数理解析研究所講究録
第 259 巻 1976 年 44-61

和積定理とReduced Mapsについて

東海大・理・情報数理　成島 弘

non-isomorphic reduced maps の数え上げを具体例として、置換群作用の数え上げの定理と束作用の数え上げの定理との融合を模索する。つぎに、それぞれの基本的な定理を述べる。Ωを対象の空でない集合とし、$G(\Omega)$をΩ上の置換群とする（Ωが明らかなときは単にGとかく）。Ωの任意の2元x, yに対して、$x \equiv y \iff \exists \alpha \in G, \alpha(x) = y$と定めると、$\equiv$は同値関係となる。$\equiv$による同値類の集合を$\Omega/G$で表わし、$\Omega/G$の$x$を含むクラス（軌道）を$C_x$で示す。また、$x \in \Omega$を不変に保つ$G$の部分群、すなわち、$\{\alpha \in G \mid \alpha(x) = x\}$を$G_x$で示す。つぎの補題1と定理1はよく知られている[1, 2]。

<u>補題1</u>　　$m(C_x) \times m(G_x) = m(G)$

ここで、集合Xに対して$m(X)$はXの個数を示す。

<u>定理1</u>　　$m(\Omega/G) = (1/m(G)) \sum_{\alpha \in G} m(H_\alpha)$

$$H_\alpha = \{x \in \Omega \mid \alpha(x) = x\}$$

$(L, \circ)$を有限半束とし、上半束ならば$\circ$は"join"，下半束ならば"meet"を表わすものとする。$f: L \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega)$が、

$$f(x \circ y) \supseteq f(x) \cap f(y) \quad (\text{双対のとき}, f(x \circ y) \subseteq f(x) \cup f(y))$$

を満すとき、fを弱射（week morphism）という。

<u>定理2</u>　$f: L \longrightarrow \mathcal{P}(\Omega)$が弱射であるとき、

$$m\Big(\bigcup_{a \in L} f(a)\Big) = \sum_{c \in C} (-1)^{\ell(c)} \Big(\bigcap_{a \in c} f(a)\Big)$$

CはLの鎖の全体、$\ell(c)$は鎖cの長さ

双対のときは、

$$m\Big(\bigcap_{a \in L} f(a)\Big) = \sum_{c \in C} (-1)^{\ell(c)} \Big(\bigcup_{a \in c} f(a)\Big)$$

この定理の証明はいくつか与えられている。Rota〔3の4章〕の定理1を用いた証明が〔7〕に示めされているが直接証明も可能である。Lとして鎖をとると通常の包除原理となる。

定理1，2を具体的に応用するときは、関係によって誘導される巾集合間のガロア対応を基礎とする〔5, 3, 9〕。$\mathcal{A}$を群、束など抽象的な構造をもった集合とする。$\mathcal{E}$をΩと$\mathcal{A}$との間の関係とする。このとき、$\mathcal{E}$の逆関係をεとし、

$x \in \Omega$に対して、$\tilde{\mathcal{E}}(x) = \{a \in \mathcal{A} \mid x \mathcal{E} a\}$

$X \in \mathcal{P}(\Omega)$に対して、$\tilde{\mathcal{E}}(X) = \bigcap_{x \in X} \tilde{\mathcal{E}}(x)$

$a \in \mathcal{A}$に対して、$\tilde{\varepsilon}(a) = \{x \in \Omega \mid a \varepsilon x\}$

$A \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$に対して、$\tilde{\varepsilon}(A) = \bigcap_{a \in A} \tilde{\varepsilon}(a)$

と定めると、ガロア対応

$$\phi(\Omega) \underset{\hat{\varepsilon}}{\overset{\tilde{\varepsilon}}{\rightleftarrows}} \phi(\mathcal{A})$$

が定まる。ここで、$\tilde{\varepsilon}$は"characterization"，$\hat{\varepsilon}$は"enumeration"を意味している。すなわち、$\tilde{\varepsilon}$は対象の性質を抽象化すること、$\hat{\varepsilon}$はある抽象化された性質をもっている対象を求めること，それぞれの役目をもっている。数え上げについて言うならば、$\hat{\varepsilon}(A)=\phi$は性質あるいは構造Aをもつ対象が存在しないこと意味し、$\hat{\varepsilon}(A)\neq\phi$ならば、性質あるいは構造Aをもつ対象が存在して，"どのくらいあるか"，また、"ある不変量が存在し、その不変量をもとにして，$m(\hat{\varepsilon}(A))$を公式化可能かどうか"などが問題となる。

ここで、具体的にΩを$\{f:S\longrightarrow T\}$（$=\mathcal{F}(S,T)$とかく）とし、$\mathcal{A}$として$G(S)\times G(T)$（$G(S)$はS上の置換群，$G(T)$はT上の置換群）を考える。$f,g\in\mathcal{F}(S,T)$に対して，

$$\exists\alpha\in G(S),\ \exists\beta\in G(T),\ \forall s\in S,\ \beta(f(s))=g(\alpha(s))$$

となるとき、fとgとは同パターン（$G(S)\times G(T)$に関して）であるといい、$f\simeq g$とかく。$\simeq$による同値類の集合の個数，すなわち、$m(\mathcal{F}(S,T)/G(S)\times G(T))$を求めるための基礎として、$\mathcal{F}(S,T)$と$G(S)\times G(T)$との間に、つぎの関係を定める。$f\in\mathcal{F}(S,T)$，$(\alpha,\beta)\in G(S)\times G(T)$に対して，

$$f\,\mathcal{G}\,(\alpha,\beta) \iff \forall s\in S,\ \beta(f(s))=f(\alpha(s))$$

と定めると，関係$\mathcal{G}$及び$\mathcal{G}$の逆関係$\mathcal{H}$によって、ガロア対応

$$\phi(\mathcal{F}(S,T)) \underset{\tilde{\mathcal{H}}}{\overset{\tilde{\mathcal{G}}}{\rightleftarrows}} \phi(G(S)\times G(T))$$

