数理解析研究所講究録
第259巻 1976年 35-43

半順序集合系におけるMöbius関数とグラフ

東海大　　恵羅 博

近年，平面上のグラフのChromatic Polynomialを拡張して，その理論を発展させようとする試みが，いくつかなされている。（文献[1]）グラフのColoring問題或は特徴付け等の問題に於いて，Chromatic Polynomialの理論がどの程度の重要性を持つかは，これからの問題である。ここでは，その一つのアプローチとして，G.C.Rota（文献[2]）によって指摘された，半順序集合上のMöbius関数とグラフのChromatic Polynomialとの関連について述べる。

I. 半順序集合系上のMöbius関数

Pを任意の半順序集合とする。Pの2元x，yに対して，Pの部分集合$\{z \in P \mid x \leq z \leq y\}$を$x, y$を両端とする区間といい$[x, y]$で表わす。Pの任意の区間$[x, y]$が有限集合となるとき，Pを局所有限な半順序集合という。Pに最大元，最小元が存在するとき，それぞれI_P，O_Pで表わすことにする。以後，Pはすべて局所有限な半順序集合を表わすものとする。

$P \times P$上の実数値関数 f で次の性質をもつものを考える。

$$x, y \in P, \quad x \not\leq y \text{ のとき}, \quad f(x,y) = 0$$

上のような関数 f 全体の集合を今, $A(P)$ で表わすことにする。$A(P)$ の任意の元 f, g に対して, f と g の積 $f*g$ を次のように定める。

$$x, y \in P, \quad (f*g)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)\, g(z,y)$$

通常の和, スカラー倍の定義及び上の積 $*$ によって, $A(P)$ は実数体 R 上の多元環をなす。この多元環 $A(P)$ を incidence algebra と呼ぶ。$A(P)$ の単位元は Kronecker の delta δ である。

すなわち,
$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & (x = y) \\ 0 & (x \neq y) \end{cases}$$

特に, zeta function と呼ばれる次のような ζ を考える。

$$\zeta(x,y) = \begin{cases} 1 & (x \leq y \text{ のとき}) \\ 0 & (x \not\leq y \text{ のとき}) \end{cases}$$

$A(P)$ の任意の元 f に対して,

$$(f*\zeta)(x,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)\, \zeta(z,y) = \sum_{x \leq z \leq y} f(x,z)$$

が成り立つ。

P 上の Möbius 関数 μ とは, $A(P)$ の元で次の式により帰納的に定義されるものである。

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x,z) = \delta(x,y)$$

上式の代わりに, $\sum_{x \leq z \leq y} \mu(z,y) = \delta(x,y)$ によっても同値の定

義が得られる。定義から $\zeta * \mu = \mu * \zeta = \delta$ となる。すなわち μ は $A(P)$ に於ける ζ の逆元である。

$A(P)$ の2元 f, g に対して $g = f * \zeta$ が成り立っているとき，上に述べたことから，$f = g * \mu$ となる。このことから，ただちに，よく知られた次の定理が得られる。

定理1（Möbiusの反転公式）　f を P 上の実数値関数で，次の性質をもつものとする。「ある $p \in P$ が存在して，$x \ngeq p$ ならば $f(x) = 0$」　このとき，

$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y)$ が成り立っているとすれば，

$$f(x) = \sum_{y \leq x} g(y) \mu(y, x)$$

2つの局所有限な半順序集合 P, Q の間での Möbius関数の関係については，P, Q の間に Galois対応と呼ばれる写像が存在するとき，応用上有用なつながりのあることが知られている。

P から Q への写像 $\rho : P \longrightarrow Q$ と Q から P への写像 $\pi : Q \longrightarrow P$ が存在して，次の(i)，(ii)の性質をもつとき，それらを P と Q の間の Galois対応と呼ぶ。

