数理解析研究所講究録
第260巻 1976年 35-58

球函数つきの二次形式のテータ函数よりできる Siegel 尖点型式について

織田孝幸(東大理)

§0　この小論ではHecke[1], Schoeneberg[1]が elliptic modular の場合に得た, 球函数付きの二次形式のテータ函数についての結果の一部を Siegel modular の場合に拡張することを目標にする。証明は Schoeneberg[1] の一変数の場合をそのまま拡張すれば良く, 本質的に新しいことは何も無いが, また Maaß あたりによって既に知られている事かも知れないが, 明確に(level まで決めて)書かれた物は無いようであるから少しは意味があるであろうと思われる。

§1　記号, 定義, 結果.

まず言葉を決める。

$\mathfrak{S}_n$; 次数 n の Siegel 上半空間。$Z \in \mathfrak{S}_n$ でその点を記す。

$Sp(n,\mathbb{Z}) = \left\{ \sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in M_{2n\times 2n}(\mathbb{Z}) \;\middle|\; {}^t\sigma \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix} \sigma = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix},\ A,B,C,D \in M_{n\times n}(\mathbb{Z});\ E_n \text{は size } n \text{ の単位行列}; {}^t \text{は転置}. \right\}$

$Sp(n,\mathbb{Z})$ は周知のやり方で $\mathfrak{S}_n$ に作用している。

Q; $m\times m$ 対称, 有理整数, 正定値, 偶行列とする。

(ここで行列 Q が偶であるとは, 対角成分がすべて偶数であることを意味する。)

以下では size m も偶数と仮定する。Q^{-1} を Q の逆行列とする。

N; Q の level, 即ち自然数 N で $N\cdot Q^{-1}$ がまた整数, 偶行列

であるような最小の数と定める。

$\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}),\ A, B, C, D, \in M_{n\times n}(\mathbb{Z}) \;\middle|\; C \equiv 0 \pmod{N}\right.$ つまり $C = (C_{ij})$ の各成分, $\left. C_{ij} \equiv 0 \pmod{N} \right\}$

$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n, \mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \equiv E_{2n} \pmod{N}\right.$, E_{2n} は Age $2n$ の単位行列$\left.\right\}$。$\Gamma(N)$ は所謂, 主合同部分群である。

$\Gamma(N) \subset \Gamma_0(N)$ で共に $Sp(n, \mathbb{Z})$ の指数有限の部分群。

(ρ, V); $GL(n, \mathbb{C})$ の有限次元複素ベクトル空間 V を表現空間とする, 既約多項式表現. ここで $\mathbb{C}$ は複素数体

v で V の元を表わすとする. $V \neq \{0\}$ と仮定する。

L; $n\times m$ 複素行列, つまり $M_{n\times m}(\mathbb{C})$ の元。 ^{t} で転置行列を表わす。

$\mathbf{e}[x]$; x を複素数とするとき $\mathbf{e}[x]$ で $e^{2\pi i x}$ を意味することにする。ただしここで i は虚数単位。π は円周率。

<u>定義 1</u> $\vartheta(Z; Q)$ を $\vartheta(Z; Q) = \sum_{M \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})} \mathbf{e}\left[\frac{1}{2} \mathrm{tr}(M \cdot Q \cdot {}^tM \cdot Z)\right]$

と定める。Q 正定値, $Z \in \mathfrak{S}_n$ より右辺は収束して $\mathfrak{S}_n$ 上の正則函数を定める。所謂二次形式のテータ函数である。適当な合同部分群をとれば, Siegel modular 型式になるのは周知である。これを少し一般化して,

<u>定義 2</u> $\vartheta(Z; Q; \rho, v, L)$ を

$$\vartheta(Z; Q; \rho, v, L) = \sum_{M \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})} \mathbf{e}\left[\frac{1}{2} \mathrm{tr}(M \cdot Q \cdot {}^tM \cdot Z)\right] \cdot \rho(M \cdot Q \cdot {}^tL) v$$

と定めると，やはり右辺は収束して，ベクトル空間Vに値をとる$\mathfrak{S}_n$上の正則函数と見做せる。右辺の式でvを取り除いたものを$\vartheta(Z;Q;\rho;L)$と記すことにするとこれも$\mathrm{End}_{\mathbb{C}}(V)$に値を取る$\mathfrak{S}_n$上正則な函数と考えられる。

《定義1，でいい忘れたが，trはtraceの意味である．またMは全ての$n\times m$整数行列を動く。》

定理1．$Z\in\mathfrak{S}_n$，$\sigma=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$，NはQのlevelとする。

また$Z^{\#}=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}=\sigma(Z)$とする。このとき

$$\vartheta(Z^{\#};Q;\rho;L;v)=\mu(\sigma)^{-1}\{\det(CZ+D)\}^{\frac{m}{2}}\rho(CZ+D)\vartheta(Z;Q;\rho;L;v)$$

但し，ρがtrivial表現，identity表現のどちらとも同値でないときは，$L\cdot Q\cdot {}^tL=0$（右辺は$n\times n$の零行列）を仮定する。また$\mu(\sigma)$は$\Gamma_0(N)$から絶対値1の複素数に値を取る指標であって，μはQのみに依り，ρ, L, v, Zには依らない。$\mu(\sigma)$は後で決定されるように±1をのみ値として取る。

特に$\rho(CZ+D)=\{\det(CZ+D)\}^k$，$k\in\mathbb{Z}$，$k\geq0$，のときに上の定理を特殊化すれば$\sum_{M\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})}\{\det(M\cdot Q\cdot{}^tL)\}^k e[\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M\cdot Q\cdot{}^tMZ)]$は$L\cdot Q\cdot{}^tL=0$のとき重さ$\frac{m}{2}+k$で，multiplicator μの$\Gamma_0(N)$に属するmodular型式になることがわかる。（実は，のちほどわかるように$k>0$のときは尖点型式になることも言える。）

定義 3　H を $n\times m$ 整数行列で $H\cdot Q\equiv 0 \pmod{N}$ とする。このとき $\vartheta(Z:Q;H;\rho,L,v)$ を

$$\vartheta(Z:Q,H:\rho,L,v)=\sum_{\substack{M\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})\\ M\equiv H \pmod{N}}} \mathbf{e}\left[\frac{1}{2N^2}\mathrm{tr}(M\cdot Q\,{}^tM Z)\right]\rho(M\cdot Q\,{}^tL)v$$

と定めると，右辺は V-valued，$\mathfrak{S}_n$ 上の正則函数.

