数理解析研究所講究録
第 260 巻 1976 年 1-34

Prehomogeneous vector space の相対不変式の Fourier 変換について (II)

京大 理　室政和

Prehomogeneous vector space (G, V, f) を regular とする。この相対不変式 f は、(G, V, f) のひとつの real form をとってもかわらない。$V_{\mathbb{R}}$ 上の相対不変超函数 $|f|^s$ の Fourier 変換は $|f|^s$ のみたす極大過剰決定系の同伴数の関係を、原点の conormal と zero section の間で求めることに帰着される。

その際、我々は micro-local に、極大過剰決定系をより簡単な形に変形 (quantized contact transformation) して、その同伴数の関係を求めることを繰り返してゆけばよい。

[1][2] においては x^s, $\left(\sum_{i=1}^{\ell} x_i^2\right)^s$ という type の相対不変超函数 (より正確には Microfunction) のみたす極大過剰決定系への変換を行ったときの同伴数のつながりの公式を与えた。

ここでは [4] において予想した、より一般の Prehomo

generous vector space の相対不変式において その同伴数のつながりの公式の証明を与える。あわせて Binary cubic forms の discriminant に対して explicit に公式を与え それを実際の計算に応用する例を示す。

この一般公式の利点は 今までめんどうであった real の orbit 分解を いくらか省くことができかつ計算を簡略化することができることにある。

§1. 定理 及びその準備

我々は通常 $\mathbb{P}^*X$ (X は complex mf でその Projective bdle) の上で極大過剰決定系を考え それを $\sqrt{-1}S^*M$ (M は X の complexification とする real analytic mf) に制限して microfunction solution を考える。

ところが 多項式の complex power のあらわす超函数を考察する場合には zero section における solution もいっしょに考えるので 極大過剰決定系を T^*X で考え solution は $\sqrt{-1}T^*M$ 上に $\hat{C}_M$ を定義しなければならぬ。

しかしながら 便宜上 一次元ふやした mf $X'=X\times\mathbb{C}$ において考えれば より自然な formulation が可能である。以下 定理には直接関係はないが それを記す。

Xをn次元 complex mf. MをXをcomplex nbdとする real analytic mf とする。$X' = X \times \mathbb{C}$, $M' = M \times \mathbb{R}$ とすれば、M'はX'をcomplexification とする real analytic mf である。

$x_0 \in X$として、x_0のXでのnbdをVとする。Vの局所座標を、$(z) = (z_1 \cdots z_n)$　$V \cap M = V_{\mathbb{R}}$として　対応する real の局所座標を $(x) = (x_1, \cdots, x_n)$ と書く。$V' = V \times \mathbb{C} \ni (z, \hat{t})$
$V'_{\mathbb{R}} = V_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \ni (x, t)$ として、

$$\sqrt{-1}\ T^* V'_{\mathbb{R}} = \{ (x, t;\ \sqrt{-1}(\tau, y)) \}$$
$$T^* V' = \{ (z, \hat{t},\ (\hat{\tau}, \xi)) \}$$

と dual の座標を定めるとき

$$\sqrt{-1}\ S^* V'_{\mathbb{R}} \big|_{t=0\ \tau>0} = \{ (0, x, p) ; -p = \sqrt{-1}(y/\tau) \}$$
$$P^* V' \big|_{\hat{t}=0\ \hat{\tau}\neq 0} = \{ (0, z, \hat{p}) ; \hat{p} = \xi/\tau \}$$

と書くことができる。そして自然に

$$\sqrt{-1}\, S^* V'_{\mathbb{R}} \big|_{t=0\ \tau>0} \hookrightarrow P^* V' \big|_{\hat{t}=0\ \hat{\tau}\neq 0}$$

という real analytic mf. $\sqrt{-1} S^* V' \big|_{t=0, \tau>0}$ の complexification が存在する。さらに次のように $\varphi_{\mathbb{R}}$, φ の自然な同型が存在する。

$$
\begin{array}{ccc}
\sqrt{-1}\,S^*V'_{\mathbb{R}}|_{t=0,\,\tau>0} & \hookrightarrow & P^*V'|_{t=0\ \tau\neq 0} \\
\varphi_{\mathbb{R}}\ \wr\!\uparrow & & \varphi\ \wr\!\uparrow \\
\sqrt{-1}\,T^*V_{\mathbb{R}} & \hookrightarrow & T^*V
\end{array}
$$

ただし
$$\varphi_{\mathbb{R}} : (x, \sqrt{-1}y) \longmapsto (x, 0, \sqrt{-1}y)$$
$$\varphi : (z, \zeta) \longmapsto (z, 0, \zeta)$$

したがって上で考えるかわりに下で考えてもよい。

$P^*V'_{\mathbb{C}}$ 上の極大過剰決定系で、(ただし $\tau \neq 0$)

$$
\mathcal{M} : \begin{cases} t\,u = 0 \\ P_i(t, x, D_t, D_x)\,u = 0 \end{cases} \qquad [t, P_i] = 0
$$
$$P_i \in \mathcal{E}_{V'_{\mathbb{C}}}$$

(ここで $\mathcal{E}_{V'_{\mathbb{C}}}$ は P^*V' 上の Microdifferential ops の sheaf).

と書くことができるような極大過剰決定系だけを考えよう。

このような方程式の support は $\{t=0\}$ という集合の中に含まれるゆえ、T^*V 上の方程式と考えることができる。すなわち P_i は t, D_t を含んでいないとしてよいから、

$$\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{E}_V \Big/ \sum \mathcal{E}_V P_i$$

（$\mathcal{E}_V$ は T^*V 上の Microdifferential の sheaf）
を考えれば $\mathcal{M}$ と $\widetilde{\mathcal{M}}$ は1に1に対応している。

$\sqrt{-1}S^*V'_{\mathbb{R}}$ 上の sheaf $\mathcal{C}_{V'_{\mathbb{R}}}$ の subsheaf $\widetilde{\mathcal{C}}$ を

$$\widetilde{\mathcal{C}} \underset{\mathrm{def}}{=} \{ v \in \mathcal{C}_{V'_{\mathbb{R}}} \,;\, t v = 0 \}$$

と定義すれば、これは support は $\sqrt{-1}S^*V'_{\mathbb{R}}|_{t=0\ \tau\neq 0}$ に含まれている。とくに $\sqrt{-1}S^*V'_{\mathbb{R}}|_{t=0\ \tau>0}$ の上だけで考えれば、$(\sqrt{-1}T^*V_{\mathbb{R}}, \widetilde{\mathcal{C}}_{V_{\mathbb{R}}})$ という sheaf 付の space が考えられて $\widetilde{\mathcal{M}}$ の solution は $\widetilde{\mathcal{C}}_{V_{\mathbb{R}}}$ 上に考えることができる。
また $\sqrt{-1}S^*V'_{\mathbb{R}}|_{t=0\ \tau>0}$ 上の（分数階の）Microdifferential operators の sheaf $\mathcal{E}_{V'_{\mathbb{R}}}$ のうち $x_1\cdots x_n, D_{x_1}\cdots D_{x_n}$ で生成される subsheaf を $\sqrt{-1}T^*V_{\mathbb{R}}$ 上の Microdifferential operators の sheaf とし、$\mathcal{E}_{V_{\mathbb{R}}}$ と書くことにする。さきにあげた $\mathcal{E}_V$ も同様に $z_1\cdots z_n, D_{z_1}\cdots D_{z_n}$ で生成される $\mathcal{E}_{V'_{\mathbb{R}}}$ の subsheaf をさして言っている。

$\mathrm{supp}(\widetilde{\mathcal{M}}) = \bigcup \Lambda_i$ ときやく成分に分解したとき、simple な Lagrangian mf Λ_i に対しては order が定義できる。

$\mathrm{ord}_{\Lambda_i}(\widetilde{\mathcal{M}}) = \mathrm{ord}_{\varphi(\Lambda_i)}(\mathcal{M}) + \frac{1}{2}$ として定義する。

以上の議論は、V 上で行ったが、局所座標のはりあわせによって X 全体で行ったとしてよい。すなわち、

$$\begin{tikzcd}
\sqrt{-1}\, S^*M'_{t=0,\ \tau>0} \arrow[r, hook] & P^*X'|_{\hat{\tau}=0,\ \tau\neq 0} \\
\sqrt{-1}\, T^*M \arrow[r, hook] \arrow[u, "\varphi_{\mathbb{R}}\ \wr"] & T^*X \arrow[u, "\varphi_{\mathbb{R}}\ \wr"']
\end{tikzcd}$$

