

中間グラフについて

(The Many Facets of the Middle Graphs)

日本医科大 秋山 仁

序文

新しいグラフの族, 中間グラフなる概念は, 浜田, 吉村 [17], Chikkodimath, Sampathkumar [13] によって独立に発見される。このグラフは誘導部分グラフとして, 線グラフを含み, 一方全グラフの部分グラフであることより, [17] に於て, 中間グラフ (middle graph) と呼ばれ, [13] に於ては, 全グラフと性質が似ていることから 疑全グラフ (semi-total graph) と呼ばれている。線グラフ, 全グラフが, Whitney, Sabidussi, Beineke, Krausz, Rooij & Wilf (以上 [19]), Behzad ([6], [7]) 等により幅広く研究されて来た。この小論に於て, 中間グラフについても同様な事柄, 即ち, 同型性, 特徴付け, 連結性, 周回性, 平面性, サイクル数, 被覆数, 独立数, 染色数, 固有値, スペクトラム等, 今迄研究されたものを証明を付けて列挙する。([4], [5], [6] 参照)。

## §1 中間グラフの定義及び性質

本論文においては、グラフとは有限、無向 (undirected) で単一線 (single lines) をもち、ループ (loop) をもたないとする。ここで説明のないすべての定義は [19] に在る。

## 定義11

$u_1, u_2, \dots, u_p$ ;  $x_1 = \{u_{i_1}, u_{j_1}\}$ ,  $x_2 = \{u_{i_2}, u_{j_2}\}$ ,  
 $\dots$ ,  $x_g = \{u_{i_g}, u_{j_g}\}$  を1つの  $(p, g)$  グラフ  $G$  の  $p$  点と  $g$  線を表わすものとする。

$V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ ,  $X(G) = \{x_1, x_2, \dots, x_g\}$ ,

$V'(G) = \{\{u_1\}, \{u_2\}, \dots, \{u_p\}\}$  とおく。

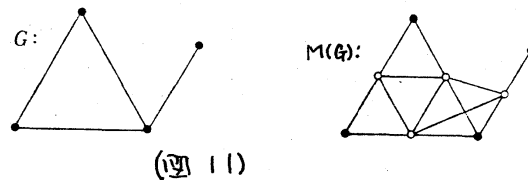
## 定義12

グラフ  $M(G)$  を  $V(G)$  に関する1つの交グラフ (intersection graph)  $\Omega(F)$  として定義する。

ここに  $F = V'(G) \cup X(G) = \{\{u_1\}, \dots, \{u_p\}, x_1, \dots, x_g\}$ 。

$M(G) = \Omega(F)$  と書いて、グラフ  $M(G)$  を  $G$  の中間グラフ

(middle graph of  $G$ ) と呼ぶ。(図11参照)



(図11)

命題11  $L(G)$ ,  $T(G)$ ,  $S(G)$  はそれぞれ  $G$  の線グラフ、全グラフ、再分グラフ (subdivision graph) を表わすとする。

このとき次式が成り立つ。

$$a) L(G) \subset M(G) \subset T(G), S(G) \subset M(G)$$

$$b) |V(M(G))| = |V(G)| + |V(L(G))| = P + \varphi$$

$$|X(M(G))| = |X(S(G))| + |X(L(G))| = |X(T(G))| -$$

$$|X(G)| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^P (\rho_G(u_i))^2 + \varphi$$

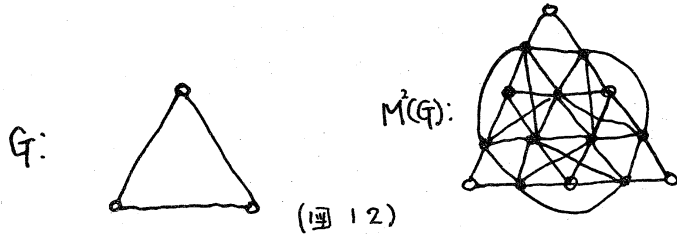
ここに  $|A|$  は集合  $A$  の計数 (cardinality) を意味し、 $\rho_G(u_i)$  は  $G$  における点  $u_i$  の次数 (degree, valency) を意味するものとする。

### 定義 13

反復中間グラフ (iterated middle graph) を次の如くに定義する。

$$M^1(G) = M(G), M^2(G) = M(M(G)), M^k(G) = M(M^{k-1}(G)) \quad k \geq 2$$

(図 12 参照)



命題 12 次の等式が成り立つ。

$$a) \rho_M(u) = \rho_{M^k}(u) = \rho_G(u) \quad \text{for } u \in G$$

$$b) \rho_M(v) = \rho_L(v) + 2 = \rho_G(s) + \rho_G(t) \quad \text{for } v \in L(G),$$

ここに  $s, t$  は、 $v$  に対応する  $G$  内の線  $x$  の両端点である。

命題13  $M(G)$ に於いて、 $M(G)$ は線素 (line disjoint) な完全グラフ  $K_{t_i} (i=1, \dots, P)$  に直和分解され、異なる二つの  $K_{t_i}$  と  $K_{t_j} (i \neq j)$  とは  $u_i, v_j$  が隣接のときに限って、線  $\{u_i, v_j\}$  の再分点を共有する。

定義14

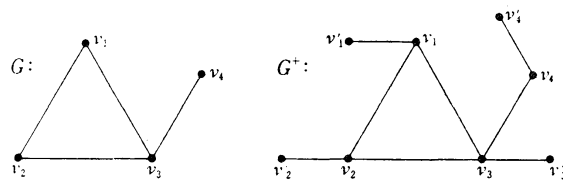
$G$  を任意の  $(P, \varphi)$  グラフとし、その点集合、線集合をそれぞれ  $V(G) = \{u_1, \dots, u_P\}$ ,  $X(G) = \{x_1, \dots, x_\varphi\}$  とする。 $G$  の点と異なり、かつ互に異なる  $P$  個の点  $v_i (i=1, \dots, P)$  および  $P$  個の線  $\{u_i, v_i\} (i=1, \dots, P)$  を  $G$  に付加する。

このとき点集合  $V(G^+) = \{u_1, \dots, u_P, v_1, \dots, v_P\}$ ,

線集合  $X(G^+) = \{\{u_1, v_1\}, \dots, \{u_P, v_P\}, x_1, \dots, x_\varphi\}$  をもつ  $(2P, P + \varphi)$  グラフを得る。このグラフを  $G^+$  と書き、

$G$  のエンドライングラフ (endline graph of  $G$ ) とよぶ。

(図13参照)



(図13)

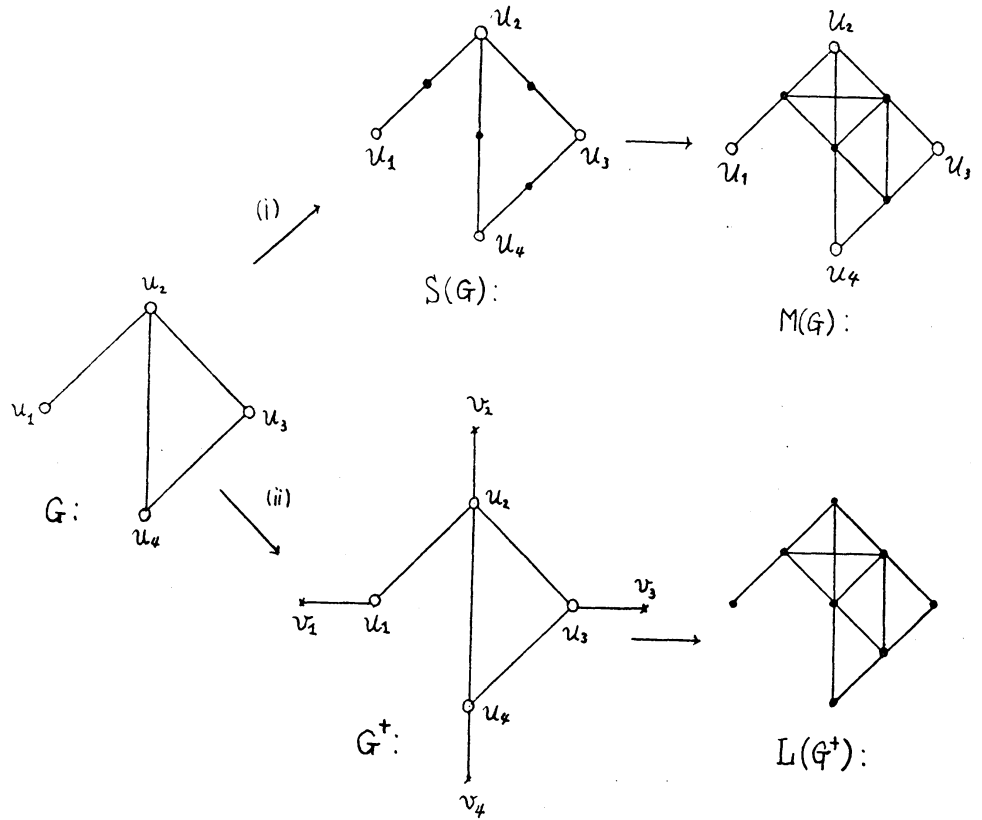
定理11

$G$  を任意のグラフとし、その中間グラフを  $M(G)$  とし、 $G^+$  の線グラフを  $L(G^+)$  とすると、 $L(G^+)$  と  $M(G)$  とは同型である。

即ち

$L(G^+) \cong M(G)$ , ここに  $L(G^+)$  は  $G^+$  の線グラフである。

(図14参照)



(図14)

(証明)

線グラフ及び中間グラフの定義によつて次式が成り立つ。

$$L(G^+) = \Omega(X(G^+)), \quad M(G) = \Omega(V'(G) \cup X(G))$$

(定義12参照)

いま、 $X(G^+)$  の元  $\{u_i, v_i\}$ ,  $x_j$  をそれぞれ  $V'(G) \cup X(G)$  の元  $\{u_i\}$ ,  $x_j$  に対応せしめると、2集合  $X(G^+)$  と  $V'(G) \cup X(G)$

の元の間の1対1対応が得られ、したがってグラフ  $L(G)$  と  $M(G)$  の点の間の1対1対応が得られる。

$v_i (i = 1, \dots, p)$  が  $G$  の  $u_j (j = 1, \dots, p)$  と異なり、かつ互いに異なるという仮定により

$$\{u_i, v_i\} \cap \{u_j, v_j\} = \{u_i\} \cap \{u_j\} = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$$\{u_i, v_i\} \cap x_i = \{u_i\} \cap x_i \quad \text{及} \quad x_i \cap x_j = x_i \cap x_j$$

を得る。これより  $X(G)$  の2元の共通部分と  $V(G) \cup X(G)$  の、これら2元に対応する2元の共通部分が一致することを知る。これよりまた  $L(G)$  内の2点の隣接関係が一致し、 $L(G)$  は  $M(G)$  に同型なことがわかる。

