1)$,
 $f(\xi) > 0$, $f'(\xi) \xi - f(\xi) \geq 0$ $\xi \in (0, 1)$.

この仮定の下で (1) はコルモゴロフ, ヤトロフスキー, ビスクノフ型とよぶ事がある。 $u = w(x + 2\lambda t)$ を (1) に代入し $\lambda > 0$ とすると

$$(2) \quad w'' - 2\lambda w' + f(w) = 0, \quad 0 \leq w \leq 1 \quad x \in \mathbb{R}^1$$

を得る。(2) は常に自明な解 $w \equiv 0$ と $w \equiv 1$ を持つ。

又 (2) は $(x, 1) \rightarrow (-x, -1)$ なる変換が成り立つから $\lambda \geq 0$ と仮定する。 (2) の自明な解を (1) の進行波解とよぶ。 1937年ワルモゴロフ, ポトロフスキー, ビスクリフ [1] は次の事を示した。

(i) $0 \leq \lambda < \lambda_0 \equiv \sqrt{f'(0)}$ ならば (2) の解は $w \equiv 0$ と $w \equiv 1$ の自明な解のみ。

(ii) $\lambda \geq \lambda_0$ ならば (2) と規格化条件 $w(0) = \frac{1}{2}$ は唯一の解 $w_\lambda(x)$ を定む。 $w'_\lambda(x) > 0$ $x \in \mathbb{R}^1$, $w_\lambda(-\infty) = 0$, $w_\lambda(+\infty) = 1$ が成り立つ。

(iii) 初期値 $u_0(x) = 1$ ($x > 0$), $= 0$ ($x < 0$) から出発した (1) の解 $u(x, t)$ に対し $t \rightarrow \infty$ とするとき

$$(\text{opt } x) \left\{ u(x + u^{-1}(\xi, t), t) - w_{\lambda_0}(x + w_{\lambda_0}^{-1}(\xi)) \right\} \searrow 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u^{-1}(\xi, t) \rightarrow -2\lambda_0$$

がある。上の収束は $x \in \mathbb{R}^1$ への一様収束 $\xi \in (0, 1)$ への u の連続性による。ここで $u^{-1}(\xi, t)$,

$$w_{\lambda_0}^{-1}(\xi) \text{ は } u(u^{-1}(\xi, t), t) = \xi, \quad w_{\lambda_0}(w_{\lambda_0}^{-1}(\xi)) = \xi$$

による。また $\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) > 0$ に注意)

(iii) は次の事を意味する。入射側の階段関数から出発した (1) の解 $u(x, t)$ は高々一定 ($u = \xi$) の値をとり続ける観測者がながめると時間の経過とともに一番おきな進行波

と波形が整，マ行くなるように見える。又観測者の移動速度は一番おおい進行波の速度 $-2\lambda_0$ と近くなる。

以上の結果を改良する事が目的である。

$$(3) \quad M = \{u(x); u(x) > 0 \quad x \in \mathbb{R}^1, u(-\infty) = 0, u(+\infty) = 1\}$$

と可なり。 $u(x,t)$ はなぬるか？、任意に固定して $t \geq 0$ とすれば $u(x,t) \in M$ と可なり。

$$(4) \quad u(u^{-1}(\xi, \tau), \tau) = \xi \quad (\xi, \tau) \in (0,1) \times [0, \infty)$$

$$(5) \quad \hat{u}(\xi, \tau) = u'(u^{-1}(\xi, \tau), \tau) \quad \left(\hat{u} = \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

よ？、マ変換 “ \wedge ” を定義する。(後々 KPP 変換と呼ぶでおく)。

$$(6) \quad \begin{cases} \xi = u(x,t) \\ \tau = t \end{cases} \quad \text{又は} \quad \begin{cases} x = u^{-1}(\xi, \tau) \\ t = \tau \end{cases}$$