と同型な map をつくることができ、$\sqrt{-1}\, T^*M$ 上の sheaf $\widetilde{\mathcal{C}}_M$, $\mathcal{E}_M$、T^*X 上の sheaf $\mathcal{E}_X$ も同様にして定義できる。

T^*X の接触変換は $\hat{\tau}$, τ を変化させない P^*X' 上の接触変換であるから、T^*X 上の斉次正準変換である。

さて次に定理を述べるのであるが、その前に、connected component について注意しておく。

$\mathcal{M} : \mathcal{E}_X / \sum_{i=1}^{d} \mathcal{E}_X P_i$ が極大過剰決定系であるとする。これの real への制限 $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}$ の support は Lagrangian mfs の合併であるが、2つの support の点が同じ、

connected component に入っているということは $P_1 \cdots P_k$ の Principal symbols $\sigma(P_1)\cdots\sigma(P_k)$ (もちろん P_i たちは involutory base をなしていると仮定している。) の Hamilton vector fields $H_{\sigma(P_1)}\cdots H_{\sigma(P_k)}$ は $\mathrm{supp}(\mathfrak{M})$ の simple Lagrangian の上に flow を定義するが、その flow によって移りうるということである。

(G,V,f), (G',V',f') を $\mathbb{C}$ 上の n 次元, l 次元の regular prehomogeneous vector space. $(n>l)$ $(G_{\mathbb{R}}, V_{\mathbb{R}}, f)$, $(G', V'_{\mathbb{R}}, f')$ をそのある real forms とする。 ここで (G,V,f) は $f_1 \cdots f_m$ を相対不変式にもち $\chi_1 \cdots \chi_m$ をその characters とする。 $\sqrt{-1}\,T^*V_{\mathbb{R}}$, $\sqrt{-1}\,T^*V'_{\mathbb{R}}$ 上の $|f|^s$ $(=|f_1|^{s_1}\cdots|f_m|^{s_m})$ $|f'|^{s'}$ という相対不変超函数(正しくは micro function) のみたす極大過剰決定系を $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ とする。 $V=\{(x_1\cdots x_n)\}$, $V'=\{(x_1\cdots x_l)\}$ として $V' \hookrightarrow V$ は自然に定義されている。 $\pi: T^*V \to V$, $\pi': T^*V' \to V'$ と projection map を定義する。

Theorem

$\mathfrak{M}$ の holonomy diagram の simple Lagrangian Λ, Λ' の間に次の条件が成立しているとする。

i) Λ と Λ' は regular intersection.

ii) $\operatorname{Codim} \pi(\Lambda) < \operatorname{codim} \pi(\Lambda')$

さらに $\Lambda \cap \Lambda' = \mathcal{S}$ として $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ を connected components に分解し $\mathcal{S}_{\mathbb{R}} = \bigcup \mathcal{S}_j$ とするとき、各 $\mathcal{S}_j$ の generic point を s_j とする。（ここで $\mathcal{S}_{\mathbb{R}}$ とは $\mathcal{S}$ を real part に制限したものを指す。以下同様）その nbd U_j として real contact transformation によって

$$\Lambda = \{ x_{l+1} = \cdots = x_n = 0, \quad y_1 = \cdots = y_l = 0 \}$$
$$\Lambda' = \{ x_{l+1} = \cdots = x_n = 0 \quad x_1 = \cdots = x_l = 0 \}$$

$$\mathcal{M}\Big|_{U_j} = \mathcal{M}' \hat{\otimes} \delta(x'')\Big| \text{(原点のある nbd)}$$

とすることができる。

$V_{\mathbb{R}}' = \coprod_{i=1}^{k} V_{\mathbb{R}}^{i}$ は $\mathcal{M}'$ の zero section (の real part) として connected components 分解したとする。このとき

$$|f|_i^s(x') = \begin{cases} |f'(x')|^s & x \in V_{\mathbb{R}}^{i} \\ 0 & x \notin V_{\mathbb{R}}^{i} \end{cases}$$

と $V_{\mathbb{R}}'$ 上の hyperfunction を定義する。また $V_{\mathbb{R}}'^{*} = \coprod_{i=1}^{k} V_{\mathbb{R}}^{*i}$ を原点の conormal (の real part) を connected components 分解したものとして

$$|f'^*|_i^s(y') = \begin{cases} |f^*|^s(y') & y' \in V_{\mathbb{R}}'^{*i} \\ 0 & y' \notin V_{\mathbb{R}}'^{*i} \end{cases}$$

と hyperfunction (microfunction) を定義する。そして

$$\begin{bmatrix} |f'|_1^s(x') \\ \vdots \\ \vdots \\ |f'|_k^s(x') \end{bmatrix} = \int (2\pi)^{-\frac{l}{2}} |C_0'|^s |C_1'|^{t} A(s) \begin{bmatrix} |f'^*|_1^{-s-\frac{l}{r'}} \\ \vdots \\ \vdots \\ |f'^*|_k^{-s-\frac{l}{r'}}(y') \end{bmatrix} \exp\sqrt{-1}\langle x', y'\rangle dy'$$

となったとする。ここで $A(s)$ は $k\times k$ 行列（t は transposedの意）

$$C_0' = f'^*(y')\, f'(\mathrm{grad}\log f'^*(y'))$$

$$C_1' = f'^*(y')^{\frac{2l}{r'}}\, \mathrm{Hess}\log f'^*(y') \qquad \deg f' = r'$$

であるものとする。

以上の仮定のもとに、

s_i の nbd の極大過剰決定系は、micro local には、$\mathcal{M}'$ と同型ゆえ、$\Lambda_{\mathbb{R}}$, $\Lambda'_{\mathbb{R}}$ の real connected components の数は各々、l 個づつである。s_i の nbd で、$\Lambda_{\mathbb{R}} = \bigsqcup_{j=1}^{k} \Lambda^j_{\mathbb{R}}$, $\Lambda'_{\mathbb{R}} = \bigsqcup_{j=1}^{k} \Lambda'^j_{\mathbb{R}}$, と分解するとして、各々が、$V'_{\mathbb{R}}\times\{0\}$ / $\{0\}\times V'^*_{\mathbb{R}}$ の分解に対応しているとするとき $\Lambda^j_{\mathbb{R}}$ の同伴数 c_j、$\Lambda'^j_{\mathbb{R}}$ の同伴数 c'_j として、その関係は次のようにして与えられる。

$$\begin{bmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_k' \end{bmatrix} = A(\lambda) \begin{bmatrix} \tau(\Lambda^{1}_{\mathbb{R}}) - \tau(\Lambda_{\mathbb{R}} \cap \Lambda'_{\mathbb{R}}) & & \\ & \ddots & \\ & & \tau(\Lambda^{l}_{\mathbb{R}}) - \tau(\Lambda_{\mathbb{R}} \cap \Lambda'_{\mathbb{R}}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1' \\ \vdots \\ c_k' \end{bmatrix}$$

ここで $\tau(\Lambda^{i}_{\mathbb{R}}) = \underset{A \in \mathfrak{g}}{\mathrm{sgn}} \langle A x_i, {}^tA y_i \rangle$ (x_i, y_i) は $\Lambda^{i}_{\mathbb{R}}$ の generic pt.