定理 2　$\sigma=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\Gamma(N)$，$Z^{\#}=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ とする。ρ が trivial 表現，あるいは，identity 表現と同値でないとき，$L\cdot Q\cdot{}^tL=0$ を仮定するとき

$$\vartheta(Z^{\#}:Q:H:\rho,L,v)=\mu_H(\sigma)^{-1}\det(CZ+D)^{\frac{m}{2}}\rho(CZ+D)\vartheta(Z:Q:H\,\rho\,L\,v)$$

$\mu_H(\sigma)$ は $\Gamma(N)$ から絶対値 1 の複素数への指標．(実はあとでわかるように $\mu_H(\sigma)=1$)

$\sigma\in Sp(n,\mathbb{Z})=\Gamma(1)$ のとき $\det(CZ+D)^{-\frac{m}{2}}\rho(CZ+D)^{-1}\vartheta(Z^{\#};Q;H;\rho,L,v)$ は $\vartheta(Z:Q:H^2\,\rho\,L,v)$ (H^1 は $H\cdot Q\equiv 0 \pmod{N}$ なる integral matrix の mod. N の class での代表。$H^1\equiv H^2 \pmod{N}$ ならば明らかに $\vartheta(Z:Q:H^1\,\rho,L,v)=\vartheta(Z,Q,H^2,\rho,L,v)$) たちのσにのみ依る数を係数とする一次結合として表わされる。$\mu_H(\sigma)=1$ が言えれば，これより $\Gamma(1)/\Gamma(N)$ の表現を得る。(定理 2 終り。)

定理 1と2の前半を証明するためにまずテータ変換公式を思い出す。

§2　テータ変換公式

まず記号を定める。$\tau\in\mathfrak{S}_g$ を g 次 Siegel 上半空間の点とする。

また $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{Z})$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in M_2(\mathbb{Z})$ とする。さらに $u \in \mathbb{C}^g$ を複素 g 次元横ベクトルとする。m', m'' を各々 g 次元実横ベクトルとする。このとき moduli τ, arguement u, thetacharacteristic が (m', m'') のテータ函数 $\theta_{mm'}(\tau, u)$ は

$$\theta_{m'm''}(\tau, u) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} e\left[\frac{1}{2}(m'+n)\tau\,{}^t(m'+n) + (m'+n)(m''+u)\right]$$

と定義される。ただし n は g 次元の有理整数横ベクトル全てを動く。これについて次のテータ変換公式が知られている。

<u>定理</u>（テータ変換公式）

$(\tau, z) \in \mathfrak{S}_g \times \mathbb{C}^g$; $\sigma = \begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{Z})$

$\tau^{\#} = (\alpha\tau+\beta)(\gamma\tau+\delta)^{-1}$, $u^{\#} = u(\gamma\tau+\delta)^{-1}$, $m = (m', m'') \in \mathbb{R}^{2g}$ とするとき

$m^{\#} = (m^{\#\prime}, m^{\#\prime\prime}) = m \cdot \sigma^{-1} + \frac{1}{2}\left((\gamma\,{}^t\delta)_0, (\alpha\,{}^t\beta)_0\right)$

《ここで $(\ )_0$ は $(\ )$ 中の行列の対角成分を順に横にならべた行ベクトルを意味する。》

このとき

$$\theta_{m^{\#\prime} m^{\#\prime\prime}}(\tau^{\#}, u^{\#}) = ⓤ \cdot e\left[\frac{1}{2}u(\gamma\tau+\delta)^{-1}\gamma\,{}^tu\right] \det(\gamma\tau+\delta)^{\frac{1}{2}}\,\theta_{m'm''}(\tau, u)$$

が成立する。ここでⓤは絶対値 1 の複素数で、τ, u に依存しないで、(m', m'') と σ によって定まる。

特に $\det\gamma \neq 0$ とするとき

$$ⓤ^{-1} = \mu_0^{-1} \cdot e\left[\frac{1}{2}(m'\,{}^t\delta \cdot \beta\,{}^tm' - 2m'\,{}^t\beta \cdot \gamma \cdot {}^tm'' + m''\,{}^t\gamma \cdot \alpha\,{}^tm'') - \frac{1}{2}(\alpha\,{}^t\beta)_0(\delta\,{}^tm' - \gamma\,{}^tm'')\right]$$

ここで μ_0 は σ のみに依り (m', m'') に依らない絶対値 1 の複素数である。

上の定理については Igusa [1], [2], Siegel [1], あるいは Krazer [1] を見よ.

$\Gamma_g(1,2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(g,\mathbb{Z}) \;\middle|\; \frac{1}{2}(\alpha {}^t\beta)_0,\ \frac{1}{2}(\gamma {}^t\delta)_0$ が共に integral vector $\right\}$ となる $Sp(g,\mathbb{Z})$ の部分集合とする。これは実は $Sp(g,\mathbb{Z})$ の指数有限の部分群である。(c.f. Igusa [2])

$\Gamma_g(1,2)$ が $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, $\det\gamma \neq 0$ なる元から生成されていることに注意して

<u>系 1.</u> 上の定理と同じ記号の下で, 但し, $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in \Gamma_g(1,2)$, また $m^{\#}$ は $m^{\#} = (m'^{\#}, m''^{\#}) = (m', m'')\sigma^{-1}$ と定義しなおすことにすると,

$$\mathbf{e}\left[\frac{1}{2}\left(m' {}^t\delta \cdot \beta {}^t m' - 2m' \cdot {}^t\beta \cdot \gamma \cdot {}^t m'' + m'' \cdot {}^t\gamma \cdot \alpha {}^t m''\right)\right] \cdot \theta_{m'^{\#} m''^{\#}}(\tau^{\#}, u^{\#})$$

$$= \mu_0 \cdot \mathbf{e}\left[\frac{1}{2} u (\gamma\tau+\delta)^{-1} \gamma \cdot {}^t u\right] \cdot \det(\gamma\tau+\delta)^{\frac{1}{2}} \theta_{m'm''}(\tau, u)$$

が成立する。ただし μ_0 は σ のみに depend し, τ, u, m', m'' には依らない。

§3. 2次形式のテータ函数の変換公式

以下 $g = n \cdot m$ とする。$Z \in \mathfrak{S}_n$, $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{R})$, $A, B, C, D \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ とする。いま $\otimes$ で行列の Kronecker 積を意味することにする。ただし P, Q を行列とするとき $P\otimes Q = \begin{pmatrix} p_{11}Q, & p_{12}Q, & \cdots \\ p_{21}Q, & p_{22}Q, & \\ & & \end{pmatrix}$ となることに決めておく。E_m を size m の単位行列とする。

$\tau = Z\otimes Q$, $\alpha = A\otimes E_m$, $\beta = B\otimes Q$, $\gamma = C\otimes Q^{-1}$, $\delta = D\otimes E_m$ とす

ると，$\tau \in \mathfrak{S}_g$，$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{R})$ でしかも $Z^{\#} = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$

とするとき，$\tau^{\#} = Z^{\#} \otimes Q = (\alpha\tau+\beta)(\gamma\tau+\delta)^{-1}$。つまり

$$(Z, \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}) \in \mathfrak{S}_n \times Sp(n, \mathbb{R}) \longmapsto (Z \otimes Q, \begin{pmatrix} A\otimes E_m & B\otimes Q \\ C\otimes Q^{-1} & D\otimes E_m \end{pmatrix}) \in \mathfrak{S}_g \times Sp(g, \mathbb{R})$$

は equivariant embedding である。

特に $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ とするとき，$\begin{pmatrix} A\otimes E_m, & B\otimes Q \\ C\otimes Q^{-1}, & D\otimes E_m \end{pmatrix} \in Sp(g, \mathbb{Z})$ である。

実は，もっと強く，$\begin{pmatrix} A\otimes E_m, & B\otimes Q \\ C\otimes Q^{-1}, & D\otimes E_m \end{pmatrix} \in \Gamma_g(1, 2)$ である。