以上により、定理11が証明された。

命題14 連結グラフ  $G$  が、その中間グラフ  $M(G)$  と同型となることはない。

## §2. 中間グラフの同型性について

この章では任意の2グラフの中間グラフが同型ならば、もとの2つのグラフも同型であることを証明する。

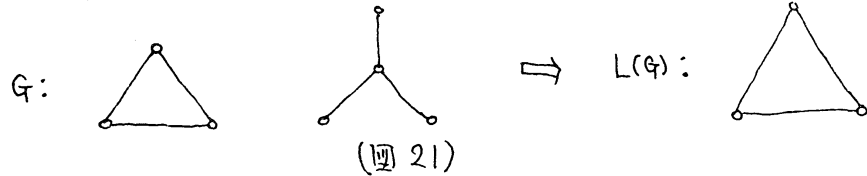
定理の証明のため、次の Whitney [24] の定理を用いる。

定理2A (Whitney [24])

$G$  と  $G'$  を、 $L(G) \cong L(G')$  となる2つの連結グラフとする。

そのとき、 $G, G'$  の 1 つが  $K_3$  で、他が  $K_{1,3}$  である場合を除いて、 $G \cong G'$  となる。

(図 21 参照)



命題 21 一つのグラフ  $H$  が  $G^+$  の形のグラフであるための条件は、 $H$  の各点において 1 つかつただ 1 つの end line (次数 1 の点に接続する線) が存在することである。

定理 21

$G, G'$  を連結グラフとする。 $G, G'$  が同型なるための必要十分条件はそれらの中間グラフ  $M(G), M(G')$  が同型であることである。即ち

$$G \cong G' \iff M(G) \cong M(G')$$

(証明)

$G, G'$  が同型、即  $G \cong G'$  ならば  $M(G) \cong M(G')$  は明らかである。逆に、 $M(G) \cong M(G')$  とする。定理 11 により  $M(G) \cong L(G^+)$ 、 $M(G') \cong L(G'^+)$ 。これと仮定から  $L(G^+) \cong L(G'^+)$

定理 2A より、 $G^+ \cong G'^+$ 、ただし  $G^+, G'^+$  はそれらの「1 つが  $K_{1,3}$  で他が  $K_3$  である」ことはないとする。 $G^+, G'^+$  は命題 21 により、各点においてただ 1 つの end line を持つグラフである。 $G, G'$  は孤立点をもたないから  $G^+, G'^+$  は、

その end points (次数 1 の点) のみが次数 1 で、他の点  
 はすべて 1 より大きな次数をもつ。従って  $G^+$  と  $G'^+$  との  
 同型対応  $\varphi$  においては両者の end points が互いに対応し  
 なければならぬ。従ってまた両者の対応する end points  
 を通る end lines の他端が対応しなければならぬ。そ  
 こで、 $G^+$  の end points を  $u_i (i=1, \dots, P)$ 、end lines  
 を  $(u_i, v_i)$  とすれば同型対応  $\varphi$  によって対応する  $G'^+$   
 の点は  $u_i$  に対しては end points  $u_i'$  であり、 $v_i$  に対して  
 は endlines  $(u_i', v_i')$  の端点  $v_i' (i=1, \dots, P)$  である。  
 いま  $G^+$ 、 $G'^+$  の点が  $\varphi$  によつて上の如く対応づけられたと  
 して、両者のすべての end points  $v_i, v_i' (i=1, \dots, P)$   
 を除去したとする。このとき  $G$  の異なる 2 点  $v_i, v_j (i \neq j)$   
 の間の隣接性には何等の変化がない。このことから、 $G^+$   
 $G'^+$  間の同型対応  $\varphi$  から生じた  $G, G'$  間の点の 1 対 1 対  
 応  $v_i \leftrightarrow v_i'$  が同型対応なることがわかる。ゆえに、 $G^+ \cong G'^+$   
 から  $G \cong G'$  が得られた。再び命題 21 に依れば、 $G^+$  は  
 $K_{1,3}$  でも  $K_3$  でもあり得ないことがわかる。

以上で定理 21 の証明が完結した。

### § 3. 中間グラフの特徴づけ

グラフ  $G$  が、あるグラフ  $H$  の中間グラフ  $M(H)$  に同型である



とき、 $G$  は中間グラフ (middle graph) であるという。この章では、グラフ  $G$  が中間グラフである条件を示す。

定理の証明のために、次の Krausz [22] の定理を用いる。

定理 3 A (Krausz [22])

$G$  が線グラフであるための必要十分条件は、 $G$  の線全体をいくつかの完全部分グラフに分割して、それらの部分グラフの 3 個以上は  $G$  の 1 点を共有しないようにできることである。

次の命題 3I は、§ 2 の定理 2I の中で証明したので結果だけ示しておく。

命題 3I

$G^+$ ,  $H^+$  をそれぞれグラフ  $G$ ,  $H$  の *endline graph* とする。そのとき、 $G^+$  と  $H^+$  が同型なるための必要十分条件は、 $G$  と  $H$  が同型なることである。即ち

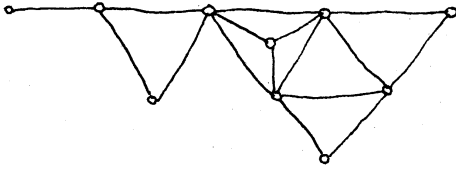
$$G^+ \cong H^+ \iff G \cong H$$

定理 3I

グラフ  $G$  が中間グラフであるための必要十分条件は、 $G$  が次の 2 条件を満たすことである。

- 1)  $G$  の線全体をいくつかの完全部分グラフに分割して、それらの部分グラフの 3 個以上は  $G$  のどの 1 点も共有せず、かつ
- 2) 各完全部分グラフは、一つただ一つの他の完全部分グラフには含まれない点を持つことである。

## 例 31



(証明)

$G$  をグラフ  $H$  の中間グラフとする ;  $G = M(H)$ . 定理 11 により  $G$  はグラフ  $H$  の *endline graph*  $H^*$  の線グラフに同型である。即ち、 $G \cong L(H^*)$ . 定理 3 A より、 $G$  は条件 1) をみたす。更に  $G$  の 1) をみたすような完全部分グラフは、 $H^*$  の各点における星状グラフ (star) によって誘導され、 $H^*$  の各点は 1 つただ 1 つの *endline* に接続しているから (命題 21) この *endline* に対応する点は、 $G$  の 1) の如き完全部分グラフへの分割の丁度 1 つのみに含まれていることがわかる。

次に逆を示す。

グラフ  $G$  の線全体が 1) をみたすような完全部分グラフ  $S_1, S_2, \dots, S_m$  に分割されているものとして、 $L(H) = G$  となるグラフ  $H$  を構成する方法を以下に示す。

$G$  の完全部分グラフ  $S_i$  の点で、他の  $S_j$  に属していないものの集合を  $U_i$  とし、 $U = \bigcup_{i=1}^m U_i$  とする。又  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_m\}$  とする。そのとき、 $S \cup U$  を点集合とし、2 点が空でない共通部分をもつときに隣接しているようなグラフを  $H$  とすると、

$L(H) = G$  となる。即ち  $H = \Omega(S \cup U)$

次に、この  $H$  が *end line graph* であることを示す。即ち、 $F^+ = H$  となるようなグラフ  $F$  が存在する。2) により、 $S_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) は1つただ1つの他の  $S_j$  ( $j \neq i$ ) には含まれない点を含むので、 $U_i$  は丁度一つの元よりなる。よって  $H$  の作り方により、交グラフ  $\Omega(S \cup U)$  の各点  $S_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) において、丁度一つの *end line*  $\{S_i, U_i\}$  が存在する。よって命題 2) によって、 $H$  は *end line graph* である。

即ち、 $F^+ \cong H$  となるようなグラフ  $F$  が存在する。よって、定理 11 より

$G \cong L(H) \cong L(F^+) \cong M(F)$  となり、 $G$  がグラフ  $F$  の中間グラフであることを知る。以上で定理 3) の証明が完結した。

次に樹木の中間グラフの特徴づけを Chartrand [19] による次の結果を利用して与える。

定理 3 B (G.T. Chartrand [19, Thm 8.5])

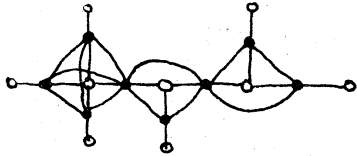
グラフが樹木の線グラフになるための必要十分条件は、それが連結ブロック・グラフになっていて、どの切断点もちょうど2個のブロックに共有されていることである。

定理 32

グラフ  $G$  が樹木の中間グラフであるための必要十分条件は、 $G$  が次の2条件を満たすことである。

- 1)  $G$  は連結ブロック・グラフになっていて、どの切断点も丁度 2 個のブロックに共有されていて、かつ
- 2) 各ブロックは 1 つただ 1 つの非切断点を含んでいる。

例 32



(証明)

ある樹木  $T$  があって、 $G \cong M(T)$  となっているとする。定理 II によって、 $M(T) \cong L(T)$  であり、 $T$  の *endline graph*  $T^+$  もまた樹木である。定理 3 B により  $G$  は条件 1) を満たす。又、 $G$  の切断点  $v$  は  $T^+$  の橋 (bridge) に対応し、 $G$  の非切断点  $u$  は  $T^+$  の *endline* に対応するので、樹木  $T$  の *endline graph*  $T^+$  の作り方より、各ブロックは 1 つただ 1 つの非切断点を含む。

次に十分性を証明する。即ち、 $G$  が条件 1), 2) を満たしているとき仮定する。条件 1) と定理 3 B より、 $G \cong L(T)$  であるような樹木  $T$  が存在する。いま、 $T$  が *endline graph* であることを示す。即ち、 $T \cong T^+$  であるような樹木  $T$  が存在することを。 $L(T) \cong G$  であるような樹木  $T$  は次のような交グラフである。

;  $T = \Omega(S \cup V)$ , 但し

$S = \{B_1, B_2, \dots, B_n \mid B_i \text{ は } G \text{ の } 1) \text{ を満たすブロック}\}$

$V = \bigcup_{i=1}^n V_i$

$V_i = \{v \mid v \text{ はブロック } B_i \text{ に含まれ、他のブロックには含まれない点}\}$

よって、 $T$ の各点 $B_i$  ( $i=1, \dots, m$ )において1つただ1つの  
 endline  $\{B_i, D_i\}$ が存在するから命題21により、endline  
 graph である。即ち、ある樹木 $T'$ が存在し、 $T = T'$ 。よって  
 再び定理11により  $G = L(T) = L(T') = M(T')$ 。

よって $G$ は樹木の間接グラフである。以上で定理32の証明が  
 完結した。

次に Chang [10], Hoffman [21] によって独立に解決された完  
 全グラフ $K_p$ の線グラフの特徴づけとは異なる表現で $L(K_p)$ の特  
 徴づけを与え、その系として完全グラフ $K_p$ の間接グラフの特  
 徴づけを示す。

### 定理33

グラフ $G$ が完全グラフ $K_p$ の線グラフであるための必要十分  
 条件は次の3条件が同時に満たすことである。

- 1)  $G$ の線全体は $p$ 個の線素 (line-disjoint) な $(p-1)$ 次の完  
 全部分グラフ $K_{p-1}^{(i)}$  ( $i=1, \dots, p$ ) に分割される。
- 2) 上の任意の2つの完全部分グラフ $K_{p-1}^{(i)}$  と $K_{p-1}^{(j)}$  は1つ唯1つ  
 の共有点をもつ。(iキオ)
- 3)  $G$ の任意の点は丁度2つの上述の $K_{p-1}^{(i)}$  と $K_{p-1}^{(j)}$  に含まれる。