が誘導される。ここで、$\tilde{H}$が数え上げの役目をもち、$\alpha \in G(S)$の巡回置換指数$(p_1, p_2, \cdots, p_\ell)$（$\alpha$が長さ$i$の巡回置換を$p_i$個もつことを示す），$\beta \in G(T)$の巡回置換指数$(q_1, q_2, \cdots, q_m)$を不変量として、$m(\tilde{H}(\alpha,\beta))$はつぎのように公式化される[1，4]。

$$m(\tilde{H}(\alpha,\beta)) = \prod_{i=1}^{\ell} \Big(\sum_{j|i} j q_j \Big)^{p_i}$$

$$= \Big(\frac{\partial}{\partial z_1}\Big)^{p_1} \Big(\frac{\partial}{\partial z_2}\Big)^{p_2} \cdots \Big(\frac{\partial}{\partial z_\ell}\Big)^{p_\ell} \Big(e^{q_1 z_1} \cdots e^{(\sum_{j|\ell} j q_j) z_\ell} \Big) \Big|_{z_1 = \cdots = z_\ell = 0}$$

（$j|i$ はjはiの約数を示す）

従って、Mapping Patterns の個数（$m(\mathcal{F}(S,T)/G(S)\times G(T))$）は定理１を適用することによって、つぎの定理から得られる。

<u>定理３</u>　$m(\mathcal{F}(S,T)/G(S)\times G(T)) = (1/m(G(S)\times G(T))) \sum_{(\alpha,\beta)\in G(S)\times G(T)} m(\tilde{H}(\alpha,\beta))$

とくに、$G(S)$, $G(T)$をそれぞれS上の対称群，T上の対称群とすれば、fとgが同パターンであることは同型であることと一致し、mapping patterns の個数は non-isomorphic mappings の個数と一致する。また、$\mathcal{F}(S,S)$を$\mathcal{F}(S)$で表わし、$G(S)\times G(S)$の対角元の集合を$G(S)$と同一視すると、つぎの系をえる。

<u>系１</u>　$m(\mathcal{F}(S)/G(S)) = (1/m(G(S))) \sum_{\alpha \in G(S)} m(\tilde{H}(\alpha))$

$$m(\tilde{H}(\alpha)) = \prod_{i=1}^{\ell} \Big(\sum_{j|i} j p_j \Big)^{p_i}$$

更に、$m(S)=n$とし，$G(S)$としてS上の対称群$\mathfrak{S}_n$をとるとき、$\mathfrak{S}_n$の共役類の集合を$\mathfrak{S}_n^*$で表わすと，$m(\mathfrak{S}_n) = n!$であり，同じ巡回置換指数をもつ共役類の元の個数は $n!/(\prod_{i=1}^{n} p_i!\, i^{p_i})$

であるから、$\mathfrak{F}(S)$の同型でないmappingsの数を求めるつぎの系をえる。

系2　$m(\mathfrak{F}(S)/\mathfrak{S}_n) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n^*} \left(\prod_{i=1}^{n} p_i!\, i^{p_i}\right)^{-1} \prod_{i=1}^{n} \left(\sum_{j|i} j p_j\right)^{p_i}$

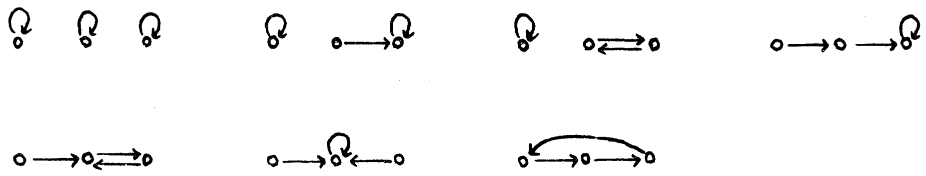
ただし、αの巡回指数が$(p_1, p_2, \cdots, p_n)$である。また、

$\sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_n^*}$ は $\sum_{\substack{(p_1, p_2, \cdots, p_n) \\ p_1 + 2p_2 + \cdots + np_n = n}}$ に等しい。

例1　$S = \{1, 2, 3\}$ とする。$\mathfrak{S}_3$の共役類は3個あり、それぞれの巡回指数が、$(3, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$であるから、

$$m(\mathfrak{F}(S)/\mathfrak{S}_3) = (3^3/3!) + (3/2) + (3/3) = 7$$

となる。同型でない7個のmappingsを図示すると、



となる。

定理1、定理3、系1、系2の置換群作用の系列(ここに述べられていない多項式型の定理も含めて)は、関係によって誘導されるガロア対応によって基礎づけることを除いて、Burnside, Frobenius に始まり、Redfield, Polya, R.L.Davis, DeBruijn, Harary, Read, M.A.Harrison, … によって詳細に研究され、色ぬり、mapping, tree, グラフ, オートマトンなどの同型でないものの数え上げに有効に使われている。とこ

ろで、ガロア対応に於けるもう一方の写像Ψは、しばしば、自己同型群として、mapping，グラフ，オートマトンなどの構造を特徴づけるために用いられている。

つぎに、reduced mappingsの数え上げを具体例として、最近、著者によって展開されている、定理2から始まる束作用の系列を述べる。PL(S)，PL(T)をそれぞれS、Tの分割束とする。$f \in \mathcal{F}(S,T)$，$(\pi,\tau) \in PL(S) \times PL(T)$に対して、

$$\forall s_1, s_2 \in S \ (s_1 \pi s_2 \longrightarrow f(s_1) \tau f(s_2))$$

を満す（$x, y \in X$，$\nu \in PL(X)$に対して、$x \nu y$はxとyがνの同じブロックに含まれることを示す）とき，fは

$$f : \pi \longrightarrow \tau \quad , \ f(x) = B_\tau(f(x)) \quad , x \in \pi, \ x \in X$$

に既約化（reduce）される（$B_\tau(f(x))$はτの$f(x)$を含むブロックを示す）。与えられた$f \in \mathcal{F}(S,T)$の可能な既約化すべてを考えるため、Ωとして$\mathcal{F}(S,T)$，$\mathcal{A}$としてPL(S)×PL(T)を考え、つぎの関係Ξを導入する。$f \in \mathcal{F}(S,T)$，$(\pi,\tau) \in PL(S) \times PL(T)$に対して，

$$f \, \Xi \, (\pi,\tau) \iff \forall s_1, s_2 \in S \ (s_1 \pi s_2 \longrightarrow f(s_1) \tau f(s_2))$$