<u>定義</u> 4　$Z \in \mathfrak{S}_n$，$U \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$，$M', M'' \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ とするとき

$$\vartheta_{M'M''}(Z; Q; U) = \sum_{P \in M_{n\times m}(\mathbb{Z})} \mathbf{e}[\tfrac{1}{2}\{tr(P+M')Q\,{}^t(P+M')Z\} + tr(P+M')\,{}^t(U+M'')]$$

と右辺の和で左辺を定義する。Q 正定値よりこの函数は

$\mathfrak{S}_n$ 上で正則で，$U \in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ に関しても正則，M', M'' に関しては実解析的な函数で，これらの変数についての微分は項別に考えてすべて意味をもつ。

いま N を Q の level とする。このとき次の定理が成立する。

<u>定理</u> 3（二次形式のテータ変換公式）

$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ とする。$Z^{\#} = (AZ+B)(CZ+D)^{-1}$，

${}^tU^{\#} = {}^tU \cdot (CZ+D)^{-1}$　また　$\begin{cases} M^{\#\prime} = D\cdot M' - C\cdot M''\cdot Q^{-1} \\ M^{\#\prime\prime} = -B\cdot M'\cdot Q + A\cdot M'' \end{cases}$

とするとき

$$\mu(\sigma)\cdot \mathbf{e}[\tfrac{1}{2}tr(M'\cdot Q\cdot {}^tM'\cdot {}^tD\cdot B - 2\cdot M'\cdot {}^tM''\cdot {}^tC\cdot B + M''\cdot Q^{-1}\cdot M''\cdot {}^tC\cdot A)] \times$$
$$\times\ \vartheta_{M^{\#\prime}M^{\#\prime\prime}}(Z^{\#}; Q; U^{\#}) = \mathbf{e}[\tfrac{1}{2}tr\{UQ^{-1}\,{}^tU(CZ+D)^{-1}C\}]\cdot \det(CZ+D)^{\frac{m}{2}} \times$$

$\times\ \vartheta_{M'M''}(Z;\,Q:U)$

（証明）定義4の前で説明した equivariant embedding を使って，§2 のテータ変換公式の系1を書きなおせ．（終り）

注意　Q の行列としての size m が偶数のとき $\mu(\sigma)$ は $\Gamma_0(N)$ の絶対値1の複素数に値をとる指標。

系4．定理3で $U=0$，$M''=0$ とおけ　すると $U^{\#}=0$ で

$M^{\#\prime}=D\cdot M'$，$M^{\#\prime\prime}=-B\cdot M'\cdot Q$．このとき

$$\text{(F)}\ \cdots\cdots\ \mu(\sigma)\,\mathbf{e}\left[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(M'\cdot Q\,{}^{t}M'\cdot{}^{t}D\cdot B)\right]\cdot\vartheta_{M^{\#\prime},M^{\#\prime\prime}}(Z^{\#};\,Q;\,0)$$
$$=\det(CZ+D)^{\frac{m}{2}}\,\vartheta_{M',0}(Z:\,Q;\,0)$$

が成立する。

(F) の左辺を変形する。そのために

補題5

$$\mathbf{e}\Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(M'\cdot Q\cdot{}^{t}M'\,{}^{t}D\,B)+\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\{(P+DM')\cdot Q\,{}^{t}(P+DM')Z^{\#}\}+\mathrm{tr}\{(P+DM')\times$$
$$\times\,{}^{t}(-B\cdot M'\cdot Q)\}\Big]$$
$$=\mathbf{e}\Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\{M'\cdot Q\cdot{}^{t}(DM'+2P)\,{}^{t}(CZ+D)^{-1}Z\}\Big]\times\mathbf{e}\Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(PQ\,{}^{t}P\,Z^{\#})\Big]$$

（証明）

$$\text{左辺}=\mathbf{e}\Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(M'\cdot Q\,{}^{t}M'\cdot{}^{t}D\cdot B)+\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\{DM'Q\,{}^{t}(DM')Z^{\#}\}+\mathrm{tr}(DM'\cdot Q\,{}^{t}P\cdot Z^{\#})$$
$$+\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(P\cdot Q\,{}^{t}P\,Z^{\#})+\mathrm{tr}\{DM'\,{}^{t}(-BM'Q)\}+\mathrm{tr}\{P\cdot{}^{t}(-B\cdot M'\cdot Q)\}\Big]$$
$$=\mathbf{e}\Big[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\{M'\cdot Q\,{}^{t}M'\,{}^{t}D\cdot B+M'\cdot Q\,{}^{t}M'\,{}^{t}D\,Z^{\#}D\}+\mathrm{tr}\{-M'Q\,{}^{t}M'\,{}^{t}B\,D\}+$$
$$+\mathrm{tr}\{Z^{\#}DM'Q\,{}^{t}P-BM'Q\,{}^{t}P\}+\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(P\cdot Q\,{}^{t}P\,Z^{\#})\Big]$$

$$= e\left[\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{M' Q^t M'\,{}^tD Z^\# D - M' Q^t M'\,{}^tDB\} + \mathrm{tr}\{(Z^\# D - B) M' Q^t P\}\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\mathrm{tr}\{P Q^t P Z^\#\}\right]$$

$$= e\left[\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{M' Q^t (DM' + 2P)(Z^\# D - B)\} + \frac{1}{2}\mathrm{tr}(P Q^t P Z^\#)\right]$$

ところで $Z^\# D - B = {}^t(CZ+D)^{-1}\,{}^t(AZ+B)D - B = {}^t(CZ+D)^{-1}\cdot Z$

よって上式は

$$= e\left[\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{M' Q^t (DM' + 2P)\,{}^t(CZ+D)^{-1} Z\}\right] \times e\left[\frac{1}{2}\mathrm{tr}(PQ^t P Z^\#)\right]$$

(q.e.d.)

§4. Differential process

定理 1 を証明するためにいくつか補題を用意する。

定義 5. $L = (l_{ij})$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ を $n \times m$ 複素行列とする。
$M' = (m_{ij})$ $(1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ を $n \times m$ の実の変数行列とする。
$\mathcal{L}_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{m} l_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial m_{j\alpha}}$ $(1 \leq i, j \leq n)$ で n^2 個の微分作用素 $\mathcal{L}_{ij}$ を定める。

補題 6. $\mathcal{L}_{ij}\left(\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{M' Q^t (DM' + 2P)\,{}^t(CZ+D)^{-1} Z\} + \mathrm{tr}(PQ^t P Z^\#)\right)$

$$= \{L \cdot Q^t (DM' + P)\,{}^t(CZ+D)^{-1} \cdot Z\}_{ij}$$

(ただしここで P, Q, D, C, Z は定数と見做されている。また $\{\ \}_{ij}$ の意味は $\{\ \}$ 内の行列の (i,j) 成分を取り出すことを意味している)

これよりさらに

$$\mathcal{L}_{ij}\left(e\left[\frac{1}{2}\mathrm{tr}(M' Q^t M'\,{}^tD \cdot B)\right] \times e\left[\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{(P + DM') Q^t (P+M) Z^\#\} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \mathrm{tr}\{(P + DM')\,{}^t(-B \cdot M' Q)\}\right]\right)$$

$$= (2\pi i)\times\{L\cdot Q\cdot{}^t(DM'+P)\,{}^t(CZ+D)^{-1}Z\}_{ij}\times\mathbf{e}[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(M'Q\,{}^tM'\,{}^tD\cdot B)]\times$$

$$\times\mathbf{e}[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\{(P+DM')\cdot Q\cdot{}^t(P+DM')Z^{\#}\}+\mathrm{tr}\{(P+DM')\,{}^t(-BM'Q)\}]$$