(証明)

$G \cong L(K_p)$ とする。 $K_p$ の点集合 $V(K_p) = \{1, 2, \dots, p\}$ で表わすと

条件 2) より、 $H = \Omega(K)$  の任意の 2 点  $k_{p+1}^{(i)}$ ,  $k_{p-1}^{(j)}$  は隣接している。  
よって  $H$  は  $L(H) = G$  であるような完全グラフ  $K_p$  であることを  
知る。以上で定理 33 の証明が完結した。

## 系 31

グラフ  $G$  が完全グラフ  $K_p$  の中間グラフである必要十分条件  
は次の 4 条件が同時にみたされることである。

- 1)  $G$  は  $p$  個の次数  $p-1$  の点と、 $\binom{p}{2}$  個の次数  $2(p-1)$  の点よりなる。
- 2)  $G$  は  $p$  個の線素 (line-disjoint) な完全部分グラフ  $K_p^{(i)}$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) に分割される。
- 3) (2) の任意の 2 つの完全部分グラフ  $K_p^{(i)}$  と  $K_p^{(j)}$  ( $i \neq j$ ) は、 $p$  個の点を共有する。
- 4) (2) の各  $K_p^{(i)}$  は  $p$  個の次数  $p-1$  の点を含む。

## 系 32

グラフ  $G$  が完全グラフ  $K_p$  の全グラフである必要十分条件は、  
次の 3 条件を同時に満たすことである。

- 1)  $G$  の線は、 $p+1$  個の完全部分グラフ  $K_p^{(i)}$  ( $i=1, \dots, p+1$ ) に分割される。
- 2) (1) の任意の異なる完全部分グラフ  $K_p^{(i)}$  と  $K_p^{(j)}$  ( $i \neq j$ ) は 1 つの共通点を持つ。
- 3)  $G$  の任意の点は、 $p$  個の  $K_p^{(i)}$  と  $K_p^{(j)}$  ( $i \neq j$ ) とに含まれる。

(証明)

M. Behzad, G. Chartrand, E. A. Nordhaus [7] の定理:  $L(K_{p+1}) \cong T(K_p)$  より明らか。

#### §4 中間グラフの連結性について

##### 定義41

グラフ  $G$  から何個かの点を除去して、非連結かトリビアルなグラフにするような点の最小個数を  $G$  の連結度といい  $\kappa(G)$  で示す。

##### 定義42

非連結のグラフかトリビアルなグラフを作るために、除去すべき線の最小個数をグラフ  $G$  の線連結度とよび、 $\lambda(G)$  で示す。

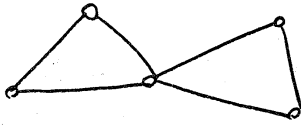
##### 定義43

グラフ  $G$  について、 $\kappa(G) \geq n$  が成り立っているとき、 $G$  を  $n$  連結であるといい、又  $\lambda(G) \geq n$  なら  $n$ -線-連結であるという。

##### 定理4A [Whitney]

グラフが  $n$ -連結であるための必要十分条件は、任意の2点が少なくとも  $n$  個の互いに共通点のない通路で結ばれていることである。

(例)



; 1-連結, 2-線-連結

## 定理 4 B

グラフが  $n$ -線-連結であるための必要十分条件は, どの二点をとっても, それらを結ぶ互いに共通線のない通路が  $n$  個以上存在することである。

中間グラフ  $M(G)$  の連結度 (connectivity), 線連結度 (line-connectivity) は, 全グラフ  $T(G)$ , 線グラフ  $L(G)$  のそれらより単純である。 ([11], [18], [19], [20])

## 定理 4 I

グラフ  $G$  が  $n$ -線連結 ( $n$ -line-connected) ならば, 中間グラフ  $M(G)$  は  $n$ -連結 ( $n$ -connected) である。

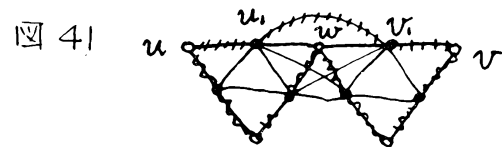
(証明)

$n=0$  または  $G=K_2$  のときは明らか。よって以後  $n \geq 1$ ,  $G \neq K_2$  と仮定する。定理 5.10 [19] によつて,  $M(G)$  の任意の二点が少なくとも  $n$  個の互いに共通線のない通路 (paths) が存在することを示せば十分である。

i)  $u \in G$ ,  $v \in G$  であるとする。このとき,  $G$  の二点  $u$ ,  $v$  を結ぶ少なくとも  $n$  個の互いに共通線をもたない通路 (paths) が存在する。これら  $n$  個の通路のすべての線を再分 (sub-



-divide) したとき, これらは  $M(G)$  においても 2 点  $u, v$  を結ぶ互いに共通線をもたない通路である。今, それらのうちのいくつかの共有点  $w$  が存在すると仮定する。さらに, 共有点  $w$  に隣接するこれら  $n$  個の通路のある 1 つの通路上にある  $L(G)$  の 2 点を  $u_1, v_1$  とする。

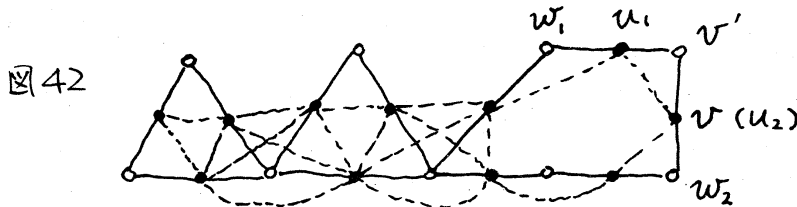


このとき, 部分通路 (subpath)  $u_1 w v_1$  のかわりに線  $(u_1, v_1)$  におき換えることにより得られる新しい通路は点  $w$  を通らない  $M(G)$  の 2 点  $u, v$  を結ぶ通路である。点  $w$  を通るすべての他の通路に関して同様な方法を行う。又, すべての共有点に関してこの操作をくり返すことにより,  $M(G)$  の 2 点  $u, v$  を結ぶ  $n$  個の共有点をもたない通路を得る。

ii)  $u \in G, v \in L(G)$  とする。

$G$  の点  $w', v'$  を  $G$  の線  $\mu$  の両端点 (end-points) とする。2 点  $u, v'$  を結ぶ  $G$  の少なくとも  $n$  個の線素な通路が存在する。しかるに i) より,  $M(G)$  の  $n$  個の共有点をもたない通路が存在する。点  $v'$  に接続し, かつ異なる通路上にある  $G$  の  $n$  本の線を考える。これを  $(w_1, v'), \dots, (w_n, v')$  とする。又これらの線に対応する  $L(G)$  の点を  $u_1, \dots, u_n$  とする。(明らかに  $u_j = v$ )。各  $i$  に対して, 部分通路  $w_i u_i v'$  のかわりに部

分通路  $w_i u_i v$  をとることによつて、二点  $u, v$  を結ぶ  $n$  本の共有点をもたない通路を得る。また  $u_j = v$  ならば部分通路  $w_j u_j v$  のかわりに線  $(v, v)$  をとればよい。(図42参照)



iii)  $u \in L(G), v \in L(G)$  とする。

$n \geq 1, G \neq K_2$  であるから、 $L(G)$  の二つの異なる点  $u, v$  が存在する。それゆゑ、 $M(G)$  に二点  $u, v$  を結ぶ  $n$  個の互いに共有点をもたない通路が存在する。(ii) の定理1参照)

これで定理41の証明が完結した。

系41

$G$  が  $n$ -線連結ならば、すべての  $k \geq 1$  に対して、反復中間グラフ  $M^k(G)$  は  $n$  連結である。

系42

$G$  が  $n$  連結ならば、すべての  $k \geq 1$  に対して、 $M^k(G)$  は  $n$  連結である。

§5 中間グラフの巡回性 (Traversability) について

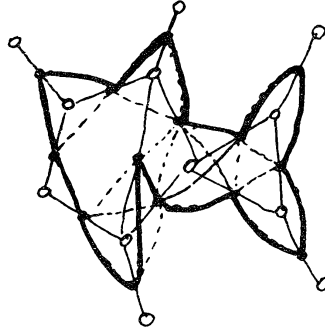
F. Harary, C. St. J. A. Nash Williams による次の結果

[Prop. 8 in [20]] を用いる。

## 命題5A

$L(G)$ は、 $G$ 内に $G$ の各線の少なくとも1端点を含むところの閉径路 (tour, closed trail) が存在する時に限、 $G$ はハミルトニアニ (hamiltonian) である。

## 例51



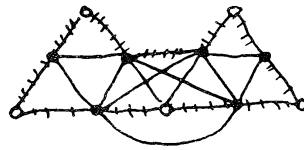
## 定理51

グラフ $G$ が閉全域径路 (closed spanning trail) を含めば、 $G$ の中間グラフ $M(G)$ はハミルトニアニである。

## (証明)

もし $G$ が1つの閉全域径路 (これを $T$ とする) を含むなら、 $G^+$ は命題5Aに述べられた如き閉径路 $T$  (と同型なグラフ) を含む。よ、定理11より証明が完結する。

## 例52



## 定理52

グラフ $G$ がユーレリアニ (eulerian) ならば、 $G$ の中間グラフ $M(G)$ はユーレリアニかつハミルトニアニである。

(証明)

$M(G)$ がユーレリアンであることは、命題12より明らか。

$M(G)$ は定理51よりハミルトニアンのである。

系51

$G$ がユーレリアンであるなら、 $M^k(G)$ ,  $k \geq 1$ はユーレリアンかつハミルトニアンのである。

定理53

$M(G)$ がユーレリアンならば、 $G$ はユーレリアンかつ  $M(G)$ はハミルトニアンのである。

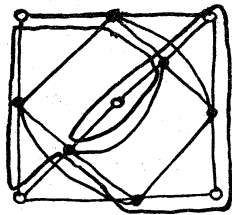
(証明)

命題12により  $G$ はユーレリアンである。したがって定理52より  $M(G)$ はハミルトニアンのである。

定理54

グラフ  $G$  の中間グラフ  $M(G)$  が閉全域小径をもつための必要十分条件は、 $G$  が連結で次数1の点を持たないことである。

例53



(証明)

必要性を示す。 $G$ が非連結ならば  $M(G)$ も非連結であり、 $M(G)$ は全域小径を持ち得ない。

$G$ が次数1の点をもつとすると命題12により  $M(G)$ も次数1な

なる点を持ち、全域小径を持ち得ない。よ、て必要性が示された。

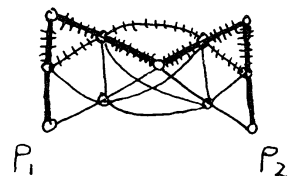
次に十分性を二段階に分けて証明する。

i)  $G$  の全域樹木  $T$  の中間グラフ  $M(T)$  の閉疑似全域小径の存在  
 $T$  をグラフ  $G$  の全域樹木 (spanning tree) とする。  $M(T)$  は  $M(G)$  の部分グラフである。  $M(T)$  の閉疑似全域小径 (almost-spanning trail), 疑似全域小径とは  $M(T)$  の次数  $\geq 2$  の点, これは  $T$  においても次数  $\geq 2$  の点であるが, を除いたすべての点を通る小径を意味するものとする) が次のようにして得られる。  
 まず, 2つの次数  $\geq 2$  の点  $P_1, P_2$  を結ぶ  $T$  の部分通路  $P$  が存在する。点  $P_1$  に隣接する  $M(P)$  の点から出発し,  $L(P)$  の線をたどり,  $P$  の再分グラフ  $S(P)$  の線をたどり戻る。このようにして  $P$  に対応する求める閉小径を得る。