は微分同型 $\mathbb{R}^1 \times [0, \infty) \ni (x,t) \rightarrow (\xi, \tau) \in (0,1) \times [0, \infty)$

と可なり。以下 $u'(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,t)$, $\hat{u}(x,t) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,t)$

$\hat{u}(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} \hat{u}(\xi, \tau)$, $\hat{u}(\xi, \tau) = \frac{\partial}{\partial \tau} \hat{u}(\xi, \tau)$ のように

略記する。

定理 1 $\lambda \geq \lambda_0$ と可なり。(2) の進行波解 $w_\lambda(x)$ の

KPP 変換 $\hat{w}_\lambda(\xi) = w_\lambda'(w_\lambda^{-1}(\xi))$ は次の性質を持つ。

$$(7) \quad \hat{w}_\lambda(\xi) \in C^1[0,1] \cap C^\infty(0,1)$$

$$(8) \quad \hat{w}_\lambda(\xi) > 0 \quad \xi \in (0,1)$$

$$(9) \quad \hat{w}_\lambda(0) = \hat{w}_\lambda(1) = 0$$

$$\hat{w}'_{\lambda}(0) = \tau_{-}(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - \lambda_0^2} > 0$$

$$\hat{w}'_{\lambda}(1) = \tau_{-}(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - f'(1)} < 0$$

$$(10) \quad \lim_{\xi \rightarrow +0} \xi \sqrt{-\log \xi} \hat{w}_{\lambda}''(\xi) = 0$$

$$(11) \quad \hat{w}_{\lambda_2}(\xi) < \hat{w}_{\lambda_1}(\xi) \quad \xi \in (0, 1) \quad \lambda_2 > \lambda_1 \geq \lambda_0$$

$$(12) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} \sup_{0 < \xi < 1} \left| \hat{w}_{\lambda}(\xi) - \hat{w}_{\lambda_1}(\xi) \right| = 0$$

$$(13) \quad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \sup_{0 < \xi < 1} \hat{w}_{\lambda}(\xi) = 0$$

次の定理は本質的とは [1] で示されている。

定理 2. (1) の解 $u(x, t)$ は初期値 $u_0(x) \in M$ を持つと予り。次のように $\hat{u}_{\infty}(\xi)$ の存在を規定する。

$$(14) \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \hat{u}(\xi, \tau) = \hat{u}_{\infty}(\xi) \quad \xi \in (0, 1)$$

又補助条件として次のように $\lambda_1 \geq \lambda_0$ 及び $\bullet W(x) \in M$ があるものと予り。

$$(15) \quad \hat{w}_{\lambda_1}(\xi) \leq \hat{u}(\xi, \tau) \leq W(\xi) \quad (\xi, \tau) \in (0, 1) \times [0, \infty)$$

このとき $\lambda \geq \lambda_0$ があり、 τ 次の事が成り立つ。

$$(16) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^1} \left| \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^j \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^k u(x + u^{-1}(\xi, \tau), \tau) - \right.$$

$$\left. - (2\lambda)^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{j+k} \hat{w}_{\lambda}(x + w_{\lambda}^{-1}(\xi)) \right| = 0$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$(17) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} (u^{-1})'(\xi, \tau) = -2\lambda$$

より

$$(18) \quad \dot{u}(\xi, \tau) \leq 0 \quad (\text{又は } \geq 0) \quad (\xi, \tau) \in (0, 1) \times [0, \infty)$$

が成り立ちは $\tau \uparrow +\infty$ と $\tau \downarrow 0$ と

$$(19) \quad (\text{resp. } \left\{ u(x + u^{-1}(\xi, \tau), \tau) - w_\lambda(x + w_\lambda^{-1}(\xi)) \right\} \searrow 0 \\ (\text{又は } \nearrow 0))$$