が成立する。

(証明)
前半は直接計算せよ。後半は前半と補題4より。

命題7　ρ が trivial 表現か identity 表現のとき定理1は成立つ

(証明)　ρ が trivial 表現のとき。このとき $\vartheta(Z;Q;\rho;L,V)$ は定義4の $\vartheta_{MM''}(Z;Q;V)$ で $V=0$, $M'=M''=0$ とおいたものの定数倍である。よって定理3より定理1は ρ が trivial 表現のとき成立する。

ρ が identity 表現のとき，つまり $\rho(CZ+D)=CZ+D$ のとき。

$$\vartheta_{ij}(Z;Q;\rho;L)=\sum_{P\in M_{n,m}(\mathbb{Z})}\{L\cdot Q\cdot{}^tP\}_{ji}\times\mathbf{e}[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(P\cdot Q\cdot{}^tP\,Z)]$$

と $\vartheta_{ij}(Z;Q;\rho;L)$ を定めるとき，

$$\vartheta(Z;Q;\rho;L)=(\vartheta_{ij}(Z;Q;\rho;L))\quad《n\times n の行列》$$

さて式(F)の両辺に微分作用素の行列 $(\mathcal{L}_{ji})$ $(1\leqq j,i\leqq n)$ を適用する。そののちに $M'=0$ とおく。すると

$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)$左辺 $=\mu(\sigma)\,{}^tZ\,(CZ+D)^{-1}\cdot\vartheta(Z^{\#};Q;\rho;L)$

$\left(\frac{1}{2\pi i}\right)\times$右辺 $=\det(CZ+D)^{\frac{m}{2}}\,{}^tZ\,\vartheta(Z;Q;\rho;L)$

両辺に ${}^tZ^{-1}$ を掛けて求める結果

$$\mu(\sigma)\,(CZ+D)^{-1}\cdot\vartheta(Z^{\#};Q;\rho;L)=\det(CZ+D)^{\frac{m}{2}}\vartheta(Z;Q;\rho;L)$$

を得る。定理1の形にするには両辺に左から $(CZ+D)$ をかけ

てから両辺を $v \in V$ に作用させればよい。《命題の証明終り》

一般の ρ については次の補題を用いる。

補題8　$L Q {}^tL = 0$ とする。定理3の系4と同じく $M^{\#'} = D \cdot M'$, $M^{\#''} = -B \cdot M' \cdot Q$ とおく。このとき

$$\left[\mathcal{L}_{i_1 j_1} \cdot \mathcal{L}_{i_2 j_2} \cdot \mathcal{L}_{i_3 j_3} \cdots\cdots \mathcal{L}_{i_k j_k}\left\{ \mathbf{e}[\tfrac{1}{2} \mathrm{tr}(M' \cdot Q \cdot {}^tM' \cdot {}^tD \cdot B) \cdot \vartheta_{M^{\#'}, M^{\#''}}(Z^{\#}; Q; 0)\right\}\right]_{M'=0}$$

$$= (2\pi i)^k \cdot \sum_{P \in M_{n \times m}(\mathbb{Z})} \{{}^tZ \cdot ((Z+D)^{-1} \cdot PQ \cdot {}^tL\}_{j_1 i_1} \cdot \{{}^tZ \cdot ((Z+D)^{-1} P \cdot Q {}^tL\}_{j_2 i_2} \cdots\cdots \{{}^tZ \cdot ((Z+D)^{-1} PQ {}^tL\}_{j_k i_k}$$

$$\times \mathbf{e}[\tfrac{1}{2} \mathrm{tr}(PQ {}^tP \cdot Z^{\#})]$$

(証明) 帰納法による。容易であるから省略。

定理1の証明：$\mathcal{L} = (\mathcal{L}_{ij})$, $n \times n$ 次の微分作用素の行列とする。いま (ρ, V) を既約多項式表現とし，V の基底を一つ固定し表現 ρ を行列表示する。つまり $X = (x_{ij}) \in GL(n, \mathbb{C})$ なる変数とするとき $\rho(X) = (\rho_{\alpha\beta}(X))$　$(1 \leqq \alpha, \beta \leqq \dim_{\mathbb{C}} V)$ $\rho_{\alpha,\beta}(X)$ は x_{ij} たちの同次数の斉次多項式である。$\rho_{\alpha,\beta}({}^t\mathcal{L})$ を定理3系4の(F)の左辺に適用すると，補題8より

$$\mu(\mathfrak{h})\left[\rho_{\alpha,\beta}({}^t\mathcal{L})\left\{ \mathbf{e}[\tfrac{1}{2} \mathrm{tr}(M' Q {}^tM' \cdot {}^tD \cdot B) \vartheta_{M^{\#'}, M^{\#''}}(Z^{\#}; Q; 0)\right\}\right]_{M'=0}$$

$$= (2\pi i)^{*} \mu(\mathfrak{h}) \sum_{P \in} \rho_{\alpha\beta}({}^tZ \cdot ((Z+D)^{-1} \cdot P \cdot Q \cdot {}^tL) \cdot \mathbf{e}[\tfrac{1}{2} \mathrm{tr}(PQ {}^tP \cdot Z^{\#})]$$

(F)の右辺にも同じことをやる。

これより，

$$\mu(\sigma)\sum_{P\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})}\rho_{\alpha,\beta}({}^tZ\cdot(CZ+D)^{-1}P\cdot Q\cdot{}^tL)\,\mathbf{e}[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(PQ{}^tPZ^{\#})]$$

$$=\det(CZ+D)^{\frac{m}{2}}\sum_{P\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})}\rho_{\alpha,\beta}({}^tZ\cdot P\cdot Q\cdot{}^tL)\,\mathbf{e}[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(P\cdot Q{}^tPZ)]$$

よって,

$$\therefore\ \mu(\sigma)\sum_{P}\rho({}^tZ\cdot(CZ+D)^{-1}P\cdot Q{}^tL)\,\mathbf{e}[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(P\cdot Q{}^tPZ^{\#})]$$
$$=\det(CZ+D)^{\frac{m}{2}}\sum_{P}\rho({}^tZ\cdot P\cdot Q{}^tL)\,\mathbf{e}[\tfrac{1}{2}(PQ{}^tPZ)]$$

$\det(Z)\neq 0$ $\det(CZ+D)\neq 0$ より $\rho({}^tZ\cdot(CZ+D)^{-1})$ は逆元をもつ。それを上式の両辺に掛けてやると

$$\mu(\sigma)\sum_{P}\rho(P\cdot Q{}^tL)\,\mathbf{e}[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(PQ{}^tP\cdot Z^{\#})]=\det(CZ+D)^{\frac{m}{2}}\times\rho((CZ+D)\times$$
$$\times\sum_{P}\rho(P\cdot Q{}^tL)\,\mathbf{e}[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(PQ{}^tP\cdot Z)]$$

両辺に $v\in V$ に適用すれば, 定理 1 を得る。(定理1の証明終り)

定理 2 の前半の証明も定理 1 と同様である。ただ $M'=0$ の代りに $M'=\frac{1}{N}H$ (H は $M_{n\times m}(\mathbb{Z})$ の元で $H\cdot Q\equiv 0\ (\mathrm{mod}.\ N)$ となるもの) とすればよい。

§5. 定理 1, 2 の補足

$\rho(X)=\det(X)^k$, kは正整数とする。このとき Maaß [1] の結果を使うと定理 1, 2 は以下のように定式化できる。

まず行列空間 $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ 上の次数 k の調和多項式を次のように定義する。

定義5 $h(X)$ 《 $X=(x_{ij})\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ 》を x_{ij} の多項式で次の二つの条件をみたすとき $h(X)$ を次数 k の調和多項式ということする。

(1). $\Lambda\in GL(n,\mathbb{R})$ に対し $h(\Lambda\cdot X)=(\det\Lambda)^k\cdot h(X)$.