$\tau(\Lambda_{\mathbb{R}} \cap \Lambda'_{\mathbb{R}}) = \underset{A \in \mathfrak{g}}{\mathrm{sgn}} \langle A x, A y \rangle$ (x, y) は 交わりの generic pt

$\mathfrak{g}$ は G の Lie Algebra. そして λ は $|f|^s$ の原点の conormal での order が $as + b$ とするとき.

$$\mathrm{ord}_{\Lambda'_{\mathbb{R}}} |f|^s - \mathrm{ord}_{\Lambda_{\mathbb{R}}} |f|^s = a\lambda + b$$

としてきまる。

(定理の statement 終わり)

(証明)

証明は次の順序で行なう。

① 局所的な座標をきめる。

② Real に制限したときの symbol の構成。

③ 不変な比をつくること。

④ 公式をみちびくこと。

① 局所的な座標をきめる。

Λ'のかわりにΛ_0、ΛのかわりにΛ_2を用いる。

$\Lambda_0 \cap \Lambda_2 = S'$とする。Realへの制限を$S_{\mathbb{R}}$とし、$S_{\mathbb{R}}$の generic pt. s の nbd Uで考える。$U_{\mathbb{R}}$をUの real への制限とする。以下単にΛ_0, Λ_2, S'と書いても、それはUとの intersection のことであるとする。

$\dim S' = n-l$ である。

Λ_0 (resp Λ_2) 上の holomorphic function φ_0 (resp. φ_2) で、次の条件をみたすものをつくる。

i) φ_0 (resp φ_2) は S' 上 r' 次で消えている。

すなわち Z を Λ_0 (resp Λ_2) 上の局所座標としたとき $\left.\dfrac{\partial^{r'} \varphi_0}{\partial Z^\alpha}\right|_S = 0 \quad |\alpha| = r' \quad \left(\text{resp. } \left.\dfrac{\partial^{r'} \varphi_2}{\partial Z^\alpha}\right|_S = 0 \quad |\alpha| = r'\right)$

ii) φ_0^{loc} (resp. φ_2^{loc}) を

$$\varphi_0(s+\varepsilon t) = \varepsilon^r \varphi_0^{loc}(s, t) + O(\varepsilon^r)$$
$$\left(\text{resp. } \varphi_2(s+\varepsilon t') = \varepsilon^r \varphi_2^{loc}(s, t') + O(\varepsilon^r)\right)$$

として $(s, t) \in T_S\Lambda_0$ (resp. $(s, t') \in T_S\Lambda_2$) 上の函数を定義する。$\mathfrak{g}$ (G の Lie Algebra) はこの normal bundle に作用しているが、φ_0^{loc} (resp. φ_2^{loc}) は

x (resp. x') について r 次式で G' 相対不変である。

φ_0^{loc} φ_2^{loc} は S の座標に関する non zero holomorphic function 倍をのぞいて unique にきまることは G' 相対不変性よりわかる。($T_S\Lambda_0$ を (resp. $T_S\Lambda_2$ を) trivialize してみればよい。)

$T_S\Lambda_0 \times_S T_S\Lambda_2 \simeq (TS)^\perp$ と同一視することができる。したがって、この trivialization によって $(TS)^\perp = \{(p,z,\xi)\}$ と座標をとることができる。ここで p は S 上の座標 (つまり $\{z=\xi=0\} = S$) で S の点 s を fix したとき $(TS)^\perp_s$ は $2l$ 次元 symplectic vector space になっている。

φ_0^{loc} φ_2^{loc} は $T_S\Lambda_0$ $T_S\Lambda_2$ 上の函数であるが、

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & (T_S\Lambda_2)\times_S(T_S\Lambda_0)\simeq(TS)^\perp \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ T_S\Lambda_2 & & T_S\Lambda_0 \end{tikzcd}$$

を自然な projection として φ_0^{loc} φ_2^{loc} は $(TS)^\perp$ 上の holomorphic function となる。

$(T_S S)^\perp$ の S' の nbd V' をとる。このとき、次の map ψ が下の条件をみたすようにとることができる。

> $\psi: T_S\Lambda_2 \times_S T_S\Lambda_0|_{V'} \hookrightarrow V\times V^* = T^*V$
>
> $\psi(S) = S'$　　$\psi(T_S\Lambda_0)=\Lambda_0$　　$\psi(T_S\Lambda_2)=\Lambda_2$.
>
> そしてこの写像で、両方の symplectic structure は両立する。

なぜならば、$\Lambda_0 = \{x'=0,\ x''=0\}$　$\Lambda_2 = \{y'=0,\ x''=0\}$ と symplectic 変換でうつせるから。(ここで symplectic 変換とは、同次正準変換のことである。)

② Real locus に制限したときの symbol の構成.

標準型での symbol を考えよう。以下はすべて Real locus に制限したときの話であるから、Λ_R, S_R などは、単に Λ, S などと書くことにする。今まで使用してきた座標、map もすべてそのまま real locus に制限して使うものとする。

さて標準型で $\Lambda_2 = \{y'=0,\ x''=0\}$　$\Lambda_0 = \{x'=0,\ x''=0\}$ ととるとする。$u=\sum_{i=1}^{k} c_i |y'(x')|^s \delta(x'')$ という超函数のみたす極大過剰決定系 $\mathcal{D}_X u$ を $\sqrt{-1}\,T^*X$ $(X=\{(x_1, \dots, x_n)\})$ にもちあげて考える。すると その $\mathcal{E}_X$ module $\mathcal{M}$ の support は Λ_0, Λ_2 を含み、

$$\Lambda_2 = \bigsqcup_{i=1}^{k} \Lambda_2^i \qquad \Lambda_0 = \bigsqcup_{i=1}^{k} \Lambda_0^i$$

と connected components に分解しているとする。各 Δ_2^i, Δ_c^i は W^{i} の support の $V_{\mathbb{R}}^i$ $V_{\mathbb{R}}^{*i}$ に対応している connected components である。

$u_i = 2^{\frac{n-r}{2}} \, |f'(x')|_i^{\lambda} \, \delta(x'')$ $i = 1 \cdots k$ としてその symbol を求めよう。 $A(s) = (a_{ij}(s))_{1 \le i,j \le k}$ として.

$$\sigma_{\Delta_2^{i'}}(u_i) = \begin{cases} |f'(x')|_i^{\lambda} \sqrt{\dfrac{|dx' dy'|}{dx}} & i = i' \\ 0 & i \neq i' \end{cases}$$

$$\sigma_{\Delta_c^{j'}}(u_i) = |c_0|^{\lambda} |c_1|^{\frac{1}{2}} \, a_{j'i}(\lambda) \, |f^{*}(y')|_{j'}^{-\lambda - \frac{\ell}{r}} \sqrt{\frac{|dy|}{dx}}$$

$$1 \le i', j' \le k$$

これは [1] P 65 補題 (2.2) による。

③ 不変な比をつくること

(G', V', f') の G' の表現が $V' = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\ell \end{pmatrix} \right\}$ の座標を入れて書いたとき

$$g \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\ell \end{pmatrix} \mapsto \rho(g) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_\ell \end{pmatrix}$$

となったとする。この座標を使って相対不変式 $f(x)$ を書いたときそれは必ず x_1 を含んだ単項式 $x_1^{k_1} \cdots x_\ell^{k_\ell}$

($k_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{l} k_i = r$) を持っている。もしなければ regular prehomogeneous vector space ではない。

$$\{^{k_1}x_1 \{^{k_2}x_2 \cdots \{^{k_l}x_l \; f_r(x)\}\cdots\}$$

$$\underset{def}{=} \underbrace{\{x_1 \cdots \{x_1}_{k_1\text{回}} \underbrace{\{x_2 \cdots \{x_2}_{k_2\text{回}} \cdots \underbrace{\{x_l \{\cdots \{x_l}_{k_l\text{回}} \; f_r(x)\}\cdots\}$$

と定義する。

G' の Lie 環を $\mathfrak{g}'$ としよう。$\mathfrak{g}'$ は $T_S\Lambda_2$ に作用している。S の座標を s とすれば $T_S\Lambda_2 = \{(s, z_1, \cdots z_l)\}$ と座標をえらんで $\mathfrak{g}'$ の作用は

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} \longmapsto \delta(\rho)(g) \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_l \end{pmatrix} \qquad \delta(\rho) \text{ は } \rho \text{ の微分表現}$$

となったとする。

$$Z_1 \underset{def}{=} \frac{1}{k_1! \cdots k_l!} \{^{k_1-1}z_1 \{^{k_2}z_2 \cdots \{^{k_l}z_l \; f_2^{loc}\}$$

と $T_S\Lambda_2$ 上の函数を定義する。同様にして $Z_2 \cdots Z_l$ も定義することができる。

$T_S\Lambda_0$ にも、同様にして $(\xi_1 \cdots \xi_l)$ を $(z_1 \cdots z_l)$ の dual の座標として $\mathfrak{g}'$ が反傾表現で作用しているので（内積はもちろん $\langle z, \xi \rangle = \sum_{i=1}^{l} z_i \xi_i$ で定義する。）$\Xi_1 \cdots \Xi_l$ を定義することができる。そして今定義した函数で l-form ω_2, ω_0 を次のように定義する。

$$\varsigma_z = dZ_1 \wedge \cdots \wedge dZ_\ell \,/\, (\det\{x_i, Z_j\})^{(1-\frac{1}{r})}$$

$$\varsigma_\xi = d\Xi_1 \wedge \cdots \wedge d\Xi_\ell \,/\, (\det\{\xi_i, \Xi_j\})^{(1-\frac{1}{r})}$$