が成り立つ。

この定理からわかるように重要な真は (14), (15) を保障する条件と初期値 $u_0(x)$ に対する条件として与えらる。

先ず (変形) 誤差函数 $E(x)$ を次式で定義する。

$$(20) \quad E(x) = \int_{-\infty}^x H(y, 1) dy$$

$$H(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

適当な $\delta_0 > 0$ があつて、 $0 < \delta \leq \delta_0$ なる任意の δ に対して

$$(21) \quad u_0(x) = E(x/\sqrt{\delta}) \quad x \in \mathbb{R}^1$$

が与えらる $u_0(x)$ は $\dot{u}_0(\xi) > w_{\lambda_0}'(\xi)$ と

$$\left\{ \dot{u}_0'(\xi) + f(\xi)/u_0(\xi) \right\}' \leq 0 \quad \xi \in (0, 1) \quad \text{を満す。}$$

定理 3. (1) の解 $u(x, t)$ が (21) が与えらる初期値 $u_0(x)$ を持つとき次の事が成り立つ。

$$(22) \quad \hat{u}(\xi, \tau) \geq \hat{w}_{\lambda_0}(\xi) \quad (\xi, \tau) \in (0, 1) \times [0, \infty)$$

$$(23) \quad \hat{u}(\xi, \tau) \leq 0$$

$$(24) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sup_{0 < \xi < 1} \left| \hat{u}(\xi, \tau) - \hat{w}_{\lambda_0}(\xi) \right| = 0$$

さうして定理 3 の (16) (17) が $\lambda \geq \lambda_0$ で置き代えて成り立つ。特に $\tau \uparrow +\infty$ とするとき

$$(25) \quad (\text{sgn } x) \left\{ u(x + u^{-1}(\xi, \tau), \tau) - w_{\lambda_0}(x + w_{\lambda_0}^{-1}(\xi)) \right\} \searrow 0$$

が成り立つ。

定理 4. $u(x, t)$ と $u_0(x)$ は定理 3 での $\lambda \geq \lambda_0$ のとき
 成り立つ。 (1) の解 $v(x, t)$ が初期値 $v_0(x) \in M$ を持つ。

$$(26) \quad \hat{w}_{\lambda_0}(\xi) \leq \hat{v}_0(\xi) \leq \hat{u}_0(\xi) \quad \xi \in (0, 1)$$

が成り立つとす。このとき

$$(27) \quad \hat{w}_{\lambda_0}(\xi) \leq \hat{v}(\xi, \tau) \leq \hat{u}(\xi, \tau) \quad (\xi, \tau) \in (0, 1) \times [0, \infty)$$

が成り立ち、さうして定理 3 の結論 (16) (17) が $u(x, t)$ と $v(x, t)$ で $\lambda \geq \lambda_0$ で置き代えて成り立つ。

次の定理をのける準備として、関数のクラス N を次のように定義する。すなわち $u_0(x) \in N$ は次の事を意味する。 $u_0(x) \in M$ である、

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_0(\xi) \in C^1[0, 1] \cap C^2(0, 1) \\ \hat{u}_0(0) = \hat{u}_0(1) = 0 \quad \hat{u}_0'(0) > 0 > \hat{u}_0'(1) \\ \xi(1-\xi) \hat{u}_0''(\xi) \text{ は } \xi \in (0, 1) \text{ に対し有界} \end{array} \right.$$

定理 5 任意に $\lambda \geq \lambda_0$ と固定する。 (1) の解

$u_k(x, t)$ ($k=1, 2$) が初期値 $u_{k0}(x) \in N$ を持つ。
次の事を規定する。

$$(29) \quad \hat{u}'_{10}(0) = \hat{u}'_{20}(0) = \sigma_-(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - \lambda_0^2}$$

$$(30) \quad \hat{u}'_{20}(1) > \tau_-(\lambda) = \lambda - \sqrt{\lambda^2 - f'(1)} > \hat{u}'_{10}(1)$$

$$(31) \quad \{ \hat{u}'_{20} + f(\xi) / \hat{u}_{20} \}' \geq 0 \geq \{ \hat{u}'_{10} + f(\xi) / \hat{u}_{10} \}' \quad \xi \in (0, 1)$$