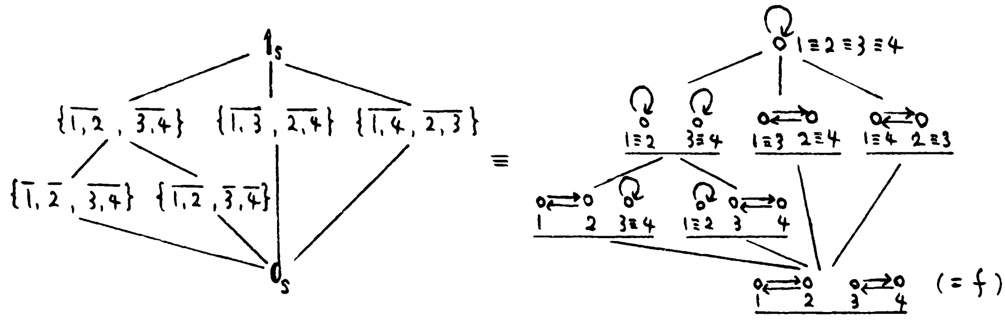
と定めると，Ξによって写像

$$\Phi(\mathcal{F}(S,T)) \xrightarrow{\ \tilde{\Xi}\ } \Phi(PL(S) \times PL(T))$$

が誘導される。ここで、$F \in \Phi(\mathcal{F}(S,T))$に対して，$\tilde{\Xi}(F)$は部分束（PL(S)×PL(T)の）となり、Fの既約過程と呼ばれる。この概

念は $S=T$ のとき、系列機械(sequential machine)上の分割対(partition pair)の束として、Hartmanis と Stearns によって導入され、系列機械の構造を特徴づけるために用いられている。更に、Hartmanis と Stearns は分割対の束を抽象化することによって pair algebra を定め、そのなかで、構造論上重要な役目をもつ"Mm束" を導入している〔6〕。ところで、任意の $f\in\mathfrak{F}(S,T)$ に対して、$\{(\pi,1_T)\mid\pi\in PL(S)\}\subseteq\tilde{\mathfrak{L}}(f)$ であり、$\{(0_S,\tau)\mid\tau\in PL(T)\}\subseteq\tilde{\mathfrak{L}}(f)$ （1_T, 0_S はそれぞれ $PL(T)$ の最大元、$PL(S)$ の最小元を示す）であるから、$F\in\wp(\mathfrak{F}(S,T))$ に対して、$\tilde{\mathfrak{L}}(F)=\bigcap_{f\in F}\tilde{\mathfrak{L}}(f)\supseteq\{(\pi,1_T)\mid\pi\in PL(S)\}$, $\{(0_S,\tau)\mid\tau\in PL(T)\}$ を満し、かつ $PL(S)\times PL(T)$ の部分束であるから、$\tilde{\mathfrak{L}}(F)$ は $PL(S)\times PL(T)$ 上の pair algebra であることは容易にわかる。ここで、特に、任意の $f\in\mathfrak{F}(S,T)$ が $f:1_S\longrightarrow 1_T$ と自明に既約化されることに注意する。ここで、$\mathfrak{L}$ を $\mathfrak{F}(S)$ と $PL(S)\times PL(S)$ の対角集合に制限した場合の既約過程の例をあげる。このときの $\mathfrak{L}$ を、特に、$\mathcal{L}$ で表わす。

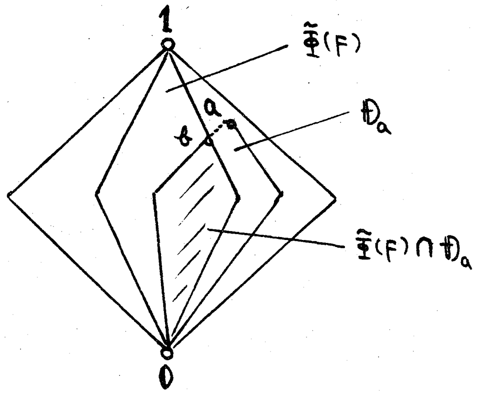
例2　$S=\{1,2,3,4\}$, $f=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&1&4&3\end{pmatrix}$ に対して、



$\tilde{\mathcal{L}}(f)$

例2でわかるように、$\widetilde{\mathcal{L}}(f)$ が f の既約過程を明らかにしていることが良くわかる。$F \in \mathcal{P}(\mathcal{F}(S))$ に対して、$\widetilde{\mathcal{L}}(F)$ は、Hartmanis と Stearns によって定められた系列機械上の S.P.(substitution property)分割の束に相当している(系列機械 M の状態遷移関数 $\delta : S\times\Sigma\to S$ は $\delta_i : S\times\{i\}\longrightarrow S$, $i\in\Sigma$ と同等であるから $F=\{\delta_i \mid i\in\Sigma\}$ とすれば、$\widetilde{\mathcal{L}}(F)=\bigcap_{i\in\Sigma}\widetilde{\mathcal{L}}(\delta_i)$ となり M 上の S.P. 分割の束と一致する)。