わざわざこのように書きなおした理由は、これは相対不変式のとり方によらない、同次正準変換で不変なformであるということをみたすためである。

ここでComplex領域にもどって考える。Λ_2と余次元1で交わるcodimensionがΛ_2より高いLagrangianをΛ_1とする。そして

$$\mathrm{ord}_{\Lambda_1} f^s - \mathrm{ord}_{\Lambda_2} f^s + \frac{1}{2} = e(s) + a + 1$$

となったとする。ここで$f^s = f_1^{s_1} \cdots f_m^{s_m}$で$|f|^s = |f_1|^{s_1} \cdots |f_m|^{s_m}$のhyperfunctionのみたす極大過剰決定系のComplex領域でのgeneratorをあらわしているものとする。$e(s)$はs_iたちの一次結合であって$e(s) = \sum a_i s_i$と書けたとする。このとき$a^x_{\Lambda_1}(s) = e(s)^{r'e(x)} a^x_{\Lambda_2}(s)$となることに注意しよう。$x$は相対不変式$f^x = f_1^{x_1} \cdots f_m^{x_m}$に対応するcharacterで$a^x(s)$などもその$a$-函数のことである。詳しくは佐藤-新谷[3]などを参照のこと。(あるいは[1]でもよい P.54)

再び、real にもどって次の analytic function の比を考えるとこれは φ_0, φ_2, η のとり方にはよらない比で、当然のことながら有限で意味をもつ。u_i は Λ_2 に制限したとき Λ_2^i のみに support をもつ micro-function で、$\mathcal{M}$ の solution であるとする。

$$\sigma_{\Lambda_0^i}(u_i)\,|\varphi_0|^{\lambda+\frac{\ell}{r}}\exp\frac{\pi}{4}\left(\tau(\lambda,\lambda_{\Lambda_0},\mu)+\tau(\lambda_{\Lambda_0},\lambda_{\Lambda_2},\mu)\right)\times\sqrt{\frac{|dx|}{\varphi_*(s_0)\wedge\eta}}\,\Bigg|_S$$

$$:\ \sigma_{\Lambda_2^i}(u_i)\,|\varphi_2|^{-\lambda}\exp\frac{\pi}{4}\left(\tau(\lambda,\lambda_{\Lambda_2},\mu)\right)\left[\left|\frac{\{\varphi_0,\varphi_2\}}{r'e(s)^{r'-1}}\right|\right]^{\lambda+\frac{\ell}{2r'}}\times\sqrt{\frac{dx}{\varphi_*(s_2)\wedge\eta}}\,\Bigg|_S$$

η は S' 上の volume element.

ここで λ とは $\mathrm{ord}_{\Lambda_2} f^s-\mathrm{ord}_{\Lambda_0} f^s=r\lambda+\beta$。ただし $-\mathrm{ord}_{(原点のconormal)} f'^{s'}=rs'+\beta$ として決まる。(計算してみればわかるが、じつは $\lambda=e(s)+1$ である。) そしてこの比の右側の [ ] 内にある分母の $e(s)$ というのは

$$s_i=\langle A_i x,y\rangle/\delta x_i(A_i) \qquad \delta x_i(A_j)\begin{cases}=0 & i\neq j\\ \neq 0 & i=j\end{cases}$$

$$A_i\in\mathfrak{g}$$

で定義された $W=\{(x,\mathrm{grad}\log|f(x)|^s);\ s\in\mathbb{R},\ f(x)\neq 0\}$

上の函数である。

この比が，φ_0, φ_2, ηのとり方によらぬことを示そう。φ_2^{loc}はΣ'上のnon zero analytic function倍をのぞいてきまる。したがって$\varphi_2'^{\,\mathrm{loc}} = f\varphi_2^{\mathrm{loc}}$　$f \in \mathcal{O}_{\Sigma'}$　$f \neq 0$となったとする。$\varphi_2' = f\varphi_2 + \varphi_2''$（$\varphi_2''$は$\Sigma'$上normal方向の微分で$r+1$次以上消えている）と書くことができる。したがって，$\varphi_2' = f\varphi_2(1+\varphi_2''')$（$\varphi_2'''$は$\Sigma'$上$0$）と書き直すことができる。$\varphi_2$のかわりに$\varphi_2'$を代入しても比の右側は，$f^{-\lambda} \times f^{\lambda+\frac{\ell}{2r}} f^{-\frac{\ell}{2r}}$倍されて結局比の値は変わらない。$\varphi_0$についても同様。$\eta$によらないことは明らかであろう。

次に標準型の場合に直してこの比を計算してみよう。$\Lambda_2 = \{y'=0,\ x''=0\}$　$\Lambda_0 = \{x'=0,\ x''=0\}$。$(z, \zeta)$と$(x', y')$を同じ空間の同じ座標とみることができてP 14のsymbolをP 17の比に代入し，$\varphi_0 = f'^*(y')$　$\varphi_2' = f(x')$とおくと次のようになる。Maslov indexの影響はこのとき消えている。

$$\mathfrak{M}' = \begin{cases} (\langle A'x', D_{x'}\rangle - s'\,\Sigma\chi(A'))u = 0 \\ x_{\ell+1}u = \cdots = x_n u = 0 \end{cases} \quad \cdots \quad A' \in \mathfrak{g}'$$

と書くことができて

$$\overline{\mathcal{V}_1 = \{(x', s'\,\mathrm{grad}\log f(x')),\ s' \in \mathbb{R},\ f'(x') \neq 0\}}$$

$e(s) = s' = \langle x', y' \rangle / r'$ $\quad \varphi_1 = f^{*\prime}(y')$ $\quad \varphi_2 = f'(x')$

$\eta = dy_{l+1} \wedge dy_{l+2} \cdots \wedge dy_n = dy''$

とおくものとする。比は

$$|c_0'|^\lambda |c_1'|^{\frac{1}{2}} a_{j,i}(\lambda) \, |f^{*\prime}(y')|^{-\lambda - \frac{l}{r'}} \sqrt{\frac{|dy|}{|dx|}} \, |f^{*\prime}(y')|^{\lambda + \frac{l}{r'}} \sqrt{\left|\frac{dx}{dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_l \wedge \eta}\right|} \Bigg|_S$$

$$: |f'(x')|_i^\lambda \sqrt{\frac{dx' dy''}{dx}} \, |f'(x')|^{-\lambda} \left[\frac{\{f'(x'), f'(y')\}}{r' \left(\frac{\langle x', y' \rangle}{r'} \right)^{r'}} \right]^{\lambda + \frac{l}{2r'}} \sqrt{\left|\frac{dx}{dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_l \wedge \eta}\right|} \Bigg|_S$$

$$= |c_0'|^\lambda |c_1'|^{\frac{1}{2}} a_{j,i}(\lambda) : \left[\frac{\{f'(x'), f^{*\prime}(y')\}}{r' \left(\langle x', y' \rangle / r' \right)^{r'}} \right]^{\lambda + \frac{l}{2r'}} \quad \cdots\cdots (1)$$

π'をW_1からΔ_2へのprojection mapとして、

$$\begin{cases} f'(x') = f' \circ \pi' \big|_{\Delta_2} \\ f^{*\prime -1}(y') = c_0'^{-1} \dfrac{f' \circ \pi'}{s' r'} \Big|_{\Delta_0} \end{cases}$$

となっている。これによって $f^{*\prime}(y')$ $f'(x')$ をW上にまで延長することができ、これで $\dfrac{\{f'(x'), f^{*\prime}(y')\}}{r' s'^{r'-1}} \Big|_S$ を計算すればよい。すると

$$\{ c_0' f^{*\prime -1}(y') s' r', f^{*\prime}(y') \} / r' s'^{r'-1} \Big|_S$$

$$= \frac{C_0' r' s^{r'-1} f^{*r'-1}(y)\{s^{r'}, f^*(y)\}}{r' s^{r'-1}}\Bigg|_{s} = C_0'$$

すなわち、

$$(1) = |C_0'|^{\lambda} |C_1'|^{\frac{1}{2}} a_{j'i}(\lambda) : |C_0'|^{\lambda+\frac{\ell}{2r'}}$$

$$= |C_1'|^{\frac{1}{2}} a_{j'i}(\lambda) : |C_0'|^{+\frac{\ell}{2r'}}$$

$$= |C_0'|^{-\frac{\ell}{2r'}} |C_1'|^{\frac{1}{2}} a_{j'i}(\lambda) : 1 \quad \cdots\cdots (2)$$