(i) $p_1, p_2 \in P$，$p_1 \geq p_2 \Rightarrow \rho(p_1) \leq \rho(p_2)$

$q_1, q_2 \in Q$，$q_1 \geq q_2 \Rightarrow \pi(q_1) \leq \pi(q_2)$

(ii) 任意の $p \in P$，$q \in Q$ に対して $\pi\rho(p) \geq p$，$\rho\pi(q) \geq q$

<u>定理2</u>　P, Qを有限な半順序集合とし，Pは最小元0_P，Qは最小元0_Q，最大元I_Qをもつとする。P, Qの間にGalois対応

$\rho: P \longrightarrow Q$，$\pi: Q \to P$　で　「$\pi(x) = 0_P \Leftrightarrow x = I_Q$」を満たすものが存在するとき，次の式が成り立つ。

$$\mu_Q(0_Q, I_Q) = \sum_{[a:\rho(a)=0_Q]} \mu_P(0_P, a)$$

ただしμ_P，μ_QはそれぞれP及びQ上のMöbius関数を表わす。

Lを有限束とする。Lの部分集合Rで次の条件を満たすものを考える。「$I_L, 0_L \notin R$，　$x \neq I_L \Rightarrow y \geq x$なるRの元$y$が存在する。」　Rの部分集合全体のつくるBool束をB(R)とする。今，LからB(R)への写像　$\pi: L \longrightarrow B(R)$　を

$$\pi(x) = \{ y \in R \mid y \geq x \}$$

と定義する。またB(R)からLへの写像$\rho: B(R) \longrightarrow L$　を

$$\rho(A) = \wedge A, \quad 特に\ \rho(\phi) = I_L \qquad (ただし，\wedge A：Aの下限)$$

と定義する。このとき，π, ρはLとB(R)の間のGalois対応をなす。この場合に定理2を適用すれば，LのMöbius関数μ_Lは

$$\mu_L(0, I) = \sum_{[A \subset R,\ \wedge A = 0_L]} \mu_{B(R)}(\phi, A)$$

集合Sの元の数を$n(S)$で表わすことにすれば，

$\mu_{B(R)}(\phi, A) = (-1)^{n(A)}$であるから，上式をかき直せば，

$$\mu_L(0, I) = \sum_{[A \subset R,\ \wedge A = 0_L]} (-1)^{n(A)}$$

以上のことから，次の有限束のMöbius関数についての定理を

得る。

定理３　$L \supset R$ が上に述べた条件をみたすとき，R の部分集合 A で，$\wedge A = 0_L$，$n(A) = k$ となるものの数を g_k で表わすことにすれば

$$\mu_L(0, I) = g_2 - g_3 + g_4 - \cdots + (-1)^{n(k)} g_{n(k)}$$

上の定理の中で，R に特別なものを考えることにより，更に精密な結果を得る。まず，有限束 L の部分集合 C で次の条件を満たすものを考える。

(i) $0_L, I_L \notin C$　　(ii) $x, y \in C \Rightarrow x \nless y,\ x \ngtr y$

(iii) 0_L と I_L の間の任意の極大な chain を $0_L < x_1 < \cdots < x_r < I_L$ とすれば，必ずある i に対して　$x_i \in C$　$(1 \leq i \leq r)$

このような C を L の cross-cut と呼ぶ。特に C として，

$C = \{ x \in L \mid n([x, I_L]) = 2 \}$　とすれば，定理３より

$$\mu_L(0, I) = g_2 - g_3 + g_4 - \cdots + (-1)^{n(C)} g_{n(C)}$$

ただし g_k は C の部分集合 S で $\wedge S = 0$，$\vee S = I$，$n(S) = k$ となるものの数を表わす。

一般に，勝手な cross-cut に対しても上式が成り立つことが知られている。

定理４　L を有限束，$C \subset L$ を L の cross-cut，g_k を上に述べた数とすれば，$\mu_L(0, I) = g_2 - g_3 + g_4 - \cdots + (-1)^{n(C)} g_{n(C)}$

II グラフの Chromatic Polynomial

G を loop 及び multi-edge を含まず，方向付けされていないグラフとする。G の点の集合を $V(G)$，線の集合を $E(G)$ で表わす。

自然数 n に対して，写像 $f: V(G) \longrightarrow \{1, 2, \cdots, n\}$ で次の性質を持つものを G の n-coloring という。「a と b とが G の隣り合う2点のとき，$f(a) \neq f(b)$」

G の n-coloring 全体の数を $C(G, n)$ で表わすことにする。与えられた G に対して，$C(G, n) \neq 0$ となる最小の n を求めることが興味のある問題となる。平面上の地図に関する4色問題は次のように述べることができる。「任意の極大平面グラフ G に関して，$C(G, 4) > 0$ が成り立つか。」

$C(G, n)$ は n の多項式で表わされる。今，$V(G)$ の k 個の部分集合への直和分割 $V(G) = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$，$V_i \cap V_j = \phi$ $(i \neq j)$ で，「$\forall i$, $x, y \in V_i \Rightarrow x$ と y とは G の中で隣り合わない。」という性質をもつものを考える。m_r を上のような直和分割で $k = r$ であるもの全体の数を表わすとすれば次の定理が成り立つ。