$\frac{\partial}{\partial X}=\left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)$ を $n\times m$ の微分作用素$\underset{\text{(行列)}}{}$とする。$\mathscr{D}\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)$ を $n\times n$ 行列 $\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)\cdot Q^{-1}\cdot{}^t\!\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)$ の行列式である $2n$ 次定係数微分作用素とする。このとき，

(2) $\mathscr{D}\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)\cdot h(X)=0$ (恒等的に零).

定理 (MaaB) 次数 k の調和多項式は $\det(X\cdot Q\cdot{}^tL)^k$ 《 $LQ{}^tL=0$ 》たちの線型結合として書ける。つまり $h(X)$ に対して，定数 c_i と $L_iQ{}^tL_i=0$ なる $n\times m$ 複素行列 L_i が存在して

$$h(X)=\sum_i c_i\cdot\{\det(X\cdot Q\cdot{}^tL_i)\}^k$$

が成立する。

さて次数 k の調和多項式 $h(X)$ に対して

$$\vartheta(Z;Q;h)=\sum_{P\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})} h(P)\,\mathbf{e}\left[\tfrac{1}{2}\operatorname{tr}(PQ{}^tPZ)\right]$$

$$\vartheta(Z;Q;H;h)=\sum_{\substack{P\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})\\ P\equiv H\ (\mathrm{mod}\ N)}} h(P)\,\mathbf{e}\left[\tfrac{1}{2N^2}\operatorname{tr}(PQ{}^tPZ)\right]$$

《ただし H は integral $n\times m$ 行列で $H\cdot Q\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ N)$ 》

と定義すると，

定理 1′, 2′ (定理 1, 2の言いかえ)

$\vartheta(Z;Q;h)$ は $\Gamma_0(N)$ に属し weight $k+\frac{m}{2}$, multiplicator $\mu(\sigma)$ の Siegel modular 型式,

$\vartheta(Z;Q;H;h)$ は $\Gamma(N)$ に属し weight $k+\frac{m}{2}$, multiplicator $\mu_H(\sigma)$ の Siegel modular 型式である.

$k>0$ のときは cusp 型式になる。

(証明) 前半は o.k. 後半の cusp 型式になることを示す。

$\vartheta(Z;Q;\rho;L,v)$ が $\rho(*)=\det(*)^k$, $k>0$ のとき cusp 型式になることをいえばよい。Fourier 展開を使う.

$$\vartheta(Z;Q;\rho;L,v)=\sum_{P\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})}\det(P\cdot Q\cdot {}^tL)^k e[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(P\cdot Q\cdot {}^tP Z)]$$

$\det(P\cdot Q\cdot {}^tP)=0$ のとき, $\det(P\cdot Q\cdot {}^tL)=0$ となることを示す。

$Q=S\cdot {}^tS$ と書く。S はある実行列. よって $\det\{(PS)\cdot {}^t(PS)\}=0$ のとき $\det\{(PS)\cdot {}^t(LS)\}=0$ を示せばよい。よって上の定理の証明は次の補題に帰着される。

<u>補題</u> 9. R を $n\times m$ 実数行列とし $\det(R\cdot {}^tR)=0$ とする。このとき任意の複素行列 $L'\in M_{n\times m}(\mathbb{C})$ に対して $\det(R\cdot {}^tL')=0$.

(補題の証明). $\det(R\cdot {}^tR)=\sum(R\text{ の }n\text{ 次の小行列式})^2=0$

よって R の任意の $\underset{(n\text{次の})}{\text{小行列式}}=0$. 一方 $\det(R\cdot {}^tL')=\sum(R\text{ の }n\text{ 次の小行列式})\times(L'\text{ の }n\text{ 次の小行列式})=0$. (q.e.d.)

$\vartheta(Z;Q;H;h)$ についても同様。(<u>定理</u> 1′, 2′ の証明終り)

<u>注意</u> 上の定理の形ではまだ不充分である。完全な形はまた別の機会に。

§6. 例 "量指標"つきのテータ函数の類似物

Q を 2×2 とする。つまり $Q=\begin{pmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{pmatrix}$, $a,b,c\in\mathbb{Z}$ とする。

V として $n\times n$ 対称行列の空間をとる。表現 ρ は

$$X\in GL(n,\mathbb{C}) \rightsquigarrow X\cdot V\cdot {}^tX$$

で与えられているとする。

このとき $\vartheta(Z;Q;\rho;L,v)$ を計算する。

$D=\det Q=4ac-b^2>0$ とおく。

$$ax^2+bxy+cy^2=\frac{1}{2}(x,y)Q\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{a}\left(ax+\frac{b+\sqrt{-D}}{2}y\right)\left(ax+\frac{b-\sqrt{-D}}{2}y\right)$$

$N\in M_{n\times 2}(\mathbb{Z})$, $N=(n_{ij})$ $(1\leqq i\leqq n,\ \ j=1,2)$ とおく。

いま $\nu_k=a n_{k,1}+\frac{b+\sqrt{-D}}{2}n_{k,2}$ $(1\leqq k\leqq n)$ とおく。

$\mathfrak{a}=\mathbb{Z}a+\mathbb{Z}\left(\frac{b+\sqrt{-D}}{2}\right)$ とおく。

$\frac{1}{2}\mathrm{tr}(NQ{}^tNZ)=\frac{1}{a}\left(\sum_{i,j}\nu_i\overline{\nu_j}z_{ij}\right)$, ただし $Z={}^tZ=(z_{ij})\in\mathfrak{S}_n$

$\overline{}$ は複素共役を意味する。

$L\in M_{n\times 2}(\mathbb{C})$, $L=(l_{ij})$ $(1\leqq i\leqq n,\ j=1,2)$ とおく

$$\lambda_k=a l_{k,1}+\frac{b+\sqrt{-D}}{2}l_{k,2},\quad \lambda'_k=a l_{k,1}+\frac{b-\sqrt{-D}}{2}l_{k,2}\quad (1\leqq k\leqq n)$$

とおくとき, 条件 $LQ{}^tL=0$ は, 任意 k,l に対して

$$\lambda_k\lambda'_l+\lambda_l\lambda'_k=0$$

ということと同値. これは $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$, または $\lambda'_1=\lambda'_2=\lambda'_3=\cdots=\lambda'_n=0$, ということと同値である。