(図54参照, 太線部が  $P$ ,

----- 部分が閉小径)

図  
54



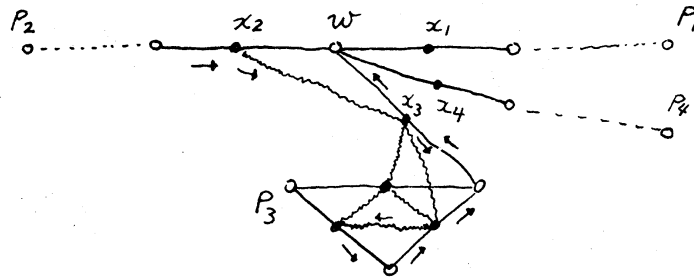
$T \neq P$  ならば,  $T$  は次数  $\geq 3$  の点をもつ。点  $w$  をそのような点とし, 点  $P_3 (\neq P_1, P_2)$  を点  $w$  を根とする (rooted at  $w$ )  $T$  の分枝 (branch of  $T$ ) 上にある次数  $\geq 2$  の点とする。このとき 2点  $w, P_3$  を結ぶ通路  $P'$  が存在する。  $M(P')$  の次数  $\geq 2$  でない点は前の閉小径の  $x_2, w, x_1$  のかわりに  $x_2, x_3, L(P'), S(P'), x_3, w, x_1$

をたどることによって拡張された閉小径の中に含まれる。

(図55参照)

太線部  $P'$

図55



点  $w$  の次数がより大きいときも同様の操作をくり返す。

即ち図55の場合,  $x_4, w, x_1$  のかわりに,  $x_3, x_4, \dots, x_4, w, x_1$  とする。すべての次数がより大なる点について, この操作を行う。このようにして  $M(T)$  の閉疑似全域小径を得る。

ii)  $M(G)$  の閉全域小径の存在を示す。

樹木  $T$  に  $X(G) - X(T)$  の線を加えて, i) の閉小径を拡張することを考える。即ち,  $M(G)$  における  $X(G) - X(T)$  を表わす点が逐次閉小径に含まれるように閉小径の拡張を考える。

$G$  の追加すべき線は次の通り分類できる。

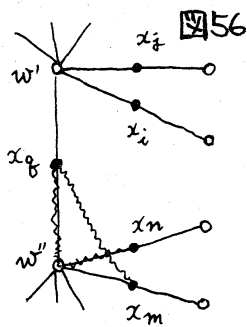


図57

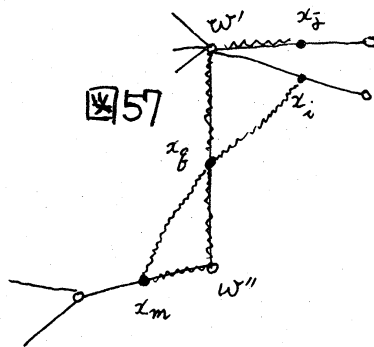
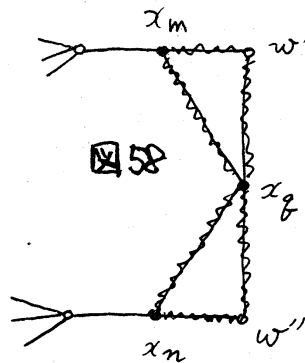


図58



(2) 追加する線  $x_g$  がグラフの二つの ( $T$  における) 次数1の点  $w, w'$  を結ぶときは, 既にある閉小径  $\dots x_i w' x_j \dots x_m w'' x_n \dots$

の  $x_m, w', x_n$  のかわりに  $x_m, x_g, w'', x_n$  とする。(図56参照)

(b) 追加する線  $x_g$  が (Tにおける) 次数1の点  $w''$  と (Tにおける) 次数2以上の点  $w'$  を結ぶときは, 前の閉小径  $\dots x_m \dots x_i w' x_j \dots$  において,  $x_i w' x_j$  のかわりに  $x_i x_g x_m w'' x_g w' x_j$  とする (図57参照)

(c) 追加する線  $x_g$  が (Tにおける) 次数1の2点  $w', w''$  を結ぶときは, 前の閉小径  $\dots x_m \dots x_n \dots$  において,  $\dots x_n$  のかわりに  $x_n x_g x_m w' x_g w'' x_n$  とする。(図58参照)

これらの線を追加することによって得られた拡張された閉小径は閉疑似全域小径の線を使わない。更に仮定より,  $G$  は次数1の点も孤立点ももたないので, この閉小径は  $G$  のすべての点を含む。よって得られた閉小径は  $G$  のすべての点を含む。よって得られた閉小径は  $M(G)$  の閉全域小径である。

よって証明が完結した。

## 系52

反復中間グラフ  $M^k(G)$ ,  $k \geq 2$  がハミルトニアンであるための必要十分条件は,  $G$  が連結で次数1の点を含まないことである。

### §6 中間グラフの平面性について

定理61 グラフ $G$ とその中間グラフ $M(G)$ について

- i)  $M(G)$ が森 (forest) であるための条件は  $\Delta G \leq 1$ .
- ii)  $M(G)$ が外平面的 (outerplanar) であるための条件は  $\Delta G \leq 2$ .
- iii)  $M(G)$ が平面的 (planar) であるための条件は,  $G$ が平面的であり,  $\Delta G \leq 3$ .

但し,  $\Delta G$ はグラフ $G$ の最大次数を表わすものとする。

例61.

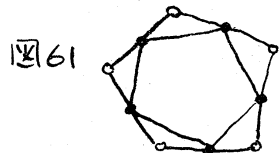
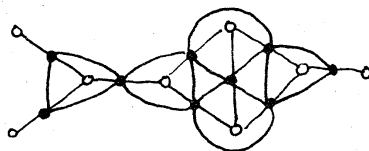


図62



(証明)

i) Chartrand, Geller, Hedetniemi [12] の prop. 5 によれば, グラフ $G^+$ の線グラフ $L(G^+)$ は  $\Delta G^+ \leq 2$  かつ  $p^+(v_i) = 2$  ( $p^+(v_i)$ は $G^+$ における点 $v_i$ の次数とする) ならば,  $v_i$ は必ず切断点であるときに限, 2森である。  $p^+(v_i) = p(v_i) + 1$  ( $p(v_i)$ は $G$ における点 $v_i$ の次数),  $\Delta G^+ = \Delta G + 1$  および定理11により i)が得られる。

ii) [12] の Theorem 1 によれば,  $L(G^+)$ は  $\Delta G^+ = 3$  かつ  $p^+(v_i) = 3$  ならば必ず $v_i$ が $G^+$ の切断点であるときに限, 2外平面的である。これより(i)の場合と全く同様にして ii)が得られる。

iii) Sedláček の Theorem によれば, 平面的グラフ $G^+$ の線グラフ $L(G^+)$ は  $\Delta G^+ \leq 4$  かつ  $p^+(v_i) = 4$  ならば $v_i$ が必ず切断点であ



るときに限って平面的である。定義14により  $G^+$  が平面的なことと  $G$  が平面的なこととは同値である。このことより 11) も容易に得られる。

証明終わり。

次に参考の為に、線グラフ、全グラフの森、外平面性、平面性に関する定理を列挙しておく。

命題 A  $G$  が線グラフ  $L(G)$  が森である

$\Leftrightarrow \max \deg G \leq 2$  & if  $\deg v = 2 \Rightarrow v$ ; 切断点

定理 B (Sedláček) 平面グラフ  $G$  の線グラフ  $L(G)$  が平面的である  $\Leftrightarrow \max \deg G \leq 4$  & if  $\deg v = 4 \Rightarrow v$ ; 切断点

定理 C (Chartrand, Geller, Hedetniemi)  $G$  の線グラフ  $L(G)$  が外平面的である  $\Leftrightarrow \max \deg G \leq 3$  & if  $\deg v = 3 \Rightarrow v$ ; 切断点

定理 D (Behzad)  $G$  の全グラフ  $T(G)$  が平面的である  $\Leftrightarrow \max \deg G \leq 3$  & if  $\deg v = 3 \Rightarrow v$ ; 切断点

定理 E (Chartrand, Geller, Hedetniemi)

$G$  の全グラフ  $T(G)$  が外平面的である  $\Leftrightarrow \max \deg G \leq 2$  & if  $\deg v = 2 \Rightarrow v$ ; 切断点

## § 7 中間グラフのサイクル数 (cycle multiplicity)

## 定義 7.1

グラフ  $G$  内にある線素な (line-disjoint) サイクルの最大数をサイクル数とよび, その値を  $\overline{\pi}_2(G)$  で表わす。

定理 7A (Chartrand, Geller, Hedetniemi) [12]

$$\overline{\pi}_2(K_p) = \left\lfloor \frac{p}{3} \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor$$

$$\overline{\pi}_2(K_{m,n}) = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \quad (mn; \text{even})$$

$$= \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{4} \right\rfloor \quad (mn; \text{odd})$$

定理 7B (Pereira) [23]

$$\overline{\pi}_2(L(K_p)) = \binom{p}{3}, \quad \overline{\pi}_2(T(K_p)) = \binom{p+1}{3}$$

以下では, サイクルとは  $G$  の線集合の部分集合とみなす。もし  $G$  がサイクルを含めば,  $G$  内には  $\overline{\pi}_2(G) (\neq 0)$  個の線素なサイクルがある。よって, これらすべての線素なサイクルの族を表わす。これらのどのサイクルにも属さない線が  $G$  内にあれば, これらを単位集合とみなし, これらのすべての族を  $\mathcal{M}$  で表わす。すると  $\mathcal{M}$  は  $X(G)$  の一つの直和分割である。この直和分割を  $G$  の一つの サイクル表示 (cycle representation) とよび,  $\mathcal{M}$  の元をこのサイクル表示における 自由線 (free lines) とよぶ。定義 7.1 により  $|\mathcal{M}| = \overline{\pi}_2(G)$  である。この節において, 一つのグラフ  $G$ , 特に完全グラフの中間グラフ  $M(K_p)$  のサイクル数とサイクル表示を調べる。

$[x]$  を以って  $x$  を越えない最大整数を表わすものとする。

定理 71

$P$  点グラフ  $G$  が森ならば,

$$\bar{\pi}_2(M(G)) = \sum_{i=1}^P \left[ \frac{f(v_i)+1}{3} \left[ \frac{f(v_i)}{2} \right] \right]$$

(証明)

$G$  が森ならば  $G^+$  も森である。これより J.M.S. Simões-Pereira

[23] の Theorem 1 を用いて

$$\bar{\pi}_2(L(G^+)) = \sum_{i=1}^P \left[ \frac{f^+(v_i)}{3} \left[ \frac{f^+(v_i)-1}{2} \right] \right]$$

又、定理 11 と  $f^+(v_i) = f(v_i) + 1$  ( $f^+(v_i), f(v_i)$  はそれぞれ  
点  $v_i$  の  $G^+, G$  における次数を意味する) より定理の等式が  
得られる。