このとき次の事が成り立つ。

$$(32) \quad \hat{u}_2(\xi, \tau) \geq 0 \geq \hat{u}_1(\xi, \tau) \quad (\xi, \tau) \in (0, 1) \times [0, \infty)$$

$$(33) \quad \hat{u}_{10}(\xi) > \hat{w}_\lambda(\xi) > \hat{u}_{20}(\xi) \quad \xi \in (0, 1)$$

$$(34) \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \sup_{\substack{0 < \xi < 1 \\ k=1, 2}} | \hat{u}_k(\xi, \tau) - \hat{w}_\lambda(\xi) | = 0$$

さらに定理 2 の (16) (17) が $u(x, t) \in u_k(x, t)$ で置き
代えられ立つ。 特に $\tau \uparrow +\infty$ とすれば

$$(35) \quad (-1)^{k-1} (\operatorname{sgn} \tau) \{ u_k(x + u_k^{-1}(\xi, \tau), \tau) - \hat{w}_\lambda(x + \hat{w}_\lambda^{-1}(\xi)) \} \downarrow 0$$

が成り立つ。

定理 6 任意に $\lambda \geq \lambda_0$ と固定する。 $u_k(x, t)$ と

$u_{k0}(x)$ ($k=1, 2$) は定理 5 の λ とおくとする。

(1) の解 $v(x, t)$ が初期値 $v_0(x) \in M$ を持つ

$$(36) \quad \hat{u}_{10}(\xi) \geq \hat{v}_0(\xi) \geq \hat{u}_{20}(\xi) \quad \xi \in (0, 1)$$

が成り立つとする。 このとき

$$(37) \quad \hat{u}_1(\xi, \tau) \geq \hat{v}(\xi, \tau) \geq \hat{u}_2(\xi, \tau) \quad (\xi, \tau) \in (0, 1) \times [0, \infty)$$

が成り立ち、さらに定理 2 の (16) (17) が $u(x,t)$ と $v(x,t)$ で置き代え成り立つ。

以上の結論の証明には次の 3 つの関係式が基本的な役割を演ずる。

$$(38) \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - c_1(x,t) \right] (u' - \hat{w}_\lambda(u)) = 0 \\ c_1(x,t) = f'(u) + (u' + \hat{w}_\lambda(u)) \hat{w}_\lambda''(u) \end{cases}$$

$$(39) \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - c_2(x,t) \right] \dot{u}(u(x,t), t) = 0 \\ c_2(x,t) = f'(u) + 2 \left\{ u'''/u' - (u''/u')^2 \right\} \\ \dot{u}(u(x,t), t) = u''' + (u'')^2/u' - f(u)u''/u' + f'(u)/u' \end{cases}$$

$$(40) \quad \begin{cases} \left[\frac{\partial}{\partial t} - \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 - c_3(x,t) \right] \left\{ \hat{u}_k(v(x,t), t) - v'(x,t) \right\} = 0 \\ c_3(x,t) = f'(v) + (v' + \hat{u}_k(v,t)) \hat{u}_k''(v,t) \end{cases}$$

又定理 5 とおいて (29) ~ (31) を与える $u_{k_0}(x) \in N$ がある事は別に保障しなげれば「取らぬか」、 $\equiv \equiv$ は省略した。詳しくは [2] を参照して下さい。

References

- [1] Kolmogorov, A., I. Petrovskii and N. Piskunov, Etude de l'equation de la diffusion avec croissance de la quantite de matiere et son application a un probleme biologique, Bulletin de l'Universite d'Etat a Moscou, Serie International. Vol. I Section A (1937), 1-25.
- [2] Kametaka, Y., On the nonlinear diffusion equation of Kolmogorov-Petrovskii-Piskunov type, (to appear in Osaka J. Math.)