次に $\mathfrak{M}$ の Λ_0, Λ_2 における micro function u_{Λ_2} u_{Λ_0} が

$$\sigma_{\Lambda_2}(u_{\Lambda_2}) = f_{\Lambda_2}^{s} \sqrt{\omega_{\Lambda_2}} / \sqrt{dx}$$

$$\sigma_{\Lambda_0}(u_{\Lambda_0}) = f_{\Lambda_0}^{s} \sqrt{\omega_{\Lambda_0}} / \sqrt{dx}$$

をみたすものとして、u_0 u_{Λ_2} を base としたとき $C_2^i : C_0^j$ がいくらであれば、$C_2^i u_{\Lambda_2}$ と $C_0^j u_{\Lambda_0}$ がひとつづきの $\mathfrak{M}$ の解としてつながるのかを求めよう。ここで $\mathfrak{M}$ の support の good Lagrangian Λ_i ([1] p48) に対しては、$f_{\Lambda_i}^{\alpha} = f^{\alpha}\circ\pi / a^{\alpha}_{\Lambda_i}(s)$ と定義している。π はもちろん W から V への Projection map である。$\varphi_0 = (f_{\Lambda_0}^{\alpha})^{-\frac{1}{e(\alpha)}}|_{\Lambda_0}$, $\varphi_2 = (f_{\Lambda_2}^{\alpha})^{\frac{1}{e(\alpha)}}|_{\Lambda_2}$ ととることができる。$a^{\alpha}_{\Lambda_0}(s) = e(s) r'^{e(\alpha)} a^{\alpha}_{\Lambda_2}(s)$ と書けることに注意して (P16)、

$$\{\varphi_0, \varphi_2\}\big|_{s}$$

$$= \left\{ e(s)\, r' \left(f^{x} / a^{x}_{\Delta_2}(s) \right)^{-\frac{1}{e(x)}},\ \left(f^{x} / a^{x}_{\Delta_2}(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\} \Big|_s$$

$$= \left(f^{x} / a^{x}_{\Delta_2}(s) \right)^{-\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s)\, r',\ \left(f^{x} / a^{x}_{\Delta_2}(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\} \Big|_s$$

$$= r' e(s) \left(f^{x} / a^{x}_{\Delta_2}(s) \right)^{-\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s),\ \left(f^{x} / a^{x}_{\Delta_2}(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\} \Big|_s .$$

$e(s) = \sum_{i=1}^{m} a_i s_i$ となっていることに注意しつつ.

$$\left\{ e(s),\ \left(f^{x} / a^{x}_{\Delta_2}(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\} \Big|_s$$

$$= \left(\frac{1}{a^{x}_{\Delta_2}(s)} \right)^{\frac{1}{e(x)}} \left\{ e(s),\ \left(f^{x} \right)^{\frac{1}{e(x)}} \right\} \Big|_s$$

$$= \left(\frac{1}{a^{x}_{\Delta_2}(s)} \right)^{\frac{1}{e(x)}} \sum_{i=1}^{m} a_i \left\{ s_i, f^{x} \right\} \frac{1}{e(x)} \left(f^{x} \right)^{\frac{1}{e(x)} - 1}$$

$$= \sum_{i=1}^{m} a_i \left\{ \frac{\langle A_i x, y \rangle}{\delta x_i(A_i)} f^{x} \right\} \frac{1}{e(x)} \left(f^{x} \right)^{-1} \left(f^{x} / a^{x}_{\Delta_2}(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{k} a_i r_i f^{x} \right) \left(\frac{1}{e(x) f^{x}} \right) \left(f^{x} / a^{x}_{\Delta_2}(s) \right)^{\frac{1}{e(x)}}$$

したがって $\{ \varphi_0, \varphi_2 \}|_s = r' e(s)$ そしてこの値が φ_0, φ_2 の W 上への延長のしかたによらないことはポアソンブラケットの性質より明らかである。そこで

~~次に~~

$$f^{s}_{\Delta_0} \sqrt{\frac{\omega_{\Delta_0}}{dx}} \left(\left(f^{x}_{\Delta_0} \right)^{-\frac{1}{e(x)}} \right)^{(e(s)+a) + \frac{l}{r'}} \sqrt{\frac{dx}{\psi_*(\xi_0) \wedge \eta}} \Bigg|_s$$

$$: \mathfrak{f}_{\Lambda_2}^{s}\sqrt{\frac{\omega_{\Lambda_2}}{dx}}\left(\left(\mathfrak{f}_{\Lambda_2}^{x}\right)^{\frac{1}{e(x)}}\right)^{-e(s)-a}\sqrt{\frac{dx}{\Psi_*(\xi_2)\wedge\eta}}\Bigg|_S$$

の比を求めよう。$\varphi_0 = (\mathfrak{f}_{\Lambda_0}^{x})^{-\frac{1}{e(x)}}$ $\varphi_2 = (\mathfrak{f}_{\Lambda_2}^{x})^{\frac{1}{e(x)}}$ であったから、$\mathfrak{f}_{\Lambda_0}^{S} = \mathfrak{f}_{\Lambda_0}^{\alpha s} = ((\varphi_0)^{-e(x)})^{s} = \varphi_0^{-e(s)}$, $\mathfrak{f}_{\Lambda_2}^{S} = \mathfrak{f}_{\Lambda_2}^{\alpha s} = ((\varphi_2)^{e(x)})^{s} = \varphi_2^{e(s)}$。

すなわち上の比は

$$\sqrt{\omega_{\Lambda_0}}\,(\varphi_0)^{a+\frac{\ell}{r}}\sqrt{\frac{dx}{\Psi_*(\xi_0)\wedge\eta}}\Bigg|_S : \sqrt{\omega_{\Lambda_2}}\,(\varphi_2)^{-a}\sqrt{\frac{dx}{\Psi_*(\xi_2)\wedge\eta}}\Bigg|_S$$

これは正則函数の絶対値の比であるから、2乗してくらべてよい。また Ψ^{-1} で $T_S\Lambda_2 \times_S T_S\Lambda_0$ 上にひきもどして考えてさしつかえない。このとき Ψ は symplectic (contact) structure を保存していることとこの空間 ($T_S\Lambda_2 \times_S T_S\Lambda_0$) には環 $\mathcal{G}'$ が作用してそれはもとの空間における $\mathcal{G}$ の作用で S 上の点を fix している作用であることに注意する。$\mathcal{G}$ orbit W は $T_S\Lambda_2 \times_S T_S\Lambda_0$ 上では $\mathcal{G}'$ orbit $\widetilde{W}$ として

$$\widetilde{W} = \overline{\{(z,\ s'\,\mathrm{grad}\log\varphi_2(z))\ ;\ s'\in\mathbb{R},\ z\in T_S\Lambda_2,\ \varphi_2(z)\neq 0\}}$$

$$= \overline{\{(s'\,\mathrm{grad}\log\varphi_0(\xi),\ \xi)\ ;\ s'\in\mathbb{R}\ \ \xi\in T_S\Lambda_0\ \varphi_0(\xi)\neq 0\}}$$

ととることができ $\widetilde{W}$ 上の函数 s' は $s'=0$ によって good Lagrangian の近傍で $\mathrm{supp}(\widetilde{W})$ を定義する函数で $s' = \langle z, \xi\rangle / r'$ とおくことができる。これは $\widetilde{W}$ の方程

式の generator で $\langle A'x', D_{x'}\rangle - \delta\chi(A')$ の $A'\in\mathfrak{g}'$ を $A' = I_\ell$ とおくことによって得られる。

さて先ほどの比において S^r 上 normal 方向に $(r'+1)$ 次以上で消える項は $(\varphi_0, \varphi_2 \circ \pi)$ 比には影響しないので、以下 $T_S\Lambda_2 \times_S T_S\Lambda_0$ 上で φ_0^{loc} φ_2^{loc} を φ_0, φ_2 のかわりにとって議論する。$T_S\Lambda_2 \times_S T_S\Lambda_0 = \{(P, z_1 \cdots z_\ell, \xi_1 \cdots \xi_\ell)\}$ として P は S^r 上の座標である。