定理 72

任意のグラフ  $G$  において,  $G$  の奇数次数の点による誘導部分  
分グラフ (induced subgraph) を  $G_o$  で表わせば,

$$\bar{\pi}_2(M(G)) \geq \bar{\pi}_2(G_o) + \sum_{i=1}^P \left[ \frac{f(v_i)+1}{3} \left[ \frac{f(v_i)}{2} \right] \right]$$

(証明)

$G$  内の偶数次数の点による誘導部分グラフを  $G_e$  で表わす  
と,  $\bar{\pi}_2(L(G^+)) \geq \bar{\pi}_2((G^+)_e) + \sum_{i=1}^P \left[ \frac{f^+(v_i)}{3} \left[ \frac{f^+(v_i)-1}{2} \right] \right]$

(Theorem 2 in [23])。しかるに  $(G^+)_e = G_e$  であり,  
これと定理 11 および  $f^+(v_i) = f(v_i) + 1$  により定理の不等  
式が得られる。

## 系 71

完全グラフ  $K_p$  について、次の不等式が成り立つ。

(i)  $p$  が奇数ならば、

$$\left\lfloor \frac{1}{6} p^2 (p-1) \right\rfloor \geq \overline{\pi}_2(M(K_p)) \geq p \left\lfloor \frac{p}{3} \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor$$

(ii)  $p$  が偶数ならば、

$$\left\lfloor \frac{1}{6} (p+1) p (p-2) \right\rfloor \geq \overline{\pi}_2(M(K_p)) \geq (p+1) \left\lfloor \frac{p}{3} \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor$$

(証明)

定理 72 において  $G = K_p$ ,  $V(K_p) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$  とおけば、 $f(v_i) = p-1$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) であるから定理 72

の不等式は、 $\overline{\pi}_2(M(K_p)) \geq \overline{\pi}_2((K_p)_\sigma) + p \left\lfloor \frac{p}{3} \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor$  となる。

$$\text{又、} (K_p)_\sigma = \begin{cases} K_p & (p \text{ が偶数のとき}) \\ \emptyset & (p \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

であるから、上の不等式は次のようになる：

$$p \text{ が偶数のとき、} \overline{\pi}_2(M(K_p)) \geq (p+1) \left\lfloor \frac{p}{3} \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor。$$

$$p \text{ が奇数のとき、} \overline{\pi}_2(M(K_p)) \geq p \left\lfloor \frac{p}{3} \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor \right\rfloor。$$

一方、 $M(K_p)$  の線の数は  $p \binom{p}{2}$  であるから  $M(K_p)$  のサイクル数は  $\left\lfloor \frac{1}{3} p \binom{p}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{1}{6} p^2 (p-1) \right\rfloor$  を越えることはできない。

特に  $p$  が偶数の場合には、 $M(K_p)$  の実  $v_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ) は奇数次数であるから、実  $v_i$  は  $M(K_p)$  内のいかなる線素なサイクル上にもないような少なくとも 1 線と接合する。従って、全部で少なくとも  $p$  線が  $M(K_p)$  の任意のサイクル表示におけ

る自由線であればならない。それ故、 $p$ が偶数のとき、 $M(K_p)$ のサイクル数は  $[\frac{1}{3}(p\binom{p}{2} - p)] = [\frac{1}{6}(p+1)p(p-2)]$  を越えない。かくして系71の不等式を得る。

系71の不等式は次の定理73の如く精密化することができる。

### 定理 73

完全グラフ  $K_p$  の中間グラフ  $M(K_p)$  のサイクル数は

$$p \text{ が奇数ならば } \pi_2'(M(K_p)) = [\frac{1}{6}p^2(p-1)]$$

$$p \text{ が偶数ならば } \pi_2'(M(K_p)) = [\frac{1}{6}(p+1)p(p-2)].$$

(証明)

$p \equiv r \pmod{6}$ , ( $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ) によって場合を分る。

場合1:  $p \equiv 1 \text{ or } 3 \pmod{6}$  のとき

系71の(i)の不等式の両辺において  $p = 6k+1$  or  $p = 6k+3$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) とおけば両辺の値が等しいことが容易にわかり定理の式が成り立つのを知る。

場合2:  $p \equiv 5 \pmod{6}$  のとき

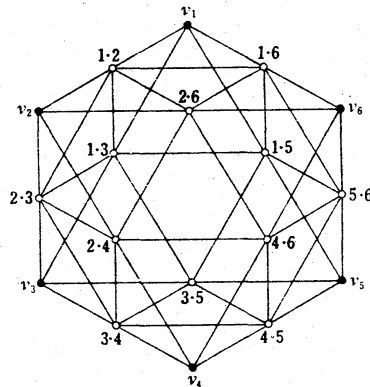
$K_p$ ,  $V(K_p) = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ , の中間グラフ  $M(K_p)$  の線集合は  $v_i$  を含む線素な完全部分グラフ  $K_p^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, p$ ) の線集合の族に直和分解される(系31の2)。 $p$ 個の  $K_p^{(i)}$  の各サイクル表示は、それぞれ一つの4-サイクルとその他はすべて3-サイクルから成り自由線は存在しない。このことは、

Fort and Hedlund [14] の Theorem から容易に導かれる。これら 5 の 4-サイクルを適当に取り出し、更にそれらを作る線を適当に組み直して只一つの 5-サイクルとその他はすべて 3-サイクルを形成するようである。

以下にこのことを示す。

$\mathcal{K} = \{K_p^{(i)} \mid i=1, 2, \dots, p\}$  とする。集合  $\mathcal{K}$  を部分集合に分けて 6 個の  $K_p^{(i)}$  から成る 6 組の集合  $N_s = \{K_p^{(\alpha)}, K_p^{(\beta)}, K_p^{(\gamma)}, K_p^{(\delta)}, K_p^{(\epsilon)}, K_p^{(\zeta)}\}$  ( $s=1, 2, \dots, 6$ ), ( $\alpha, \beta, \dots, \zeta$  はすべて異なる整数), ( $1 \leq \alpha, \beta, \dots, \zeta \leq p$  とする) と 5 個の  $K_p^{(i)}$  から成る 1 個の集合  $N$  とにしたとする。簡単のため

$N_s$  の 1 つが  $\{K_p^{(1)}, K_p^{(2)}, K_p^{(3)}, K_p^{(4)}, K_p^{(5)}, K_p^{(6)}\}$  であるとし、この  $N_s$  から導かれる  $M(K_p)$  の部分グラフを  $G(N_s)$  と記すことにする。(図 71 参照)



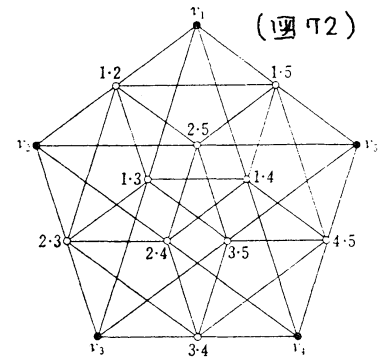
(図 71)

この図において  $K_p^{(1)}, K_p^{(2)}, \dots, K_p^{(6)}$  の各サイクル表示における 4-サイクルをそれぞれ  $(1-2, 1-3, 1-5, 1-6), (1-2, 2-3, 2-4, 2-6), (1-3, 2-3, 3-4, 3-5), (2-4, 3-4, 4-5, 4-6), (3-5, 4-5, 5-6, 1-5), (1-6, 2-6, 4-6, 5-6)$  とすることができる。ここに交点または線  $(v_i, v_j)$  の再分点である。これら 6 個の 4-サイクルの線 24 本を組み合わせると 8 個の線素な 3-サイクル  $(1-2, 2-6, 1-6), (1-2, 2-3, 1-3),$

$(2 \cdot 3, 3 \cdot 4, 2 \cdot 4), (3 \cdot 4, 4 \cdot 5, 3 \cdot 5), (4 \cdot 5, 5 \cdot 6, 4 \cdot 6), (1 \cdot 5, 5 \cdot 6, 1 \cdot 6),$   
 $(2 \cdot 4, 4 \cdot 6, 2 \cdot 6)$  および  $(1 \cdot 3, 3 \cdot 5, 1 \cdot 5)$  が得られる。これより  
 $G(N_5)$  の線集合は線素な 3-サイクルの族に直和分解される  
 ことがわかる。同様な他のすべての  $G(N_5)$  についても全く同  
 じことが云える。

次に、簡単のため、 $N = \{K_p^{(1)}, K_p^{(2)}, K_p^{(3)}, K_p^{(4)}, K_p^{(5)}\}$  とし、 $N$  の導く  
 $M(K_p)$  の部分グラフを  $G(N)$  とする。(図 72 参照)

$K_p^{(1)}, \dots, K_p^{(5)}$  のサイクル表示におけ  
 る 4-サイクルをそれぞれ  $(1 \cdot 2, 1 \cdot 3, 1 \cdot 4, 5 \cdot 6),$   
 $(1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5), (1 \cdot 3, 2 \cdot 3, 3 \cdot 4, 3 \cdot 5),$   
 $(1 \cdot 4, 2 \cdot 4, 3 \cdot 5, 4 \cdot 5), (2 \cdot 5, 3 \cdot 5, 4 \cdot 5, 5 \cdot 6)$   
 とすることができる。これは 5 個の 4-サイ



クルのすべての 20 組をくみ直して 5 個の 3-サイクルと 10  
 の 5-サイクル  $(1 \cdot 2, 2 \cdot 5, 5 \cdot 6), (1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 1 \cdot 3), (2 \cdot 3, 2 \cdot 4, 3 \cdot 4),$   
 $(3 \cdot 4, 3 \cdot 5, 4 \cdot 5), (1 \cdot 4, 4 \cdot 5, 5 \cdot 6), (1 \cdot 3, 1 \cdot 4, 2 \cdot 4, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5)$  が  
 得られる。これより  $G(N)$  の線集合は線素な 3-サイクルと 1  
 つの 5-サイクルの族に直和分解されることを知る。これよ  
 り  $M(K_p)$  の線集合  $X(M(K_p))$  は線素な 3-サイクル 1 つと 5-  
 サイクルの族  $\mathcal{C}$  に直和分解せられ、これ 5 のどのサイクル  
 にも属さない線は存在しない。  $|\mathcal{C}| = \overline{\pi}_5(M(K_p))$  なることは  
 明らかであり、よれだから上の直和分解は  $M(K_p)$  の 1 つのサ

1サイクル表示である。 $(\mathcal{M}^P = \emptyset)$ 。

$$\text{故に, } \overline{\pi}_2(M(K_p)) = \frac{1}{3}(P \binom{P}{2} - 5) + 1 = 36k^3 + 84k^2 + 65k + 16$$

$$\begin{aligned} \text{一方 } \left[ \frac{1}{6} P^2(P-1) \right] &= \left[ 36k^3 + 84k^2 + 65k + \frac{50}{3} \right] \\ &= 36k^3 + 84k^2 + 65k + 16 \end{aligned}$$

$$\text{かくして } \overline{\pi}_2(M(K_p)) = \left[ \frac{P^2(P-1)}{6} \right]$$

場合3;  $P \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod{6}$

$$\begin{aligned} P \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod{6} \text{ なる } k \text{ に対し } (P+1) \left[ \frac{P}{3} \left[ \frac{P-1}{2} \right] \right] &= \frac{1}{6}(P+1)P(P-2) \\ &= \left[ \frac{1}{6}(P+1)P(P-2) \right], \end{aligned}$$