さて、我々の本題に入ろう。一般に、$f\in\mathcal{F}(S,T)$ を構成要素としてもつシステムに於て、他の条件により f の既約化が制限される場合が多い。たとえば、系列機械の場合には、出力関数によって定まる出力一致分割(output consistent partition)によって状態遷移関数の既約化が制限される。このことを抽象化すると、$PL(S)\times PL(T)$ に領域 $\mathfrak{D}_a=\{x\in PL(S)\times PL(T) \mid x\le a\}$ を定め、F の既約化を $\widetilde{\mathfrak{L}}(F)\cap\mathfrak{D}_a$ に於て調べることになる。この領域 $\mathfrak{D}_a$ を F の既約条件と呼び、$\widetilde{\mathfrak{L}}(F)\cap\mathfrak{D}_a$ を F の既約条件 $\mathfrak{D}_a$ に関する既約過程と呼ぶ。$\widetilde{\mathfrak{L}}(F)\cap\mathfrak{D}_a$ は $PL(S)\times PL(T)$ の部分束である。$\widetilde{\mathfrak{L}}(F)\cap\mathfrak{D}_a$ の最大値が b ならば、F は既約化されても高々 $\mathbf{F}:\pi\longrightarrow\tau$ $\quad(b=(\pi,\tau))$ である。例2に於て



a	b
$\{\overline{1,2},\overline{3,4}\}$	$\{\overline{1,2},\overline{3,4}\}$
$\{\overline{1},\overline{2,3,4}\}$	$\{\overline{1,2},\overline{3,4}\}$
$\{\overline{1,4},\overline{2,3}\}$	0

系列機械に於て、a を最大な出力一致分割とすれば、b は最大な出力一致 S.P. 分割 (π_R) となり、$F:\pi\longrightarrow\tau$ ($b=(\pi,\tau)$) は既約化された系列機械に相当する。つぎに、逆に、既約条件 D_a と $b\in PL(S)\times PL(T)$ が与えられているとき $Max(\Phi(f)\cap D_a)=b$ となる $f\in \mathcal{F}(S,T)$ の全体、すなわち

$$\{f\in\mathcal{F}(S,T)\mid Max(\Phi(f)\cap D_a)=b\}\ ({}_a\mathcal{F}_b \text{ とおく})$$

を考える。既約条件 D_a のもとで、${}_a\mathcal{F}_b$ は既約化されても高々 $f:\pi\longrightarrow\tau$ ($b=(\pi,\tau)$) である $f\in\mathcal{F}(S,T)$ の全体であり、特に、${}_a\mathcal{F}_0$ は既約化されない (non-reduced, self-reduced) $f\in\mathcal{F}(S,T)$ の全体となる。ここで、${}_a\mathcal{F}_b$ の特徴づけ及び数え上げを行うために、Φ の逆関係 P と P によって誘導される写像 $\tilde{P}$ を定め、ガロア対応

$$\wp(\mathcal{F}(S,T)) \underset{\tilde{P}}{\overset{\Phi}{\rightleftarrows}} \wp(PL(S)\times PL(T))$$

を考える。更に、これを $\mathcal{F}(S,T)^p$ と $PL(S)\times PL(T)$ の間に拡張するために、つぎの関係 Φ^p を導入する。$f=(f_1,f_2,\cdots,f_p)\in\mathcal{F}(S,T)^p$, $(\pi,\tau)\in PL(S)\times PL(T)$ に対して、

$$f\,\Phi^p(\pi,\tau) \iff \forall s_1,s_2\in S,\ \forall i\ (1\le i\le p)\ (s_1\pi s_2 \longrightarrow f_i(s_1)\tau f_i(s_2))$$

と定める。すると、Φ^p 及び Φ^p の逆関係 P^p によって、ガロア対応

$$\wp(\mathcal{F}(S,T)^p) \underset{\tilde{P}^p}{\overset{\tilde{\Phi}^p}{\rightleftarrows}} \wp(PL(S)\times PL(T))$$

が誘導される。以下において、一般に、X と Y との間の関係

R によって誘導される写像 $\tilde{R}:\wp(X)\longrightarrow\wp(Y)$ において、特に、$\forall x\in X$, $\tilde{R}(\{x\})$ を扱うときには $R(x)$ と略記する（すなわち、$R: X\longrightarrow\wp(Y)$ である）。$\alpha: \mathcal{F}(S,T)^p \longrightarrow \wp(\mathcal{F}(S,T))$ を $f\in\mathcal{F}(S,T)$ に対して $\alpha(f)=\{f_i \mid 1\le i\le p\}$（ただし、$f=(f_1,f_2,\cdots,f_p)$）と定めると、$\Phi^p(f)=\tilde{\Phi}(\alpha(f))$ $(f\in\mathcal{F}(S,T)^p)$ であることは容易にわかる。また、Γ^p と Γ との間につぎの補題が成立する。

<u>補題2</u>　任意の $(\pi,\tau)\in PL(S)\times PL(T)$ に対して

$$\Gamma^p(\pi,\tau)=\Gamma(\pi,\tau)^p$$

つぎに、${}_a\mathcal{F}_b$ を $\mathcal{F}(S,T)^p$ の場合に拡張し、

$$\{f\in\mathcal{F}(S,T)^p \mid Max(\Phi^p(f)\cap\Theta_a)=b\}$$

を ${}_a\mathcal{F}_b^{(p)}$ で表わす。以下、${}_a\mathcal{F}_b^{(p)}$ について調べる。まず、Γ^p によって、つぎのように特徴づけられる。

<u>補題3</u>　任意の $a,b\in PL(S)\times PL(T)$ に対して

$${}_a\mathcal{F}_b^{(p)}=\Gamma^p(b)\cap\Big(\bigcup_{x\in(b,a]}\Gamma^p(x)\Big)^c$$

従って、

$$m({}_a\mathcal{F}_b^{(p)})=m(\Gamma^p(b))-m\Big(\Gamma^p(b)\cap\Big(\bigcup_{x\in(b,a]}\Gamma^p(x)\Big)\Big)$$

ここで、補題2より

$$m(\Gamma^p(b))=m(\Gamma(b)^p)=m(\Gamma(b))^p \quad \cdots(\mathrm{I})$$

となる。また、$\tilde{\Gamma}^p$ の定義より

$$m\Big(\Gamma^p(b)\cap\Big(\bigcup_{x\in(b,a]}\Gamma^p(x)\Big)\Big)=m\Big(\bigcup_{x\in(b,a]}\tilde{\Gamma}^p(\{b,x\})\Big)$$

となる。ここで、定理2の適用を考えるため、$\{\{b,x\}\mid x\in(b,a]\}$

上に$\tilde{\Gamma}^p$によって弱射(week morphism)が定まるか否かを調べる。$\{\{b, x\} \mid x \in (b, a]\}$に"join"と"meet"を$x, y \in (b, a]$に対して

$$\{b, x\} \vee \{b, y\} = \{b, x \vee y\}, \quad \{b, x\} \wedge \{b, y\} = \{b, x \wedge y\}$$