φ_2^{loc} は S^r 上の non zero analytic fcn $d(P)$ をうまくとって $\varphi_2 = d(P) f'(z)$ ととることができる。また $\tilde{\pi}$ $: \tilde{W} \to T_S\Lambda_2$ を Projection map とし $\varphi_0^{-1} = \varphi_2 \circ \tilde{\pi} / s^{r'}|_{T_S\Lambda_0}$ とおくことができる。これは $f^{\chi}_{\Lambda_0} = f^{\chi}_{\Lambda_2} / e(s)^{r'\ell(\chi)}$ であることよりただちにわかる。そしてまた $T_S\Lambda_0$ への $\mathfrak{g}'$ の作用（正確には Hamilton vector 場の無限小作用）による相対不変式となっているので、φ_0^{loc} は $\varphi_0' = f'^{*}(\xi)$ の constant 倍である。したがって $\varphi_0 = c\varphi_0'$ として

$$\varphi_0^{-1} = \varphi_2 \circ \tilde{\pi} / s^{r'}|_{T_S\Lambda_0} = d(P)\,\frac{f'(s'\,\mathrm{grad}\log f^{*}(\xi))}{s'^{r'}}$$

$$= c^{-1} f'^{*-1}(\xi).$$

したがって $c^{-1}d(P)^{-1} = f'^{*}(\xi) f'(s'\,\mathrm{grad}\log f^{*}(\xi)) = c_0$

$$\begin{cases} \varphi_0 = c_0^{-1}\, d(P)^{-1}\, \varphi_0' = c_0^{-1}\, d(P)^{-1} f'^{*}(z) \\ \varphi_2 = f'(z)\, d(P) \end{cases}$$

を比に代入しよう。

$$\omega_{\Lambda_0}\,(c_0^{-1}d(p)^{-1})^{2(a+\frac{l}{2r'})}\,|\varphi_0'|^{2(a+\frac{l}{r'})}\,(d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_l\wedge\eta)^{-1}\Big|_{S}$$

$$:\ \omega_{\Lambda_2}\,(d(p)f'(z))^{-2a}\,(d(p))^{\frac{l}{2r'}}\,(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_l\wedge\eta)^{-1}\Big|_{S}$$

$$=\ \omega_{\Lambda_0}\,(c_0)^{-2(a+\frac{l}{2r'})}\,|f^{*\prime}(\xi)|^{2(a+\frac{l}{r'})}\,(d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_l\wedge\eta)^{-1}\Big|_{S}$$

$$:\ \omega_{\Lambda_2}\,|f'(z)|^{-2a}\,(dz_1\wedge\cdots\wedge dz_l\wedge\eta)^{-1}\Big|_{S'}$$

さて $|\omega_{\Lambda_2}|\,|f'(z)|^{-2a} = \mathrm{const}\ dz_1\wedge\cdots\wedge dz_l\wedge\eta$

$|\omega_{\Lambda_0}|\,|f^{*\prime}(\xi)|^{2(a+\frac{l}{r'})} = \mathrm{const}\ d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_l\wedge\eta.$

と書ける。なぜなら左辺は G' 相対不変であるから。そして両方の constant terms は

$$|\omega_{\Lambda_0}| = \frac{\pi_*(|\omega_{\Lambda_2}|)\wedge ds'}{c(s')}\Big/ds'$$

によって関連している。ここで $c(s')$ とは Λ_0 と Λ_2 の間の c 函数の factor で、$(s')^{r'a+\beta}$ である。

$\tilde{c}$ をある constant として

$$|\omega_{\Lambda_0}| = \frac{\pi_*(|\omega_{\Lambda_2}|)\wedge ds'}{c(s')}\Big/ds'\ \Big|_{\Lambda_0}$$

$$|\omega_{\Lambda_2}| = \tilde{c}\ |f(z)|^{2a}\,|dz_1\wedge\cdots\wedge dz_l\wedge\eta|$$

となったとする。

すると

$$|f^{*\prime}(\xi)|^{2(a+\frac{l}{r'})}|\omega\Lambda_0|$$

$$=|f^{*\prime}(\xi)|^{2(a+\frac{l}{r'})}\frac{\pi_*(|\omega\Lambda_2|)\wedge ds'}{C(s')}\Big/ds'\Big|_{T_s\Lambda_0}$$

$$=\tilde{C}|f^{*\prime}(\xi)|^{2a}|f(s'\,\mathrm{grad}\log f^{*\prime}(\xi))|^{2a}|f^{*\prime}(\xi)|^{\frac{2l}{r'}}|\mathrm{Hess}(s'\log f^{*\prime}(\xi))|$$

$$\times\frac{d\xi\wedge\eta\wedge ds'}{C(s')}\Big/ds'\Big|_{T_s\Lambda_0}$$

$$=\tilde{C}\ |C_0|^{2a}|C_1|\,d\xi\wedge\eta$$

したがって P.21の比は $\tilde{C}|C_0'|^{-\frac{l}{r'}}|C_1'|:\tilde{C}=|C_0'|^{\frac{-l}{r'}}|C_1'|$

すなわち $|C_0|^{-\frac{l}{2r'}}|C_1'|^{\frac{1}{2}}$ である(P22で2乗しているから).

P.20, P.17 をにらみあわせて

$$C_0^{j'}\exp\frac{\pi}{4}(\tau(\lambda,\lambda_{\Lambda_0},\mu)+\tau(\lambda_{\Lambda_0},\lambda_{\Lambda_2},\mu)):C_2^{i}\exp\left(\frac{\pi}{4}\tau(\lambda,\lambda_{\Lambda_2},\mu)\right)$$

$$=\quad a_{j'i}(\lambda):1$$

あとは [1] に準じた方法で Maslov index の計算をすれば, 結局 Theorem の公式がみちびかれる。

(q. e. d).

§2 例 $\left(\begin{array}{c} SL(3)\times SL(3)\times GL(2) \\ \square\otimes\square\otimes\square \end{array}\right)$

1 我々は§1において導いた定理を、二次型式以外のPrehomogeneous vector spaceに対して適用することを考える。すでに[4]において二次型式のあらわれる場合を扱い、もっとも基本的なPrehomogeneous vector spaceの系列についてのFourier変換の問題は(explicite formulaを求めるという意味においては)完全に解決された。我々が今度扱おうとしているのは、表題に挙げたものを含めて、4つのprehomogeneous vector spaceを含む系列のひとつである。それらの特徴はbinary cubic formsのdiscriminantのみたす極大過剰決定系を、そのholonomy diagramに含んでいるということである。

まず、Prehomogeneous vector space $(GL(2), \square\square\square)$を考えよう。このreal formは$(GL(2,\mathbb{R}), \square\square\square)$のみであり作用は次のようになる。

$g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL(2)$ $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in\mathbb{C}^2$ $\begin{pmatrix}u^g\\v^g\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$ とする。

$x_1u^3+x_2u^2v+x_3uv^2+x_4v^3$ に対して g

$$x_1u^{g3}+x_2u^{g2}v^g+x_3u^gv^{g2}+x_4v^{g3}=\rho_1^g(x)u^3+\rho_2^g(x)u^2v+\rho_3^g(x)uv^2+\rho_4^g(x)v^3$$

として.

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \xrightarrow{\rho^g} (\rho_1^g(x), \rho_2^g(x), \rho_3^g(x), \rho_4^g(x))$$

をgの作用とするとき、この作用に対する相対不変式は、

$$P(x) = x_2^2 x_3^2 + 18 x_1 x_2 x_3 x_4 - 4x_1 x_3^3 - 4x_2^3 x_4 - 27 x_1^2 x_4^2$$

であって、これはu, vについての binary cubic form の discriminant である。具体的に Lie 群の作用を書けば、

$$(g\cdot x)' = \begin{bmatrix} a^3 & a^2 b & a b^2 & b^3 \\ 3a^2 c & a^2 d + 2abc & 2abd + cb^2 & 3b^2 d \\ 3ac^2 & 2acd + c^2 b & ad^2 + 2bcd & 3bd^2 \\ c^3 & c^2 d & cd^2 & d^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