この式と系71の(ii)とから, 定理の等式(2)を得る。

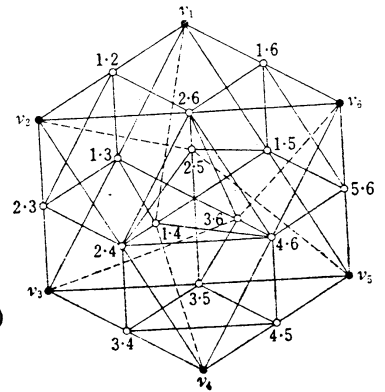
(Remark 1)  $P \equiv 0 \text{ or } 2 \pmod{6}$  の場合,  $K_p^{(i)}$  の1つのサイクル表示を  $\delta^{(i)} \cup \mathcal{M}^{(i)}$  とすると  $\delta^{(i)}$  は3-サイクルの族で  $\mathcal{M}^{(i)}$  は  $\frac{P}{2}$  本の独立自由線よりなる。([12], [14], [23])。

従って,  $M(K_p)$  内には全部で  $p \times \frac{P}{2}$  本の自由線がありそうに思われるが上記の証明によると, この場合  $M(K_p)$  には各  $K_p^{(i)}$  内に只1本の自由線があり全部で  $P$  本の自由線があるだけである。これは  $\delta^{(i)}$  と接合しない ( $K_p^{(i)}$  のサイクル表示における)  $(\frac{P}{2}-1)$  本の自由線が  $K_p^{(j)}$  ( $j \neq i$ ) 内の自由線と共に  $M(K_p)$  内の3-サイクルを作ることによるのである。このようなことが生ずるのは,  $K_p^{(i)}$  内の自由線が適当な選択の可能性をきつことによるのである。[23]。

図73は  $M(K_6)$  を例にとって上の事情を説明するものである。



$\tau$ ,  $K_6^{(1)}$  の自由線は3線  $(v_1, 1\cdot4)$ ,  
 $(1\cdot2, 1\cdot3)$ ,  $(1\cdot6, 1\cdot5)$  とすることを  
 得るが, この中  $(v_1, 1\cdot4)$  のみが  $M(K_p)$  内  
 の自由線となり,  $(1\cdot2, 1\cdot3)$  は  $K_6^{(2)}$  の  
 自由線  $(1\cdot2, 2\cdot3)$ ,  $K_6^{(3)}$  の自由線  $(1\cdot3, 2\cdot3)$   
 と共に1つの3-サイクルを形成し,



(図 73)

同様に  $(1\cdot6, 1\cdot5)$  は3-サイクル  $(1\cdot6, 1\cdot5, 5\cdot6)$  上にある。

場合4;  $p \equiv 4 \pmod{6}$  i.e.,  $p = 6k + 4$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ )

我々は  $M(K_p)$  がサイクル表示  $\cup \mathcal{M}$ , ここには2個の4-  
 サイクルと他はすべて3-サイクルからなる族で,  $|\mathcal{M}| = p$   
 をもつことを示そう。そうすると,  $|\overline{\mathcal{M}}(M(K_p))| = \left[ \frac{1}{3}(p \binom{p}{2} - p) \right]$   
 $= \left[ \frac{(p+1)p(p-2)}{6} \right]$  であることが明らかとなり定理は証明さ  
 せる。

上述のことの証明は危に属する数学的帰納法による。

$p$  が偶数であるから系71あるいは Remark 1 で述べた如く,  
 $M(K_p)$  の任意のサイクル表示において少なくとも  $p$  本の自由  
 線がある。これらの自由線の集合を  $W$  としよう。

(i)  $k=0$  即ち  $p=4$  のとき

これら4桌上の完全グラフ  $K_4^{(0)}$  とおき  $V(K_4^{(0)}) = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$   
 とする。  $M(K_4^{(0)})$  の次のようなサイクル表示  $\cup \mathcal{M}^{(0)}$  が  
 存在することを示す (図 74 参照)。

ここに  $C_4^1 = (1^{\circ}2^{\circ}, 1^{\circ}3^{\circ}, 3^{\circ}4^{\circ}, 2^{\circ}4^{\circ}),$

$C_4^2 = (1^{\circ}2^{\circ}, 1^{\circ}4^{\circ}, 3^{\circ}4^{\circ}, 2^{\circ}3^{\circ}),$

$C_3^1 = (v_{10}, 1^{\circ}3^{\circ}, 1^{\circ}4^{\circ}),$

$C_3^2 = (v_{20}, 2^{\circ}3^{\circ}, 2^{\circ}4^{\circ}),$

$C_3^3 = (v_{30}, 1^{\circ}3^{\circ}, 2^{\circ}3^{\circ}),$

$C_3^4 = (v_{40}, 1^{\circ}4^{\circ}, 2^{\circ}4^{\circ})$  である。

$\mathcal{M}^{(0)} = \{(v_{10}, 1^{\circ}2^{\circ}), (1^{\circ}2^{\circ}, v_{20}), (v_{30}, 3^{\circ}4^{\circ}), (3^{\circ}4^{\circ}, v_{40})\}$

このとき  $\mathcal{M}^{(0)} \cup \mathcal{M}^{(0)}$  が  $M(K_4^{(0)})$  のサイクル表示なることは明らかであり, 定理 73 が成り立つことも容易に検証される。

(ii)  $k=1$  即ち  $p=10$  のとき

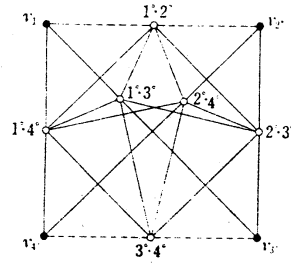
この 10 点上の完全グラフを  $K_{10}^{(0,1)}$  とし, その点集合  $V(K_{10}^{(0,1)})$  を任意に 4 点から成る集合と 6 点から成る集合に分け, それらをそれぞれ  $\{v_{10}, v_{20}, v_{30}, v_{40}\}, \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$  とし, これらを点集合とするところの  $K_{10}^{(0,1)}$  の完全部分グラフを  $K_4^{(0)}, K_6^{(1)}$  とおく。  $M(K_{10}^{(0,1)})$  のサイクル表示において少なくとも  $p=10$  本の自由線が必ず存在し, その集合を  $W$  としたのであるが, いまこれを  $W = W^{(0,1)} = \mathcal{M}^{(0)} \cup W^{(1)}$ ,

$\mathcal{M}^{(0)} = \{(v_{10}, 1^{\circ}2^{\circ}), (1^{\circ}2^{\circ}, v_{20}), (v_{30}, 3^{\circ}4^{\circ}), (3^{\circ}4^{\circ}, v_{40})\},$

$W^{(1)} = \{(v_1, 1\cdot2), (1\cdot2, v_2), (v_3, 3\cdot4), (3\cdot4, v_4), (v_5, 5\cdot6), (5\cdot6, v_6)\}$

とおく。

さて,  $M(K_{10}^{(0,1)})$  がその部分グラフ  $M(K_4^{(0)})$  が (i) で示したサイク



(図 74)

ル表示  $\mathcal{L}^{(0)} \cup \mathcal{M}^{(0)}$  をもち, かつ  $W = \mathcal{M}^{(0)}$  (自由線の集合) のようにしてサイクル表示されることが云える。それには,

$X(M(K_{10}^{(0,1)})) - X(M(K_4^{(0)})) - W^{(0)}$  が 140 個の線素な 3-サイクルを含むことを示そう。これがいえれば,  $p=10$  に対して定理 73 の等式が成立することが証明される。

(α)  $v_{i_0}$  ( $i=1, 2, 3, 4$ ) と  $v_1, v_2, \dots, v_6$  について固定された一つの  $i_0$  について,  $v_{i_0}$  を  $v_j$  ( $j=1, 2, \dots, 6$ ) に結ぶ 6 線の再分点  $i_0 \cdot j$  ( $j=1, 2, \dots, 6$ ) と  $v_{i_0}$  の作る  $M(K_{10}^{(0,1)})$  の完全部分グラフを  $K_7^{(i_0)}$  とする。  $K_7^{(i_0)}$  のサイクル表示は 7 個の 3-cycle を含み, 自由線をもたない。

$i=1, 2, 3, 4$  とおけば, このような 3-サイクルが  $7 \times 4 = 28$  個得られ, これらは互に線素である。

(β)  $v_j$  ( $j=1, 2, \dots, 6$ ) と  $v_{1_0}, v_{2_0}, v_{3_0}, v_{4_0}$  について完全グラフ  $K_4'$ ,  $V(K_4') = \{j \cdot 1_0, j \cdot 2_0, j \cdot 3_0, j \cdot 4_0\}$  の 6 線に対し, 次のような 6 個の線素な 3-サイクルを得る;

$$(j \cdot 1_0, j \cdot 2_0, 1_0 \cdot 2_0), (j \cdot 1_0, j \cdot 3_0, 1_0 \cdot 3_0), (j \cdot 1_0, j \cdot 4_0, 1_0 \cdot 4_0),$$

$$(j \cdot 2_0, j \cdot 3_0, 2_0 \cdot 3_0), (j \cdot 2_0, j \cdot 4_0, 2_0 \cdot 4_0), (j \cdot 3_0, j \cdot 4_0, 3_0 \cdot 4_0)$$

$j=1, 2, \dots, 6$  とおいて, このような 3-サイクルが  $6 \times 6 = 36$  個得られる。

(γ)  $v_j$  ( $j=1, 2, \dots, 6$ ) と  $V(K_{10}^{(0,1)}) - \{v_j\}$  内の点とについて

(γ)<sub>1</sub>  $j=1$  のとき

次のような4個の線素な3-サイクルが得られる:

$$(v_1, 1.1^\circ, 1.3), (v_1, 1.2^\circ, 1.4), (v_1, 1.3^\circ, 1.5), (v_1, 1.4^\circ, 1.6) \dots \textcircled{1}_1$$

次に9点  $1.1^\circ, 1.2^\circ, 1.3^\circ, 1.4^\circ, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6$  により誘導されるグラフ上で  $(\beta)$ ,  $\textcircled{1}_1$  内にはい線を組み立て次のように8個の線素な3-サイクルと2本のそれらの上にはい線を得る:

$$\left. \begin{array}{l} (1.1^\circ, 1.2, 1.4), (1.1^\circ, 1.5, 1.6), (1.2^\circ, 1.2, 1.6), (1.2^\circ, 1.3, 1.5) \\ (1.3^\circ, 1.2, 1.3), (1.3^\circ, 1.4, 1.6), (1.4^\circ, 1.2, 1.5), (1.4^\circ, 1.3, 1.4) \end{array} \right\} \dots \textcircled{2}_2$$