以下, $\lambda'_1=\lambda'_2=\lambda'_3=\cdots=\lambda'_n=0$ を仮定する。これより

$$NQ{}^tL=\frac{1}{a}\begin{pmatrix}\overline{\nu_1}\\ \overline{\nu_2}\\ \vdots\\ \overline{\nu_n}\end{pmatrix}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$$

よって $(NQ^tL)\,v\,{}^t(NQ^tL)$

$$=\frac{1}{a^2}(\lambda_1,\lambda_2\cdots\lambda_n)\,v\,{}^t(\lambda_1,\lambda_2,\cdots\lambda_n)\times\begin{pmatrix}\bar{\nu}_1^2, & \bar{\nu}_1\bar{\nu}_2, & \bar{\nu}_1\bar{\nu}_3 & \cdots & \bar{\nu}_1\bar{\nu}_n\\ \bar{\nu}_2\bar{\nu}_1, & \bar{\nu}_2^2, & \bar{\nu}_2\bar{\nu}_3, & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & & \\ \bar{\nu}_n\bar{\nu}_1, & \cdots & & & \bar{\nu}_n^2\end{pmatrix}$$

よって $(\lambda_1\,\lambda_2\cdots\lambda_n)\,v\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}\neq 0$ とすれば

$\vartheta(Z,Q,\rho,L,v)$ は定数倍を除いて

$$\vartheta_2(Z;Q)=\sum_{(\nu_1,\nu_2,\cdots\nu_n)\in\mathfrak{a}^n}\begin{pmatrix}\bar{\nu}_1^2, & \bar{\nu}_1\bar{\nu}_2, & \cdots & \bar{\nu}_1\bar{\nu}_n\\ \bar{\nu}_2\bar{\nu}_1, & \bar{\nu}_2^2 & & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \vdots\\ \bar{\nu}_n\bar{\nu}_1, & \cdots & & \bar{\nu}_n^2\end{pmatrix}\mathbf{e}\Big[\frac{1}{a}\Big(\sum_{i,j=1}^{n}\nu_i\bar{\nu}_j\,z_{ij}\Big)\Big]$$

と一致している。

<u>命題</u>10 $\det\vartheta_2(Z;Q)$ は重さが $n+2$, multiplicator が $\mu^n(\sigma)$ の cusp form で $\Gamma_0(N)$ に属する。

(証明) 容易であるから省略する。

$n=2$ でしかも $-D$ が $\mathbb{Q}(\sqrt{-D})$ の判別式と一致するとき, つまり $\mathfrak{a}$ の order が全整数環のとき, $\det\vartheta_2(Z;Q)$ を Fourier 展開して

$$\det\vartheta_2(Z;Q)=\sum_{\substack{S\in M_{2\times2}(\mathbb{Z})\\ S\text{ は even}}}a(S)\ \mathbf{e}\big[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\,SZ\big]$$

とするとき $\left(\frac{-D}{\det S}\right)=-1$ (平方剰余の記号) のとき $a(S)=0$ がいえる。

◎例; $Q=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}$, $n=2$ とする。$\vartheta_2(Z;Q)=0$

$Q=\begin{pmatrix}2&1\\1&4\end{pmatrix}$, $n=2$ とする。$\vartheta_2(Z;Q)\neq0$, $\det\vartheta_2(Z;Q)\neq0$.

実さいこのとき $\det\vartheta_2(Z;Q)$ を Fourier 展開すると

$$\frac{1}{4}\det\vartheta_2(Z;Q)=\mathbf{e}[z_{11}+z_{22}]+\cdots\cdots\quad\neq0.$$

注) §6の結果はもっと一般化できるが, このことについても別の機会に。

§7 定理2の後半の証明

$\sigma=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in Sp(n,\mathbb{Z})$, $Z\in\mathfrak{S}_n$, $Z^{\#}=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ とするとき，

$$\vartheta(Z^{\#};Q;H;\rho;L,v)=\det(CZ+D)^{\frac{m}{2}}\rho(CZ+D)\sum_{H'(\mathrm{mod}\,N)}\mu(\sigma;H,H')\vartheta(Z;Q;H;\rho;L,v)$$

《ここで H,H' は $n\times m$ 整数行列で $HQ\equiv H'Q\equiv 0\,(\mathrm{mod}.\,N)$》

右辺 $\sum_{H'}$ は H' は mod$N$ での類の代表を動く．$\mu(\sigma,H;H')$ は σ と H H' と Q のみに依る定数で，ρ,L,v H に依らない。

証明に入るまえに $\sigma=\begin{pmatrix}0&E_n\\-E_n&0\end{pmatrix}$ のときに試みにやってみる。まず二次形式のテータ級数の変換公式

$$\sum_{P\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})}e[-\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\{(P+M)Q^{-1}\,{}^t(P+M)Z^{-1}\}]=\frac{\{(-i)^n\det Z\}^{\frac{m}{2}}}{\det Q^{\frac{n}{2}}}\sum_{P\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})}e[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}(PQ\,{}^tPZ)+\mathrm{tr}(P\,{}^tM)]$$

から出発する．《ただしここで $M\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ である》

上式の証明は Poisson の和公式を用いる。

右辺の和を変形する。$P=\frac{1}{N}H_iQ+RQ$ $(i=1,\cdots,l)$ という表示を P に対して考える。ただしここでで $H_i\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$, $R\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$ で，$H_iQ\equiv 0\,(\mathrm{mod}.\,N)$《$N$ は Q の level》しかも $H_i\not\equiv H_j\,(\mathrm{mod}.\,N)$ (if $i\neq j$) で $\{H_i\}$ $(i=1,2,\cdots,l)$ は mod N での代表系とする。このとき右辺の和は変形されて

$$\sum_{H_i}\sum_{R\equiv H_i(\mathrm{mod}N)}e[\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{N^2}\mathrm{tr}(RQ\,{}^tRZ)+\tfrac{1}{N}\mathrm{tr}(RQ\,{}^tM)]$$

と書ける。ここで §4 でやったように differential operators $\mathcal{L}_{ij}$ を

両辺に適用して，そののち $M=\frac{1}{N}H$ 《$H\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})$, $H\cdot Q\equiv 0 \pmod{N}$》，と置く。これより

$$\sum_{P\equiv H \pmod{N}} \mathbf{e}\left[-\frac{1}{2}\frac{1}{N^2}\operatorname{tr}(PQ{}^tPZ^{-1})\right]\rho(PQ{}^tL)v$$

$$=\frac{\{(-i)^n \det Z\}^{\frac{m}{2}}}{|\det Q|^{\frac{n}{2}}}\cdot\rho(-NE_n)^{-1}\cdot\sum_{H_i}\sum_{P\equiv H_i \pmod{N}} \mathbf{e}\left[\frac{1}{2}\frac{1}{N^2}\operatorname{tr}(PQ{}^tPZ)+\frac{1}{N^2}\operatorname{tr}(PQ{}^tH)\right]\times$$

$$\times\rho(PQ{}^tL)v$$

$$=\frac{\{(-i)^n \det Z\}^{\frac{m}{2}}}{|\det Q|^{\frac{n}{2}}}\cdot\rho(-NE_n)^{-1}\sum_{H_i}\mathbf{e}\left[\frac{1}{N^2}\operatorname{tr}(H_iQ{}^tH)\right]\cdot\sum_{P\equiv H_i \pmod{N}} \mathbf{e}\left[\frac{1}{2N^2}\operatorname{tr}(PQ{}^tPZ)\right]\times$$

$$\times\rho(P\cdot Q\cdot{}^tL)v$$

$\rho(-NE_n)^{-1}$ は scalar である。定理２の後半を証明するために Igusa [2] にある次の補題を用いる。

補題 11．$Sp(n,\mathbb{Z})$ は $\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}A & 0\\ C & D\end{pmatrix}$ なる形の元で生成される。