と定めると、$\{\{b, x\} \mid x \in (b, a]\}$は$(b, a]$と束同型となる。$(b, a]$は上半束であるから、$\tilde{\Gamma}^p$が"join"について弱射であるか否かを調べる。任意の$x, y \in (b, a]$に対して

$$\tilde{\Gamma}^p(\{b, x\} \vee \{b, y\}) = \tilde{\Gamma}^p(\{b, x \vee y\}) = \Gamma^p(b) \cap \Gamma^p(x \vee y)$$

$$\tilde{\Gamma}^p(\{b, x\}) \cap \tilde{\Gamma}^p(\{b, y\}) = \Gamma^p(b) \cap \Gamma^p(x) \cap \Gamma^p(y)$$

であるから、$\Gamma^p(x \vee y) \supseteq \Gamma^p(x) \cap \Gamma^p(y)$を示せば十分である。補題2より、

$$\Gamma^p(x \vee y) = \Gamma(x \vee y)^p, \quad \Gamma^p(x) \cap \Gamma^p(y) = (\Gamma(x) \cap \Gamma(y))^p$$

となり、Γが弱射であること、すなわち、

$$\Gamma(x \vee y) \supseteq \Gamma(x) \cap \Gamma(y)$$

を満すことは[7, 定理2]において証明されているので、Γ^pも弱射となることが示された。従って、$m(\bigcup_{x \in (b, a]} \tilde{\Gamma}^p(\{b, x\}))$に定理2が適用でき、

$$m\Big(\bigcup_{x \in (b, a]} \tilde{\Gamma}^p(\{b, x\})\Big) = \sum_{c \in C} (-1)^{\ell(c)} m(\tilde{\Gamma}^p(\{b\} \cup c))$$

Cは$(b, a]$の鎖の全体

となり、補題2より

$$m\Big(\bigcup_{x \in (b, a]} \tilde{\Gamma}^p(\{b, x\})\Big) = \sum_{c \in C} (-1)^{\ell(c)} m(\tilde{\Gamma}(\{b\} \cup c))^p \quad \cdots (\mathrm{II})$$

となる。従って、(I), (II)をまとめて、つぎの定理をえる。

<u>定理4</u>　任意の $a, b \in PL(S) \times PL(T)$ に対して

$$m(a\mathfrak{F}_b^{(p)}) = \sum_{\mathbb{C} \in C^*} (-1)^{l(\mathbb{C})} m(\widetilde{\mathfrak{P}}(\mathbb{C}))^p$$

$$C^* = \{b\} \cup \{\{b\} \cup \mathbb{C} \mid \mathbb{C}\text{ は }(b, a]\text{ の鎖}\}$$

従って、$m(a\mathfrak{F}_b^{(p)})$ を算術的に求めるためには、$PL(S) \times PL(T)$ の任意の鎖 $\mathbb{C}$ に対して $m(\widetilde{\mathfrak{P}}(\mathbb{C}))$ が算術的に求まれば十分である。このことについて、つぎの補題をえる。

<u>補題4</u>　$PL(S) \times PL(T)$ の任意の鎖 $\mathbb{C}$ に対して

$$m(\widetilde{\mathfrak{P}}(\mathbb{C})) = \prod_{X_n \in \pi_n} \sum_{Y_n \in \tau_n} \cdots \prod_{X_i \in X_{i+1}(\pi_i)} \sum_{Y_i \in Y_{i+1}(\tau_i)} \cdots \prod_{X_0 \in X_1(\pi_0)} \sum_{Y_0 \in Y_1(\tau_0)} m(Y_0)^{m(X_0)}$$

ただし、$\mathbb{C} : (\pi_0, \tau_0) \leq (\pi_1, \tau_1) \leq \cdots \leq (\pi_n, \tau_n)$, $X_{n+1}(\pi_n) = \pi_n$, $Y_{n+1}(\tau_n) = \tau_n$

故に、$m(a\mathfrak{F}_b^{(p)})$ が算術的に求められる。$b = \mathbf{0}$ のとき、$\widetilde{\mathfrak{P}}(\mathbf{0}) = \mathfrak{F}(S, T)$ に注意すれば、つぎの系をえる。

<u>系3</u>　任意の $a \in PL(S) \times PL(T)$ に対して

$$m(a\mathfrak{F}_{\mathbf{0}}^{(p)}) = m(\mathfrak{F}(S, T))^p - \sum_{\mathbb{C} \in C} (-1)^{l(\mathbb{C})} m(\widetilde{\mathfrak{P}}(\mathbb{C}))^p$$

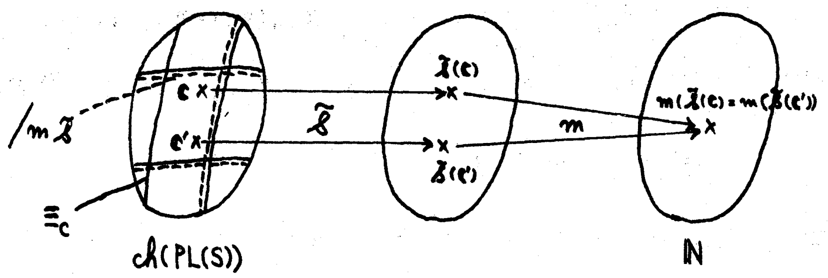
C は $(\mathbf{0}, a]$ の鎖の全体

つぎに、Φ^p を $\mathfrak{F}(S)^p$ と $PL(S)$ との間に制限した関係 $\mathcal{L}^p$ と $\mathcal{L}^p$ の逆関係 $\mathcal{S}^p$（すなわち、Γ^p を $PL(S)$ と $\mathfrak{F}(S)^p$ との間に制限したもの）とによって誘導されるガロア対応

$$\wp(\mathfrak{F}(S)^p) \underset{\widetilde{\mathcal{S}}^p}{\overset{\widetilde{\mathcal{L}}^p}{\rightleftarrows}} \wp(PL(S))$$