これらのサイクル上にはい線は次のものである。

$$(1.3, 1.6), (1.4, 1.5) \dots \textcircled{3}_3$$

(7)<sub>2</sub>  $j=2$  のとき

(7)<sub>1</sub> と同様にして次のような  $4+8=12$  個の線素な3-サイクルと, それらのサイクル上にはい2線が得られる:

$$(v_2, 2.1^\circ, 2.3), (v_2, 2.2^\circ, 2.4), (v_2, 2.3^\circ, 2.5), (v_2, 2.4^\circ, 2.6) \dots \textcircled{2}_1$$

$$\left. \begin{array}{l} (2.1^\circ, 2.1, 2.6), (2.1^\circ, 2.4, 2.5), (2.2^\circ, 2.1, 2.3), (2.2^\circ, 2.5, 2.6) \\ (2.3^\circ, 2.1, 2.4), (2.3^\circ, 2.3, 2.6), (2.4^\circ, 2.1, 2.5), (2.4^\circ, 2.3, 2.4) \end{array} \right\} \dots \textcircled{2}_2$$

$$(2.3, 2.5), (2.4, 2.6) \dots \textcircled{3}_3$$

さて,  $j$  の奇偶性により,  $v_j$  と  $W^m$  内の線との接合関係に差異があることにより,  $j$  が奇数  $1, 3, 5$  のときと,  $j$  が偶数のときと分けて考え,  $\textcircled{1}_1, \textcircled{2}_2, \textcircled{3}_3$  内の点の数字  $1, 2, \dots, 6$  に  $6 \equiv 0$  とし  $j$  が  $2$  を加えれば各サイクルは新しいサイクルとなり, これらは線素で, 既成のどのサイクルとも線素

である ( $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$  は不変とする)。新しく得られたサイクル及び線を  $\textcircled{3}_1, \textcircled{3}_2$  および  $(3 \cdot 5, 3 \cdot 2), (3 \cdot 6, 3 \cdot 1), \dots \textcircled{3}_3$  とする。

$\textcircled{3}_1, \textcircled{3}_2, \textcircled{3}_3$  の各点の数に更に  $2 (6 \equiv 0)$  を加えて、線素なサイクルの集合  $\textcircled{5}_1, \textcircled{5}_2$  及び  $(5 \cdot 1, 5 \cdot 4), (5 \cdot 2, 5 \cdot 3) \dots \textcircled{5}_3$  を得る。

$j = 2, 4, 6$  に対しては全く同様にして

サイクルの集合  $\textcircled{4}_1, \textcircled{4}_2$ , 線  $(4 \cdot 5, 4 \cdot 1), (4 \cdot 6, 4 \cdot 2) \dots \textcircled{4}_3$

サイクルの集合  $\textcircled{6}_1, \textcircled{6}_2$ , 線  $(6 \cdot 1, 6 \cdot 3), (6 \cdot 2, 6 \cdot 4) \dots \textcircled{6}_3$  を得る。

最後に  $\textcircled{1}_3, \textcircled{2}_3 \sim \textcircled{6}_3$  なる 12本の線は、次の如き4個の3-サイクルを形成する;  $(1 \cdot 3, 1 \cdot 6, 3 \cdot 6), (1 \cdot 4, 1 \cdot 5, 4 \cdot 5), (2 \cdot 3, 2 \cdot 5, 3 \cdot 5),$

$(2 \cdot 4, 2 \cdot 6, 4 \cdot 6) \dots \textcircled{7}$  かくして、線集合  $X(M(K_{10}^{(0,1)})) -$

$X(M(K_4^{(0)}))$  は  $(\alpha), (\beta), (\gamma)$  で示した 140個の線素な3-サイクルの族と線の集合  $W^{(1)}$  から成ることが云えた。これら 140個の3-サイクルの族を  $\mathcal{L}^{(1)}$  で表わそう。以上から  $M(K_{10}^{(0,1)})$  はサイクル表示  $\mathcal{L} \cup \mathcal{W}$ ,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)} \cup \mathcal{L}^{(1)}$ ,  $\mathcal{W} = W^{(0,1)}$  をもち、しかもこのときその部分集合  $M(K_4^{(0)})$  は (i) で示されたサイクル表示  $\mathcal{L}^{(0)} \cup \mathcal{W}^{(0)}$  をもちうることがわかった。

(iii)  $k \geq 2$  即ち  $p \geq 16$  のとき

$P = 6k + 4$  の桌上的完全グラフ  $K_{6k+4}$  の点集合中の任意の4点の上の完全部分グラフを  $K_4^{(0)}$  とする。  $M(K_{6k+4})$  は、その部分グラフ  $M(K_4^{(0)})$  が (i) で示したようなサイクル表示を

もち、自由線の集合の計数 (cardinality) が  $6k+4=P$  である  
 ようなサイクル表示をもちうることを仮定して、 $M(K_{6(k+1)+4})$   
 が同様なサイクル表示をもちうることを証明する。

$$V = V(K_{6(k+1)+4}) \text{ を } 3 \text{ つに分けて } V = V^{(0)} \cup V^{(1)} \cup V',$$

$$V^{(0)} = \{v_0, v_2, v_3, v_4\}, \quad V^{(1)} = \{v_1, v_2, \dots, v_{6k-1}, v_{6k}\}$$

$V' = \{v_1', v_2', v_3', v_4', v_5', v_6'\}$  とし、これらを点集合とする完  
 全グラフをそれぞれ  $K_4^{(0)}$ ,  $K_{6k}^{(1)}$ ,  $K_6'$  とする。また、

$$W = W^{(0)} \cup W^{(1)} \cup W',$$

$$W^{(0)} = \{(v_0, 1 \cdot 2), (1 \cdot 2, v_2), (v_3, 3 \cdot 4), (3 \cdot 4, v_4)\},$$

$$W^{(1)} = \{(v_1, 1 \cdot 2), (1 \cdot 2, v_2), \dots, ((6k-1) \cdot 6k, v_{6k})\},$$

$$W' = \{(v_1', 1 \cdot 2'), (1 \cdot 2', v_2'), \dots, (5 \cdot 6', v_6')\} \text{ とおく。}$$

(ii) により、完全グラフ  $K_{10}^{(0,1)}$ ,  $V(K_{10}^{(0,1)}) = V^{(0)} \cup V'$  に  
 対する中間グラフ  $M(K_{10}^{(0,1)})$  はその部分グラフ  $M(K_4^{(0)})$  が (i)  
 で示した如きサイクル表示をもち、自由線の集合が  $W^{(0)} \cup W'$   
 であるようなサイクル表示をまたしめることができる。

帰納法の仮定により、完全グラフ  $K_{6k+4}^{(0,1)}$ ,  $V(K_{6k+4}^{(0,1)}) = V^{(0)} \cup V^{(1)}$   
 の中間グラフ  $M(K_{6k+4}^{(0,1)})$  はその部分グラフ  $M(K_4^{(0)})$  が (i) で示  
 した如きサイクル表示をもち、自由線の集合が  $W^{(0)} \cup W^{(1)}$   
 であるようなサイクル表示をもちうる。

さて、 $X(M(K_{6(k+1)+4}))$  内で  $W = W^{(0)} \cup W^{(1)} \cup W'$  に属せず、  
 上述のサイクルに属さない線の集合は、次の (A), (B) の2種

に分けられる。

(A)  $V^{(1)}$  と  $V'$  を 2 組の独立点集合とする完全 2 組グラフ (complete bigraph)  $K_{6k,6}$  の中間グラフ  $M(K_{6k,6})$  に属するすべての線の集合, および

(B)  $K_4^{(0)}$ ,  $K_{6k}^{(1)}$ ,  $K_6'$  からそれぞれ任意の 1 点  $v_i^{(0)}$ ,  $v_j^{(1)}$ ,  $v_{k'}'$  を取り出すとき得られる線の再分点で作る 3-サイクル

$(i \cdot j, j \cdot k', k' \cdot i)$  をなす線集合の集合族。

(A) の線集合, 即ち,  $M(K_{6k,6})$  の線集合は線素な 6 口の  $K_{6k+1}$  の線集合と 6 口の  $K_7$  の線集合の和で, これらのすべての線は線素な 3-サイクルを形成する ([12])。 (B) のすべての線は明らかに線素な 3-サイクルを形成する。

かくして,  $M(K_{6(k+1)+4})$  の線集合  $X(M(K_{6(k+1)+4}))$  は, 自由線の個数  $|X| = p$  で, 残りの線は 2 口の 4-サイクルと, 他は 3-サイクルであるようなサイクル表示をまつことを知る。

故に, 任意の  $p$  ( $p \equiv 4 \pmod{6}$ ) に対し  $M(K_p)$  は上の如きサイクル表示をまつことが示される。

以上で定理 7.3 の証明が完了した。

## §8 中間グラフの被覆数, 独立数

グラフ  $G$  の点被覆数, 線被覆数, 点独立数, 線独立数, 点-点被覆数, 線-線被覆数をそれぞれ  $\alpha_0(G)$ ,  $\alpha_1(G)$ ,  $\beta_0(G)$ ,  $\beta_1(G)$ ,  $\delta_0(G) = \alpha_{00}(G)$ ,  $\delta_1(G) = \alpha_{11}(G)$  で表わす。また,  $\{\alpha\} = -[-\alpha]$  とする。

命題 81, 定理 81 の証明に用いられる諸定理を奪げておく。

## 命題 8A (Prop. 11 of [12])

$p$  点よりなるグラフ  $G$  について,  $\beta_1(G) = \frac{p}{2}$  は,  $G$  が 1-因子 (1-factor) をもつための必要十分条件である。

## 定理 8A (Theorem 1 of Gallai [15])

任意の自明でない (non-trivial) 連結グラフ  $G$  について,

$$\alpha_0 + \beta_0 = p = \alpha_1 + \beta_1$$

## 定理 8B (Theorem 2 of [15])

グラフ  $G$  の線グラフを  $L(G)$  とすると,

$$\alpha_0(L(G)) = p - \alpha_1(G), \quad \beta_0(L(G)) = \beta_1(G),$$

$$\delta_0(L(G)) = \delta_1(G)$$

## 定理 8C (Gupta [16])

$G$  を  $(p, 8)$ -グラフ とすると,  $\alpha_1(L(G)) = \left\{ \frac{p}{2} \right\}$ ,  $\beta_1(L(G)) = \left[ \frac{p}{2} \right]$

## 命題 81

$G$  を 1 の nontrivial, 連結な  $(p, 8)$  グラフとし,  $G^*$  を  $G$  の endline graph とすると。



$$\alpha_0(G^+) = \alpha_1(G^+) = \beta_0(G^+) = \beta_1(G^+) = \sigma_0(G^+) = \rho, \quad \sigma_1(G^+) = \alpha_1(G)$$

(証明)

$G$ が $(p, 8)$ グラフであるから,  $G^+$ の定義により $G^+$ は $(2p, p+8)$ グラフである。 $G^+$ は1-因子をもつから命題Aにより,  $\beta_1(G^+) = \rho$ を得る。これに定理8Aを用いて  $\alpha_1(G^+) = \rho$ を得る。 $\alpha_0(G^+)$ について考えるに $G^+$ のすべての端線を点で被うには、少なくとも $\rho$ 個の点を要する、従って $G^+$ の点被覆数は少なくとも $\rho$ 点を含む。いま $\rho$ 点として $G$ の点 $v_i$  ( $i=1, 2, \dots, \rho$ )をえらべば、集合 $\mathcal{V}(G) = \{v_i \mid i=1, 2, \dots, \rho\}$ は勿論 $G$ の点被覆数 $\rho$ 、かつ $G^+$ の端線をも被っている。したがってこれは $G^+$ の点被覆でもある。これより  $\alpha_0(G^+) = \rho$ を得る。再び定理8Aを用いて  $\beta_0(G^+) = \rho$ を得る。