よってあとは $\sigma=\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & D\end{pmatrix}$ i.e. $C\equiv 0$ のときを考えればよい。

$Z^{\#}=(AZ+B)D^{-1}=AZ{}^tA+B{}^tA$。$A\in GL_n(\mathbb{Z})$, $B{}^tA$ は対称行列である。

これより

$$\sum_{P\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})} \mathbf{e}\left[\frac{1}{2}\operatorname{tr}\{(P+M)Q{}^t(P+M)Z^{\#}\}\right]=\sum_{P\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})} \mathbf{e}\left[\frac{1}{2}\operatorname{tr}\{(P+{}^tAM)Q{}^t(P+{}^tAM)Z\}\right]$$

$+\frac{1}{2}tr\{(P+{}^tAM)Q{}^t(P+{}^tAM)A^{-1}B\}]$

§4の方法を適用して

$$\sum_{\substack{P\equiv H(\mathrm{mod}.N)\\ HQ\equiv 0(\mathrm{mod}.N)}} e[\tfrac{1}{2}tr(PQ{}^tPZ^{\#})]\rho(PQ{}^tL)$$

$$= e[\tfrac{1}{2N^2}tr(HQ{}^tHB{}^tA)]\cdot\rho({}^tA^{-1})\cdot\sum_{P\equiv{}^tAH(\mathrm{mod}.N)} e[\tfrac{1}{2}tr(PQ{}^tPZ)]\times$$

$$\times\rho(PQ{}^tL)$$

が導かれる。これで定理2の後半も証明された。

§8. $\mu(\sigma)^2=1$ の証明.

$\sigma=\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in Sp(n,\mathbb{Z})$ $C\equiv 0$ (mod. N) とする。$\det C\neq 0$ のとき Krazer[ ]などの方法で $\mu(\sigma)$ は Gauss の和として表わされる。$\mu(\sigma)$ は二次形式 Q のみに依り ρ, L, には依らないから $\mu(\sigma)$を決定するためには, ρ が trivial 表現のときに制限してもよい。

$Z\in\mathfrak{S}_n$, $Z^{\#}=\sigma(Z)=(AZ+B)(CZ+D)^{-1}$ とする。$Q^*=N\cdot Q^{-1}$とする。ただし N は Q の level。Q^*も偶で整数行列である。μ の二次形式への dependency をはっきり表示するために $\mu=\mu_Q$と書く。μ_Q と μ_{Q^*}との関係をまず調べる。定義より

$$\vartheta(Z^{\#};Q)=\mu_Q(\sigma)^{-1}\det(CZ+D)^{\frac{m}{2}}\vartheta(Z;Q)\quad\cdots\cdots\cdots\ (\mathrm{T})$$

ここで $\vartheta(Z;Q)=\sum_{P\in M_{n\times m}} e[\frac{1}{2}tr(PQ{}^tPZ)]$ であった。

さて二次形式のテータの変換公式

$$\sum_{P\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})} e[\tfrac{1}{2}tr(PQ{}^tPZ)]=(\det Q)^{-\frac{n}{2}}\det(-iZ)^{-\frac{m}{2}}\sum_{P\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})} e[\tfrac{1}{2}tr\{PQ{}^tP(-Z^{-1})\}]$$

より $\vartheta(Z;Q) = |\det Q|^{-\frac{n}{2}} \det(-iZ)^{-\frac{m}{2}} \vartheta(-(NZ)^{-1}, Q^*)$

同様に $\vartheta(Z^\#;Q) = |\det Q|^{-\frac{n}{2}} \det(-iZ^\#)^{-\frac{m}{2}} \vartheta(-(NZ^\#)^{-1}; Q^*)$

この二式を上の式(T)に代入して

$$\vartheta(-(NZ^\#)^{-1};Q^*) = \mu_Q(\sigma)\det(CZ+D)^{\frac{m}{2}}\det(-iZ)^{-\frac{m}{2}}\det(-iZ^\#)^{\frac{m}{2}}\times$$

$$\times\vartheta(-(NZ)^{-1};Q^*)$$

$$= \mu_Q(\sigma)\cancel{\times}\det((CZ+D)Z^{-1}Z^\#)^{\frac{m}{2}}\vartheta(-(NZ)^{-1};Q^*)$$

$$= \mu_Q(\sigma)\det(A+BZ^{-1})^{\frac{m}{2}}\vartheta(-(NZ)^{-1};Q^*)$$

ここで $-(NZ)^{-1}=Z_1$, $-(NZ^\#)^{-1}=Z_1^\#$ とおいて、上式を書きなおす。

$$\vartheta(Z_1^\#;Q^*) = \mu_Q(\sigma)\{\det((-NB)Z_1+A)\}^{\frac{m}{2}}\vartheta(Z_1;Q^*)$$

$$Z_1^\# = -(NZ^\#)^{-1} = \cdots = (DZ_1 - N^{-1}C)(-NB\cdot Z_1 + A)^{-1}$$

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} D, & -\frac{1}{N}C \\ -NB, & A \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N) \text{ とおくと、}$$

補題12. 上式より $\mu_Q(\sigma) = \mu_{Q^*}(\sigma^*)$

補題13. $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$ i.e. $C=0$ のとき、$\mu_Q(\sigma) = \det(D)^{\frac{m}{2}} = \pm 1$.

(証明) $Z^\# = (AZ+B)^tA$. 直接に計算して容易にわかる。

補題14. $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ $\det C \neq 0$ とせよ。このとき

$$\mu_Q(\sigma) = (\det Q)^{\frac{m}{2}} \cdot |\det C|^{-\frac{m}{2}} \cdot \sum_{R(\mathrm{mod.}\,{}^tC,\,Q^{-1})} e[-\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\{RQ{}^tR(C^{-1}D)\}]$$

ただしここで R は integral $n\times m$ matrix. $R \equiv R'(\mathrm{mod.}\,{}^tC, Q^{-1})$ とは ${}^tC^{-1}(R-R')Q$ が integral matrix のときをいうことにする。Σ は $(\mathrm{mod.}\,{}^tC, Q^{-1})$ での代表系を動く。

補題 14 と補題 12 より $\det B \neq 0$ のとき、

$$\mu_Q(\sigma) = \mu_{Q^*}(\sigma^*) = (\det Q^*)^{\frac{m}{2}} |\det(-NB)|^{-\frac{m}{2}} \sum_{R (\mathrm{mod}\ -N{}^tB,\ Q^{*-1})} \mathbf{e}[-\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\{RQ^{*}\,{}^tR(-NB)^{-1}A\}]$$