のもとでの具体的な計算例を考える。ところで、S を入力個数 p の系列機械の状態の集合とすれば、$\pi \in PL(S)$ に対して、$\pi\mathfrak{F}_{\mathbf{0}}^{(p)}$ は最大な出力一致分割 π のもとで、既約化されない系

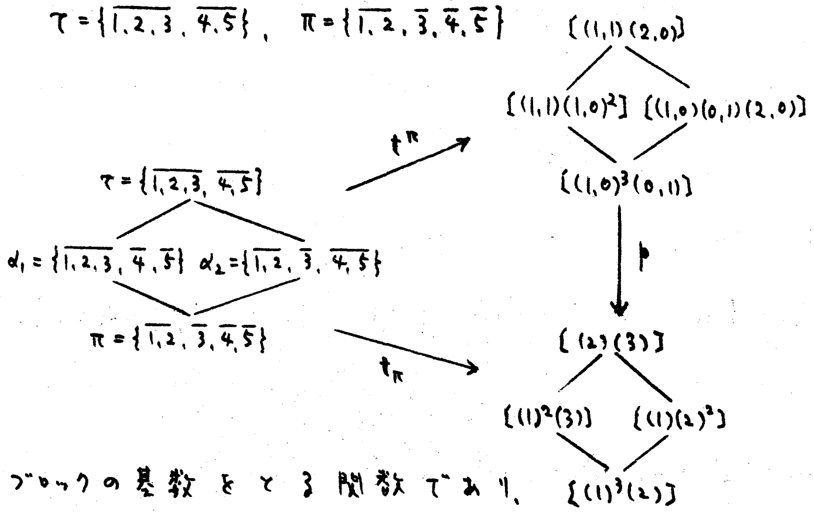
列機械の状態遷移関数の全体に相当するものである。後に、このことについて正確に述べる。定理4より、$p=1$ のとき、すなわち、$\pi\mathcal{F}_0$ の計算例を示めせば十分であることがわかる。補題4と系3より、原理的には $(0, \pi]$ の任意の鎖 c に対して $m(\tilde{\mathcal{Z}}(c))$ を計算すればよいのであるが、$(0, \pi]$ の鎖が多い場合には大変な計算となる。そこで、$PL(S)$ の鎖の全体を $ch(PL(S))$ で表わし、鎖 c, c' に対して、$c \equiv_c c'$ ならば $m(\tilde{\mathcal{Z}}(c)) = m(\tilde{\mathcal{Z}}(c'))$ となる基数合同関係と呼ばれる同値関係 $\equiv_c$ を導入する。



$ch(PL(S))$ の元 $c = \pi_0 \leq \pi_1 \leq \cdots \leq \pi_n$, $c' = \pi'_0 \leq \pi'_1 \leq \cdots \leq \pi'_n$ に対して、$c \equiv_c c'$ であるとは、全単射 $f : \pi_0 \longrightarrow \pi'_0$ が存在して、任意の $B \in \pi_0$ に対して、$m(B) = m(f(B))$ でありかつ任意の i $(1 \leq i \leq n)$ に対して $\pi'_i = \{ \sum_{B \in X(\pi_0)} f(B) \mid X \in \pi_i \}$ となることである。この f は基数合同写像と呼ばれる。鎖 c を不変にする基数合同写像の全体は群となり、これを基数合同群といい、CG_c で表わす。$ch(PL(S))/\equiv_c$ の鎖 c を含むクラスを C_c とするとき、$m(C_c)$ は $m(CG_c)$ をもとにして計算される。基数合同関係は〔8〕において詳しく調べられ、$l(c) \leq 2$ に対してベクトルと数の分割をもとにした C_c の不変量が与えられ、そ

の不変量をもとにした $m(C_\ell)$ の公式が与えられている（もちろん、補題1が十分に使われている）。ここでは例によって説明するにとどめる。$S=\{1,2,3,4,5\}$ とする。

例3　$\tau=\{\overline{1,2,3},\overline{4,5}\}$, $\pi=\{\overline{1,2},\overline{3},\overline{4},\overline{5}\}$

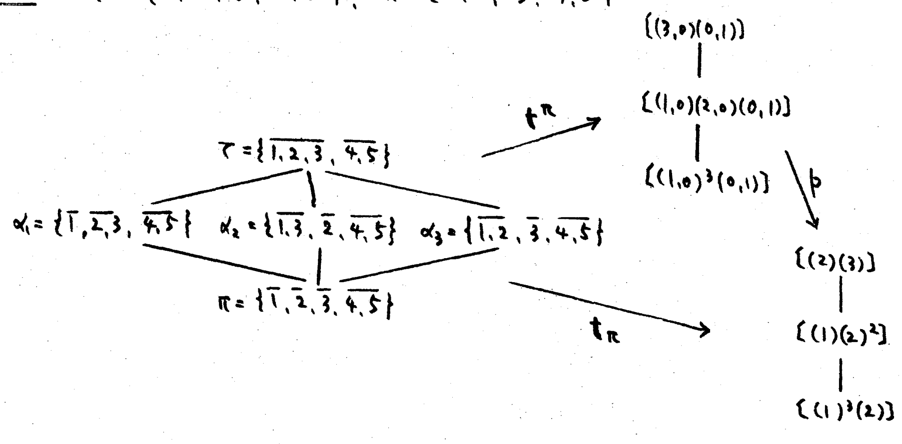


t_π はブロックの基数をとる関数であり、

t^π は S の分割が π のブロックをどのように含むかを示す関数であり、例えば $t^\pi(\alpha_1)=[(1,1)(1,0)^2]$ は α_1 のブロック $\{1,2,3\}$ が π の基数1のブロック1個と基数2のブロック1個とからなり α_1 のブロック $\{4\}$ は π の基数1のブロック1個からなっている（$\{5\}$ についても同じ）ことを示す。p は例えば $p((1,1)(1,0)^2)=[(1\cdot1+2\cdot1)(1\cdot1+2\cdot0)^2]=[(1)^2(3)]$ とする関数。