次に $G^+$ の点-点被覆 (point-point cover) をとることにすると、 $G^+$ の各端点 $v_i'$ を被うには $v_i'$ または $v_i$ の少なくとも一方を含むことを要するから $v_i$ または $v_i'$ の一方は $G^+$ の任意の点-点被覆に属し、従って $G^+$ の点-点被覆は少なくとも $\rho$ 点を含む。一方 $G^+$ の点から $v_i, v_i'$ の一方のみをとることにして $\rho$ 点からなる集合を作ればこれは $G^+$ の点-点被覆である。これより  $\sigma_0(G^+) = \rho$ 。

最後に $\sigma_1(G^+)$ と $\alpha_1(G)$ を比較しよう。 $G$ の任意の線被覆は $G^+$ の線-線被覆となるから  $\alpha_1(G) \geq \sigma_1(G^+)$ を得る。逆に、

$G^+$ の任意の線-線被覆 (line-line cover)  $\mathcal{L}$  を考えると,  $G^+$ の端線  $(v_i, v_i')$  は  $\mathcal{L}$  に属するか, そうでなければ  $(v_i, v_i')$  を cover すべき  $v_i$  と接合する  $\mathcal{L}$  の 1 線が存在しなければならぬ。従って  $v_i (i=1, 2, \dots, p)$  は  $\mathcal{L}$  の少なくとも 1 線と接合する。これは  $\mathcal{L}$  が  $G$  の線被覆であることを意味する。このより,  $\sigma_1(G^+) \geq \alpha_1(G)$  をうる。ゆえに  $\sigma_1(G^+) = \alpha_1(G)$  である。

以上により命題 8f が証明された。

### 定理 8f

$G$  を nontrivial な連結  $(p, g)$  グラフとし,  $M(G)$  を  $G$  の中間グラフとすれば, 次の等式が成り立つ:

$$\begin{array}{ll} \text{i) } \alpha_0(M(G)) = g & \text{ii) } \alpha_1(M(G)) = \left\{ \frac{p+g}{2} \right\} \\ \text{iii) } \beta_0(M(G)) = p & \text{iv) } \beta_1(M(G)) = \left[ \frac{p+g}{2} \right] \\ \text{v) } \sigma_0(M(G)) = \alpha_1(G) \end{array}$$

### (証明)

これらの等式は定理 11, 命題 8f および上述の定理 8B または定理 8d のいずれかを用いて導かれる。

$$\begin{array}{l} \text{i) } \alpha_0(M(G)) = \alpha_0(L(G^+)) = (p+g) - \alpha_1(G^+) = g \\ \text{ii) } \alpha_1(M(G)) = \alpha_1(L(G^+)) = \left\{ \frac{p+g}{2} \right\} \\ \text{iii) } \beta_0(M(G)) = \beta_0(L(G^+)) = \beta_1(G) = \left[ \frac{g}{2} \right] \\ \text{iv) } \beta_1(M(G)) = \beta_1(L(G^+)) = \left[ \frac{p+g}{2} \right] \\ \text{v) } \sigma_0(M(G)) = \sigma_0(L(G^+)) = \sigma_1(G^+) = \alpha_1(G) \end{array}$$

## §9 中間グラフの染色数

## 定理91

グラフ  $G$  の中間グラフ  $M(G)$  の染色数  $\chi(M(G))$  は,

$$\chi(M(G)) = \Delta G + 1$$

但し,  $\Delta G$  はグラフ  $G$  の最大次数とする。

(証明)

グラフ  $G$  の線染色数 (edge-chromatic number) を  $\chi_e(G)$  とすると,  $\chi(L(G)) = \chi_e(G)$ 。  $G$  の endline graph  $G^+$  の最大次数は  $\Delta G + 1$ 。 Vizing [26] により,  $\chi_e(G^+) = \Delta G + 1$  又は  $\Delta G + 2$ 。今,  $\chi_e(G^+) = \Delta G + 1 = \Delta G^+$  であることを示す。

$G$  が森 (forest) であれば,  $G^+$  も森であり, その染色数は  $\Delta$ 。 J. Wilson [25] の Theorem 20B により  $\Delta G^+ = \Delta G + 1$  である。又  $G$  が森でなければ, 少なくとも1つサイクルを含むから,  $G^+$  の任意の endline  $e$  は  $G$  内の少なくとも1本の線  $y$  と接続してない, 又任意の2つの endlines は接続してないことより, 線  $e$  を線  $y$  と同じ色で彩色可能。よって  $\chi_e(G^+) \leq \Delta G + 1$ 。

$$\text{一方 } \chi_e(G^+) \geq \Delta G + 1 \quad \therefore \chi_e(G^+) = \Delta G + 1$$

$$\chi(M(G)) = \chi(L(G^+)) = \chi_e(G^+) = \Delta G + 1$$

よって定理91の証明が完結した。

Beineke, Wilson [8] の定義によれば, endline graph  $G^+$  はグラフ  $G$  の  $\Delta$  である。

## §10 中間グラフの固有値について

## 命題101

$G$  の線グラフの隣接行列 (adjacent matrix) を  $A_L$ ,  $G$  の接合行列 (incident matrix) を  $D$  とすると,  $G$  の中間グラフ  $M(G)$  の隣接行列  $A_M$  は次の形をしている:

$$A_M = \begin{pmatrix} A_L & D' \\ D & 0 \end{pmatrix}$$

但し,  $D'$  は  $D$  の転置行列とする。

## 定理101

グラフ  $G$  を  $k$  次の正則グラフ (regular graph with valency  $k$ ) とし, グラフ  $G$  の固有値を  $\lambda$  とすると, 中間グラフ  $M(G)$  の固有値  $\mu$  との間には次の関係が成立する:

$$\mu = \frac{\lambda + k - 2 \pm \sqrt{(\lambda + k)^2 + 4}}{2} \quad (\text{多重度はそれぞれに共通})$$

但し  $\mu = -2$  をのぞく

又,  $\mu = -2$  の多重度は

$$(1 + \dim(\ker D)) \times \theta + \dim(\ker D) \times \delta(\theta, 0)$$

$$\theta = \dim(\ker D \cap \text{im} D)$$

(証明)

[3] 参照

## 定理102

$M(G)$  の固有値  $\mu$ ,  $A_L$  の固有値  $\rho$  とすると

$$\mu = \frac{\rho \pm \sqrt{\rho^2 + 4\rho + 8}}{2} \quad (\text{多重度, それぞれに共通}) \quad \text{ただし, } \mu = 0 \text{ を除く。}$$

又,  $\mu = -2$  の多重度は  $(H \dim(\ker D)) \times \theta + \dim(\ker D') \cdot \delta(\theta, 0)$

$$\theta = \dim(\ker D \cap \text{im } D')$$

(証明)

{3} 参照

系101

$M(G)$  の最大固有値は,  $G$  の最大固有値,  $L(G)$  の最大固有値よりも小さくなく,  $T(G)$  のそれより大きくない。

但し,  $T(G)$  はグラフ  $G$  の全グラフを表わすとす。

(証明)

{3} 参照

系102

$M(G)$  の固有値は  $-2$  以上である

(証明)

N. Biggs [9] の Prop. 3.7 より明らか。

## 参考文献

- (1) 秋山 仁;  $L(G)$ ,  $M(G)$ ,  $T(G)$  の分割数について(その1),  
日本数学会応用数学分科会予稿集(1974,4), 61-66
- (2) 秋山 仁, 恵羅 博, 斉藤 友克, 佐藤 創: グラフの  
固有値について, 京大数理解析研講究録 (to appear)
- (3) 秋山 仁, 恵羅 博; 線グラフ, 中間グラフ, 全グラフ  
の特徴づけについて, 日本数学会応用数学分科会予稿集  
(1975.4), 35-39
- (4) J.Akiyama, T.Hamada, I.Yoshimura: Miscellaneous Properties  
of Middle Graphs, TRU Math.Vol.10(1974),41-53
- (5) J.Akiyama, T.Hamada, I.Yoshimura: On the characterization  
of the Middle Graph, TRU Math.Vol.11
- (6) M.Behzad, G.Chartrand: Total Graphs and Traversability,  
Proc.Edinburgh Math.soc.15(1966)117-120
- (7) M.Behzad, G.Chartrand, E.A.Nordhaus: Triangles in Line-  
Graphs and Total Graphs, Indian J.of Math.Vol.10, No.2  
(1968)109-120
- (8) L.W.Beineke, R.J.Wilson: On the edge-chromatic number  
of a graph, Discrete Math.Vol.5, No.1(1973)15-20
- (9) N.Biggs. Algebraic Graph Theory (Cambridge Univ.Press,  
Reading, 1974)
- (10) L.C.Chang: The uniqueness and nonuniqueness of the  
triangular association scheme, Sci.Record 3(1959)604-613
- (11) G.Chartrand, M.J.Stewart: The Connectivity of Line Graph,  
Math.Ann.182, (1969)170-174
- (12) G.Chartrand, D.Geller, S.Hedetniemi: Graphs with Forbidden  
Subgraphs, J.Combinatorial Theory 10(1971)12-41
- (13) S.B.Chikkodimath, E.Sampathkumar: Planarity and Traversa-  
bility of Semitotal Graphs, J.Karnatak Univ.Sci.XVIII(1973)

- (14) M.K.Fort.Jr.,G.A.Hedlund: Minimal Coverings of Pairs of Triples,Pacific J.Math.8(1958)709-719
- (15) T.Gallai:Maximum-minimam Sätze über Graphen,Acta Math.Acad.Sci.Hunger 9(1958)395-434
- (16) R.P.Gupta: Independence and Covering Numbers of Line-Graphs and Total Graphs.,Proof Tech.in Graph Theory (F.Harary,ed)Academic Press,N.Y,1969
- (17) T.Hamada,I.Yoshimura: Traversability and Connectivity of the Middle Graph of a Graph,Discrete Math.(To appear)
- (18) T.Hamada,T.Nonaka,I.Yoshimura: On the Connectivity of Total Graphs,Math.Ann.196(1972)30-38
- (19) F.Harary: Graph Theory(Addison-Wesley,Reading,Mass.,1969)
- (20) F.Harary,C.St.J.A.Nash-Williams: On Eulerian and Hamiltonian Graphs and Line Graphs,Canad.Math.Bull.8(1965)701-709
- (21) A.J.Hoffman: On the uniqueness of the triangular association scheme,Ann.Math.Statist.31(1960)492-497
- (22) J.Krausz: Démonstration nouvelle d'un théoreme(1943)75-89
- (23) J.M.S.Simões-Pereira: A Note on the Cycle Multiplicity of Line-Graphs and Total Graphs,J.Combinatorial Theory 12(B)(1972)194-200
- (24) H.Whitney: Congruent graphs and Connectivity of Graphs,Amer.J.Math.54(1932)150-168
- (25) R.J.Wilson: Introduction to Graph Theory(Academic Press)1972
- (26) V.G.Vizing: On an estimate of the chromatic class of a p-graph(Russian) Diskret.Analiz.3(1964)25-30