である。

$\langle x, y\rangle = x_4 y_1 - \frac{1}{3} x_3 y_2 + \frac{1}{3} x_2 y_3 - x_1 y_4$ と内積をとるとき、この内積による反傾表現によって、$g^\iota = \begin{pmatrix} & -1 \\ 1 & \end{pmatrix} {}^t g^{-1} \begin{pmatrix} & 1 \\ -1 & \end{pmatrix}$ とおいたとき、$y \mapsto (g^\iota \cdot y)'$ という表現になり、これも全く同じ $P(y) = y_2^2 y_3^2 + 18 y_1 y_2 y_3 y_4 - 4 y_1 y_3^3 - 4 y_2^3 y_4 - 27 y_1^2 y_4^2$ の相対不変式をもつ。

$$|P|_1^s(x) = \begin{cases} P^s(x) & P(x) > 0 \\ 0 & P(x) < 0 \end{cases}$$

$$|P|_2^s(x) = \begin{cases} (-P(x))^s & P(x) < 0 \\ 0 & P(x) > 0 \end{cases}$$

と定義したとき、

これの Fourier 変換は、すでに Sintani [5] によって計算されている。すなわち、

$$\int \begin{bmatrix} |P|_1^s(x) \\ |P|_2^s(x) \end{bmatrix} \exp 2\pi\sqrt{-1}\langle x, y\rangle dx = \Gamma(s+\tfrac{5}{6})\Gamma(s+1)^2\Gamma(s+\tfrac{7}{6})\, 2^{4(s+1)}$$

$$\times\ 3^{6(s+1)} \times \frac{1}{18}\begin{pmatrix} \sin 2\pi s, & -\sin \pi s \\ -3\sin \pi s, & \sin 2\pi s \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{bmatrix} |P|_1^{-s-1}(y) \\ |P|_2^{-s-1}(y) \end{bmatrix} \qquad ([5]\ P. 164)$$

一方 $|C_0|^s = (3^3\cdot 2^2)^s$ $\sqrt{|C_1|} = 3^3\cdot 2^2$。これをあてはめて

$$\begin{bmatrix} |P|_1^s(y) \\ |P|_2^s(y) \end{bmatrix} = \int (2\pi)^{-\frac{4}{2}}(3^6\cdot 2^4)^s (3^3\cdot 2^2)\left(\frac{1}{3\cdot 2\pi^2}\right)\Gamma(s+\tfrac{5}{6})\Gamma(s+1)^2\Gamma(s+\tfrac{7}{6})$$

$$\times \begin{pmatrix} \sin 2\pi s, & -\sin \pi s \\ -3\sin \pi s, & \sin 2\pi s \end{pmatrix} |P|^{-s-1} \exp\sqrt{-1}\langle x, y\rangle dx$$

となり、同伴数のつながりの公式は、

$$\boxed{\begin{aligned} {}^tA(s) &= \left(\frac{1}{6\pi^2}\right)\Gamma(s+\tfrac{5}{6})\Gamma(s+1)^2\Gamma(s+\tfrac{7}{6}) \\ &\quad \times \begin{pmatrix} \sin 2\pi s, & -\sin \pi s \\ -3\sin \pi s, & \sin 2\pi s \end{pmatrix} \end{aligned}}$$

で与えられる。

2. 次に $GL(3)\times GL(3)\times GL(2)$ の Prehomogeneous vector

space について。これについては その相対不変式のみたす極大過剰決定系の holonomy diagram を詳しく記述したものが [6] にある。これは昨年の研究集会で共同計算されたものを関口次郎氏が多大の努力を払って整理執筆されたものである。以下それにならって相対不変式などを書いておこう。

$$g = \left(A,\ B,\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) \in G = SL(3)\times SL(3)\times GL(2)$$

に対して、

$$V \ni (X_1, X_2) \xmapsto{g} \left(A(aX_1+bX_2)B^{-1},\ A(cX_1+dX_2)B^{-1}\right)$$

が群の作用である。相対不変式は、

$$X_1 = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} \qquad X_2 = \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{bmatrix}$$

とおくとき、

$$f(X_1, X_2) = P_1^2 P_2^2 + 18 P_0 P_1 P_2 P_3 - 4 P_0 P_2^3 - 4 P_1^3 P_3 - 27 P_0^2 P_3^2.$$

ここで

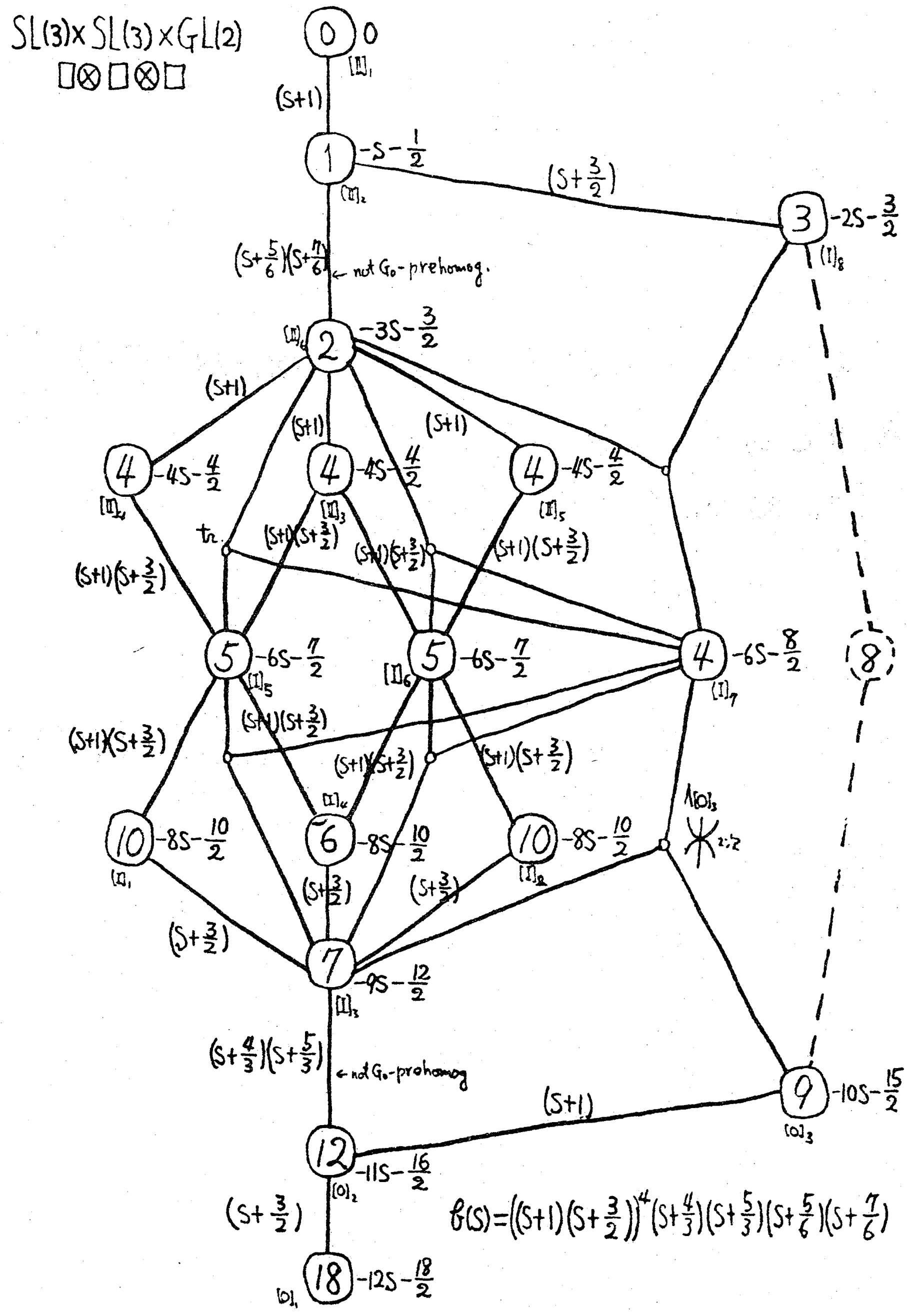
$$P_0 = \det \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

$$P_1 = \det \begin{bmatrix} x'_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x'_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x'_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x_{11} & x'_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x'_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x'_{32} & x_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x'_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x'_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x'_{33} \end{bmatrix}$$