このとき、$[\pi,\tau]$ には基数合同な鎖はない。

例4　$\tau=\{\overline{1,2,3},\overline{4,5}\}$, $\pi=\{\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4,5}\}$



この場合は、$[\pi, \tau]$ に含まれる鎖を基数合同関係によって分類すると、長さ0の鎖に対して π, $\alpha_1 \equiv_c \alpha_2 \equiv_c \alpha_3$, τ, 長さ1の鎖に対して $\pi < \alpha_1 \equiv_c \pi < \alpha_2 \equiv_c \pi < \alpha_3$, $\pi < \tau$, $\alpha_1 < \tau \equiv_c \alpha_2 < \tau \equiv \alpha_3 < \tau$, 長さ2の鎖に対して $\pi < \alpha_1 < \tau \equiv_c \pi < \alpha_2 < \tau \equiv_c \pi < \alpha_3 < \tau$ となる。

つぎに、$\tau\mathfrak{F}_\pi$ の計算例を示す。

<u>例5</u>　例3の π, τ をとると、

$$C^* = \{\pi,\ \pi < \alpha_1,\ \pi < \alpha_2,\ \pi < \tau,\ \pi < \alpha_1 < \tau,\ \pi < \alpha_2 < \tau\}$$

となり、

$$m(\widetilde{\mathfrak{F}}(\pi)) = (2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2)(2^1 + 1^1 + 1^1 + 1^1)^3$$

$$m(\widetilde{\mathfrak{F}}(\pi < \alpha_1)) = ((2^2 + 1^2)(2^1 + 1^1) + 1^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1)((2^1 + 1^1) + 1^1 + 1^1)^2$$

$$m(\widetilde{\mathfrak{F}}(\pi < \alpha_2)) = (2^2 + 1^2 + (1^2 + 1^2))(2^1 + 1^1 + (1^1 + 1^1))(2^1 \cdot 2^1 + 1^1 \cdot 1^1 + (1^1 + 1^1)^2)$$

$$m(\widetilde{\mathfrak{F}}(\pi < \tau)) = ((2^2 + 1^2)(2^1 + 1^1) + (1^2 + 1^2)(1^1 + 1^1))((2^1 + 1^1)^2 + (1^1 + 1^1)^2)$$

$$m(\widetilde{\mathfrak{F}}(\pi < \alpha_1 < \tau)) = ((2^2 + 1^2)(2^1 + 1^1) + (1^2 \cdot 1^1 + 1^2 \cdot 1^1))((2^1 + 1^1)^2 + (1^1 + 1^1)^2)$$

$$m(\widetilde{\mathfrak{F}}(\pi < \alpha_2 < \tau)) = ((2^2 + 1^2)(2^1 + 1^1) + (1^2 + 1^2)(1^1 + 1^1))((2^1 \cdot 2^1 + 1^1 \cdot 1^1) + (1^1 + 1^1)^2)$$

であるから、

$$m(\tau\mathfrak{F}_\pi) = \sum_{c \in C^*} (-1)^{\ell(c)} m(\widetilde{\mathfrak{F}}(c))$$

$$= 875 - (425 + 315 + 247) + 221 + 171$$

$$= 280$$

従って、限約条件 $[\theta, \tau]$ のもとで、限約化されても高々

$$\boldsymbol{f} : \{\overline{1,2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\} \longrightarrow \{\overline{1,2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$$

である $f : S \longrightarrow S$ $(S = \{1, 2, 3, 4, 5\})$ の個数は 280 である。

例 6　例 4 の π, τ をとると、

$$\mathfrak{C}^* = \{\pi,\ \pi<\alpha_1,\ \pi<\alpha_2,\ \pi<\alpha_3,\ \pi<\tau,\ \pi<\alpha_1<\tau,\ \pi<\alpha_2<\tau,\ \pi<\alpha_3<\tau\}$$

となり、例 4 の結果から

$$\pi<\alpha_1 \equiv_c \pi<\alpha_2 \equiv_c \pi<\alpha_3\ ,\quad \pi<\alpha_1<\tau \equiv_c \pi<\alpha_2<\tau \equiv_c \pi<\alpha_3<\tau$$

であるから、$m(\mathfrak{g}(\pi))$ は例 5 と同じであり、長さ 1 の鎖 $\mathfrak{c}$ に
($\pi<\alpha_1$ のグループ)
対して、

$$m(\mathfrak{g}(\mathfrak{c})) = (1^1+(1^1+1^1)+2^1)(1^1+1^1+(1^1+1^1)^2+2^1\cdot 2^1)(1^2+(1^2+1^2)+2^2)$$

であり、長さ 1 の鎖 $\pi<\tau$ に対して、

$$m(\mathfrak{g}(\pi<\tau)) = ((1^1+1^1+1^1)^3+2^1\cdot 2^1\cdot 2^1)((1^2+1^2+1^2)+2^2)$$

となる。長さ 2 の鎖 $\mathfrak{c}$ ($\pi<\alpha_2<\tau$ のグループ) に対して、

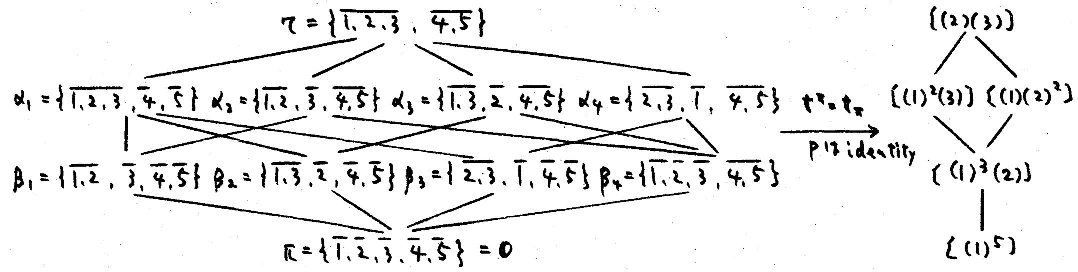
$$m(\mathfrak{g}(\mathfrak{c})) = ((1^1+(1^1+1^1))(1^1\cdot 1^1+(1^1+1^1)^2)+2^1\cdot 2^1\cdot 2^1)((1^2+(1^2+1^2)+2^2)$$