<u>定理5</u> $\quad C(G, n) = \sum_{r=1}^{n} m_r n_{(r)}$

ここに $\quad n_{(r)} = n \cdot (n-1) \cdots (n-r+1)$

次の定理も $C(G,n)$ の定義より直ちにわかる。

<u>定理</u>6　Gが連結成分 $G_1, G_2, \cdots G_{p_0}$ に分割されるとき，

$$C(G,n) = C(G_1,n)\cdot C(G_2,n)\cdots C(G_{p_0},n)$$

Gの連結成分の数をp_0，点の数をα_0とすれば，上の２つの定理より，$C(G,n)$ は次数α_0の monic な多項式で，n^{p_0}を因数にもつことがわかる。したがって，

$$C(G,n) = n^{p_0}P(G,n)$$

と表わすことができる。ここに$P(G,n)$ は次数$\alpha_0 - p_0$ の多項式である。$C(G,n)$ を Gの Chromatic Polynomial と呼ぶ。

上記の$P(G,n)$はグラフ的に次のような解釈ができる。

Gの n-coloring 全体の集合をAとする。Gが連結成分$G_1, G_2, \cdots G_{p_0}$ に分割されるとき，$f, g \in A$ に対して，

$$\forall a \in G_i \ ,\quad f(a) - g(a) = k_i \quad ,\quad k_i：定数$$

がすべてのiに関して成り立つとき，$f \sim g$ と定義すれば$\sim$は同値関係となる。$P(G,n)$は$\sim$によって決まるAの同値類の数を表わす。

Ⅲ グラフ上の束におけるMöbius関数

Gの線集合$E(G)$の部分集合全体によってつくられる束をMで表わすことにする。Mにおける閉作用子を次のように定義

する。

$S \in M$,　$\overline{S} = \{e \in E(G) \mid e$の2つの端点はSによってつくられるGの部分グラフの同じ連結成分に含まれる。$\}$

Mの閉元全体からなる部分束をL(G)で表わす。L(G)の最大元，最小元をそれぞれI，0で表わすことにする。

L(G)においては次のようなchainに関する条件が満たされる。

<u>定理</u>7　L(G)の全順序部分集合で，長さが極大なものの長さはすべて等しい。

<u>系</u>　L(G)の任意の区間$[x, y]$においても上記のchainに関する条件は満たされる。

$p \in L(G)$に対して，$[0, p]$の極大chainの長さをpのrankといい　$r(p)$で表わす。

GのChromatic PolynomialはL(G)において次のようにMöbius関数を係数とする多項式に展開することができる。

<u>定理</u>8　GのChromatic Polynomialを$C(G, n) = n^{k_0} P(G, n)$とすれば

$$P(G, n) = \sum_{S \in L(G)} \mu_{L(G)}(0, S)\, n^{h(G) - r(S) - 1}$$

ただし　$h(G)$はL(G)の高さ，すなわち　$r(I) + 1$を表わす。

Gの連結成分の数をk_0，点の数をα_0とすれば

$k(G) = \alpha_0 - p_0 + 1$ 　なる関係式がある。したがって定理に代入すれば，

$$C(G, n) = \sum_{S \in L(G)} \mu_{L(G)}(0, S)\, n^{\alpha_0 - r(S)}$$

$\mu_{L(G)}$に関して，定理4を使って計算する方法は，次のようになる。

グラフGの平面上dualなグラフをG^*で表わすことにする。グラフGのcircuitsの集合$\{C_i\}$が　$\cup C_i = G$　となるとき，$\{C_i\}$はspanningであるという。

極大平面グラフGのMöbius関数に関して，次の結果が定理4より導かれる。

<u>定理</u>9　G^*のspanningなcircuitsの集合で，k個のcircuitsからなるものの数をS_kで表わすとき，L(G)のMöbius関数μは次の式で表わされる。

$$\mu(0, I) = -S_1 + S_2 - S_3 + \cdots + (-1)^n S_n$$

ただし，G^*のspanningなcircuitsの集合のうちで，元の数の最も多いものの元の数をnとする。

以上

参考文献

1. Norman Biggs, 1974. Cambridge Uni. Press "Algebraic Graph Theory"

2. G.C. Rota, 1964. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie Band 2 Heft 4 "On the Foundation of Combinatorial Theory I. Theory of Möbius Functions"