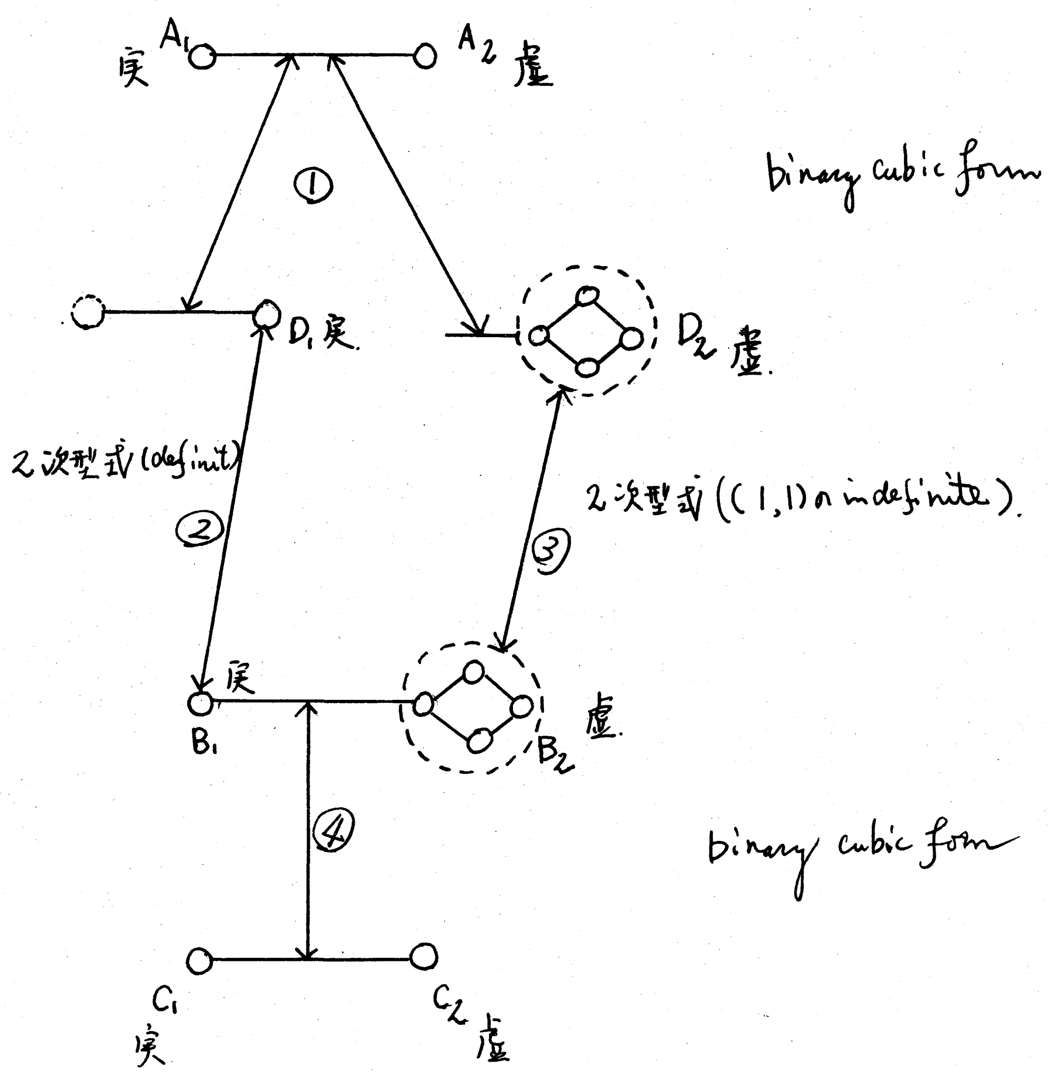
$$P_2 = \det \begin{bmatrix} x_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x'_{11} & x_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x_{32} & x'_{33} \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x_{33} \end{bmatrix}$$

$$P_3 \stackrel{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} x'_{11} & x'_{12} & x'_{13} \\ x'_{21} & x'_{22} & x'_{23} \\ x'_{31} & x'_{32} & x'_{33} \end{bmatrix}$$

そして holonomy diagram は次のようになる。



3 我々の必要とする. 原点のconormalまでの. (zerosectionからの)同伴数のつながりを示す行列を求めるために我々は次のLagrangianと.極大過剰決定系を使う。原点のconormal及び. zerosectionの. Lagrangianのreal locusへの制限によって. それらは2個に分かれる。証明は省くが. 結局次のようになっていることがわかる。



①②③④における同件数の関係をあらわす行列などは次のようである。ここでさきにholonomy diagramで実とか虚とか書いた意味は次のとおりである。すなわちD_1実D_2虚というのは①の交わりで局所化した極大過剰決定系はbinary cubic formのdiscriminantのみたすものであるが、その際D_1 D_2はいわば反傾表現における作用の2つのorbitにあたり、D_1はdiscriminantが正になるorbit D_2は負になるorbitで、これによりそのあらわすbinary cubic formが実根3つをもつか、一実根と2虚根をもつかに分かれる。B_1実 B_2虚についても同様である。

① $\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} D_1 \\ D_2 \end{pmatrix}$ は

$$\left(\frac{1}{6\pi^2}\right)\Gamma\left(s+\frac{5}{6}\right)\Gamma(s+1)^2\Gamma\left(s+\frac{7}{6}\right)\begin{pmatrix} \sin 2\pi s, & -3\sin\pi s \\ -\sin\pi s, & \sin 2\pi s \end{pmatrix}$$

② $D_1 \longrightarrow B_1$ は

$$\Gamma(2s+2)^2 \quad 2 \sin\pi(s+1) \quad \cos\pi(s+1) \Big/ \pi$$

③ $D_2 \longrightarrow B_2$ は

$$\Gamma(2s+2)^2 \quad 2 \quad \cos^2\pi(s+1) \Big/ \pi$$

④ $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$ は.

$$\left(\frac{1}{6\pi^2}\right)\Gamma(s+\tfrac{8}{6})\Gamma(s+\tfrac{3}{2})^2\Gamma(s+\tfrac{17}{6})\begin{pmatrix} \sin 2\pi(s+\frac{1}{2}), & -3\sin\pi(s+\frac{1}{2}) \\ -\sin\pi(s+\frac{1}{2}) & , \sin 2\pi(s+\frac{1}{2}) \end{pmatrix}$$

Maslov indexの影響は. どのつながりにおいても無い。したがって. ただこれをかけあわせると.

$$A(s) = \left(\frac{1}{6\pi^2}\right)^2\left(\frac{2}{\pi}\right)\Gamma(s+\tfrac{5}{6})\Gamma(s+1)^2\Gamma(s+\tfrac{7}{6})\Gamma(s+\tfrac{8}{6})\Gamma(s+\tfrac{3}{2})^2\Gamma(s+\tfrac{17}{6})$$
$$\times\Gamma(2s+2)^2$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\pi s)\sin(\pi s)(3\cos^2\pi s-\sin^2(2\pi s)), & 3\sin(2\pi s)\cos(\pi s)(\sin^2\pi s-\cos^2\pi s) \\ 0 & , (\cos^2\pi s)(3\sin^2\pi s-\sin^2(2\pi s)) \end{pmatrix}$$

となることがわかる。これが求めるべき結果であった!!

$A(s)$を使えば. P29. の $f(x_1 x_2)$ の Fourier変換は.

$$\mathcal{F}\begin{bmatrix} |f|_1^s(x) \\ |f|_2^s(x) \end{bmatrix} = (2\pi)^{-9}|C_0|^s\sqrt{|C_1|}\ {}^tA(s)\begin{bmatrix} \int |f|_1^{-s-\frac{3}{2}}(y)\exp\sqrt{-1}\langle x,y\rangle\,dy \\ \int |f|_2^{-s-\frac{3}{2}}(y)\exp\sqrt{-1}\langle x,y\rangle\,dy \end{bmatrix}.$$

としてあらわされる。ただし $C_0 = 3^6\cdot 2^{12}$ $C_1 = 3^{13}\cdot 2^{18}$ であり. $|f|_1^s(x)$ は $f>0$ ところに supportをもつ関数. $|f|_2^s(x)$ は $f<0$ なるところに support をもつものである。

[1] 柏原–三輪 Micro-local calculus と概均質ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換.
数研講究録 238 P66 ~ P147

[2] 佐藤–柏原–三輪–室 Imaginary Lagrangian のあらわれる Fourier 変換について.
数研講究録 248 P212 – P260

[3] 佐藤–新谷 概均質ベクトル空間の理論.
数学の歩み 15-1 P85 ~ P157

[4] 室 Prehomogeneous vector space の相対不変式の Fourier 変換について (I).
数研講究録 "代数解析学の諸問題" に発表予定

[5] T. Sintani On Dirichlet series ~~wh~~ whose coefficients are class number of integral binary cubic forms. Jour. Math. Soc of Japan. Vol 24. No.1 (1972) PP.132 – 188.

[6] 関口 既約な概均質ベクトル空間の1例について. 数研講究録 238. P148 ~ P183.