となる。従って、

$$\begin{aligned} m(\tau \mathfrak{F}_\pi) &= \sum_{\mathfrak{c}\in\mathfrak{C}^*} (-1)^{\ell(\mathfrak{c})} m(\mathfrak{g}(\mathfrak{c})) \\ &= 875 - 3\times 315 - 245 + 3\times 161 \\ &= 168 \end{aligned}$$

つぎに $\tau \mathfrak{F}_0$ の計算例を示す。

例 7　$\tau = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\pi = 0$ をとる。



系3より、例5、6と同様に

$$m(\tau\mathfrak{F}_0) = m(\mathfrak{F}(S)) - \sum_{c\in C}(-1)^{\ell(c)} m(\mathcal{S}(c))$$

の展開式によって計算できるが、ここでは、例5、6の結果を用いる。図式に注意すると、

$$m(\tau\mathfrak{F}_0) = 5^5 - \sum_{x\in(0,\tau]} m(\tau\mathfrak{F}_x)$$

$$= 5^5 - (3m(\tau\mathfrak{F}_{\beta_1}) + m(\tau\mathfrak{F}_{\beta_4}) + 3m(\tau\mathfrak{F}_{\alpha_2}) + m(\tau\mathfrak{F}_{\alpha_1}) + m(\tau\mathfrak{F}_\tau))$$

ここで、$m(\tau\mathfrak{F}_{\beta_1})$ と $m(\tau\mathfrak{F}_{\beta_4})$ はそれぞれ例5、例6で求まっているので、その他を計算して

$$= 3125 - (3\times 280 + 168 + 3\times 198 + 348 + 455)$$

$$= 720$$

となる。τのもとで既約化されない $f: S\longrightarrow S$ がかなり多いことがわかる。一般に、$\tau\mathfrak{F}_0$、$\tau\in PL(S)$ を詳しく調べるとともに、S上の置換によって誘導される$\tau\mathfrak{F}_0$上の置換による同値類の個数を一般的に求めることは興味深い。

最後に、前にふれたように、ガロア対応$\{\widetilde{\mathfrak{P}}^P, \widetilde{P}^P\}$と系列機械の分割対及びS.P.分割による特徴づけと数え上げとの関連について述べる。$\mathfrak{F}(S\times\Sigma, T)$ と $PL(S)\times PL(T)$ の間につぎの関係$\mathfrak{P}_\Sigma$を定める。$\delta\in\mathfrak{F}(S\times\Sigma, T)$ と $(\pi,\tau)\in PL(S)\times PL(T)$ に対して、

$$\delta\,\mathfrak{P}_\Sigma(\pi,\tau) \Longleftrightarrow {}^\forall A_1, A_2\in S,\ {}^\forall i\in\Sigma\ (A_1\pi A_2 \longrightarrow \delta(A_1,i)\,\tau\,\delta(A_2,i))$$

と定めると、$\mathfrak{P}_\Sigma$及び$\mathfrak{P}_\Sigma$の逆関係P_Σによって、ガロア対応

$$\wp(\mathfrak{F}(S\times\Sigma, T)) \underset{\widetilde{P}_\Sigma}{\overset{\widetilde{\mathfrak{P}}_\Sigma}{\rightleftarrows}} \wp(PL(S)\times PL(T))$$

が誘導される。ガロア対応 $\{\tilde{\Phi}_\Sigma, \tilde{\Gamma}_\Sigma\}$ と $\{\tilde{\Phi}^p, \tilde{\Gamma}^p\}$ とは、つぎのように関連づけられる。$\Sigma = \{i_1, i_2, \cdots, i_p\}$ とするとき、$\delta \in \mathfrak{F}(S\times\Sigma, T)$ に対して $\beta(\delta) = (\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_p)$ $(\delta_j = \delta \mid S\times\{i_j\})$ と定めると、

$$\beta : \mathfrak{F}(S\times\Sigma, T) \longrightarrow \mathfrak{F}(S, T)^p$$

は全単射であり、任意の $\delta \in \mathfrak{F}(S\times\Sigma, T)$ と $\chi \in PL(S)\times PL(T)$ に対して

$$\Phi_\Sigma(\delta) = \Phi^p(\beta(M)) \quad , \quad \beta(\Gamma_\Sigma(\chi)) = \Gamma^p(\chi)$$

が成立する。$S = T$ の場合及び $\mathfrak{F}(S)$ と $PL(S)$ に制限した場合が、それぞれ、系列機械上の分割対及び S.P. 分割との関連を示すものである。

文献

[1] C.L. Liu, Introduction to Combinatorial Mathematics, Chap 4.5 McGraw-Hill, New York, 1968. (伊理訳、組合せ数学入門).

[2] C. Berge, Principle of Combinatorics, Academic Press, New York, 1971. (野崎訳、組合せ論の基礎).

[3] G.-C. Rota, On the Foundation of Combinatorial Theory I, Theory of Möbius functions, Z. Wahrsheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 2 (1964), 340-368

[4] N.G. De Bruijn, Enumeration of Mapping Patterns, J. of Combinatorial Theory (A) 12, 14-20 (1972).

[5] O. Ore, Theory of Graphs, Vol XXXVIII, Amer. Math. Soc. Coll. Pub. Chap 11, 1962.

[6] J. Hartmanis and R.E. Stearns, Algebraic Structure Theory of Sequential Machines, Chap 2, 3, Prentice Hall, 1966.

[7] H. Narushima, Principle of Inclusion-Exclusion on Semilattices, J. Combinatorial Theory (A) 17, 196-203 (1974).

[8] H. Narushima, Order Maps and Cardinal Congruence Classes on Partitions, Proc. Fac. Sci. Tokai Univ. Vol. IX, 1974.

[9] 成島弘, 組合せ理論の基礎, 数解研講究録 179, 1-18, 1973.

[10] M. Hall, JR, Combinatorial Theory, Blaisdell Pub. 1967. (岩堀信子訳、組合せ理論)