Siegel [2] の Gauss の和の相互律より

$$\text{右辺} = |\det A|^{-\frac{m}{2}} \sum_{R (\mathrm{mod}\ {}^tA,\ E_m)} \mathbf{e}[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\{RQ\,{}^tR(A^{-1}B)\}]$$

結局 $\det B \neq 0$ のとき、

$$\mu(\sigma) = |\det A|^{-\frac{m}{2}} \sum_{R (\mathrm{mod}\ {}^tA,\ E_m)} \mathbf{e}[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\{RQ\,{}^tR(A^{-1}B)\}]$$

よって $\mu(\sigma)$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ に 1 の $\det A$ 乗根をつけ加えた円分体に含まれる。

$$\Phi(B, A) = \sum_{R (\mathrm{mod}\ {}^tA,\ E_m)} \mathbf{e}[\tfrac{1}{2}\mathrm{tr}\{RQ\,{}^tR(A^{-1}B)\}] \quad \text{と置く。}$$

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix}$ $\quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$ と置く。

$$\tilde{\sigma} = \sigma_2\sigma\sigma_1 = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ 0 & C_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 0 & D_1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A_2AA_1 + B_2CA_1, & A_2AB_1 + B_2(B_1 + A_2BD_1 + B_2DD_1 \\ D_2CA_1, & D_2CB_1 + D_2DD_1 \end{pmatrix}$$

$$\mu(\tilde{\sigma}) = \mu(\sigma_2\sigma\sigma_1) = \mu(\sigma_2)\mu(\sigma)\mu(\sigma_1) = (\det A_2)^{\frac{m}{2}}(\det A_1)^{\frac{m}{2}}\mu(\sigma)$$

$$\begin{cases} \tilde{A} = (A_2A + B_2C)A \\ \tilde{B} = A_2BD + B_2DD_1 + A_2AB_1 + B_2CB_1 \end{cases}$$

$\therefore \quad \Phi(\tilde{B}, \tilde{A}) = \text{有理数} \times \Phi(B, A)$

左辺は $\mathbb{Q}$ に 1 の $\det\tilde{A} = \det A_1 \det A_2 \cdot \det(A + A_2^{-1}B_2C)$ 乗根を付け加えた体に、右辺は $\underbrace{\ }_{\mathbb{Q}\text{に1の}}$ $\det A$ 乗根をつけ加えた体に含まれる。

$\Phi(B,A)$が有理数であることを示す。

そうでないとすれば上の等式よりある素数 p があって A_1, A_2, B_2 を動かしても $\det\widetilde{A} \equiv 0 \pmod{p}$ が成立しなければならない。(さもないと $\Phi(\widetilde{B},\widetilde{A}) =$ 有理数 $\times\, \Phi(B,A)$ の両辺は有理数体に属する。). 特に $\det A \equiv 0 \pmod{p}$。A の mod p での階数を $r < n$ とする。A_1, A_2 を適当にとれば

$$A_2 A A_1 \equiv \left(\begin{array}{c|c} A_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \pmod{p} \quad \left(\!\!\left(\begin{array}{l} \det A_r \not\equiv 0 \pmod{p} \\ A_r \text{ は } r\times r \text{ 行列} \end{array}\right)\!\!\right)$$

と A_2, A_1 を選ぶことができる。A_2AA_1 を新しく A と書く。

$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(n,\mathbb{Z})$ より $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ は coprime pair である。pair ということより ${}^tCA = {}^tAC$, 特に ${}^tCA \equiv {}^tAC \pmod{p}$。

$$C \equiv \left(\begin{array}{c|c} C_1 & C_2 \\ \hline C_3 & C_4 \end{array}\right) \pmod{p} \quad C_1,\ r\times r \text{ 行列}\ \ C_2\ r\times(n-r),\ C_3\ (n-r)\times r,\ C_4\ (n-r)\times(n-r) \text{ 行列とする.}$$

${}^tCA \equiv {}^tAC \pmod{p}$ より $C_2 \equiv 0 \pmod{p}$。$\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ は coprimeより $\begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$ は mod p で rank n である。よって $\det A_r \cdot \det C_4 \not\equiv 0 \pmod{p}$

いま $\begin{pmatrix} E_n & S \\ 0 & E_n \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ で $S \equiv \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & E_{n-r} \end{array}\right) \pmod{p}$ なるものを一つ取ってくる。$\sigma_2 = \begin{pmatrix} E_n & S \\ 0 & E_n \end{pmatrix}$ $\sigma_1 = E_{2n}$ とすると $\widetilde{A} = A + SC$。

$$\det\widetilde{A} \equiv \det(A+SC) \equiv \det A_r \cdot \det C_4 \not\equiv 0 \pmod{p}$$

よって背理法によって証明は完結した。

$\Phi(B,A)$ は有理数, よって $\mu(\sigma)$ も有理数, しかも $\mu(\sigma)$ は絶対値 1 である。よって $\mu(\sigma) = \pm 1$。$\Gamma_0(N)$ は $\det B \neq 0$ なる元で生成されるから一般の σ に対しても $\mu(\sigma) = \pm 1$。

§9 $\mu(\sigma)$ の決定.

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} A_2 & 0 \\ 0 & {}^tA_2^{-1} \end{pmatrix} \sigma \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & {}^tA_1^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}$$ とする.

$$\tilde{A} = A_2 A A_1 \qquad \tilde{B} = A_2 B\, {}^tA_1^{-1}, \quad \det\tilde{A} = \pm\det A,\ \det\tilde{B} = \pm\det B.$$

$$\mu(\tilde{\sigma}) = (\det A_1 \cdot \det A_2)^{\frac{m}{2}}\,\mu(\sigma)$$

単因子論を用いて

$$\tilde{A} = A_2 A A_1 = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & d_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix} \qquad (d_i > 0)$$

としてよい。さらに $\det A$ と $\det B$ が互いに素と仮定する。

これより Gauss の和を計算して $\mu(\sigma)$ を平方剰余の記号で与えることができる。結果は $\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ とするとき, $\det A > 0$ のとき, $\mu(\sigma) = \left(\dfrac{(-1)^{\frac{m}{2}}\det Q}{\det A}\right)$ (($\left(\ \right)$ は平方剰余記号)), $\det A < 0$ のときは, $\mu(\sigma) = (-1)^{\frac{m}{2}}\left(\dfrac{(-1)^{\frac{m}{2}}\det Q}{-\det A}\right)$ である。

$\mu_H(\sigma)$ も同様にして $=1$ であることがわかる。詳しい証明は省略。

§10. 一般化。

上述の方法は Hermitian modular の場合や, その他の場合にも同様な形で適用できる。

文献

Hecke [1] Analytische Arithmetik der Positiven Quadratischen Formen (全集の後から二番目の論文)

Schoeneberg [1] Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen Math Ann. 116 (1939)

Igusa [1] Theta functions (Springer Verlag (1972))

[2] On the graded ring of theta-constants I, II (Amer J of Math 86 (1964), 88 (1966))

Krazer [1] Lehrbuch der Thetafunktionen

Siegel [1] Moduln Abelscher Funktionen (全集,第三巻 p373–)

[2] Über das quadratische Reziprozitätsgesetz in ···· (全集第三巻 p337)

Maaß [1] Zur Theorie der harmonischen Formen; Math Annalen Bd 137 (1959)