

$SL(n; \mathbb{C})$ の Eisenstein 級数と概均値バクトル空間

東大 理院 佐藤文宏

Eisenstein 級数の函数等式について、Langlands の展開した理論が存在している。いま、その函数等式を数論的な方法で得ることを考えてみよう。 $SL(2; \mathbb{R})$, $SL(2; \mathbb{C})$ などについては、よく知られている。rank の高い群については、 $SL(n; \mathbb{R})$ に関して、Serberg の仕事を受けて Maass, A. Terras [6] [10] [11] の研究がなされている。ここでは、Maass の方法を概均値バクトル空間の立場から見直して、ある種の多変数 Dirichlet 級数の函数等式と解析接続を証明する。
(p24. 定理) その最も標準的な場合として、 $SL(n; \mathbb{C})$ の不連続群 $SL(n; \mathcal{O}_K)$ (\mathcal{O}_K は類数 1 の虚二次体の整数環) に関する Eisenstein 級数の函数等式が得られる。

概均値バクトル空間の Zeta 函数の理論は、既約な相対不変式が唯一つに限られる (勿論、定数倍を無視し) 場合を除いて、一般的に議論は存在していない。ここで扱う多変数の Dirichlet 級数は、複

数の既約な相対不変式をもつ空間の Zeta 函数の一例となっている。

§ 1. 概均管ベクトル空間 $(G_{\mathbb{P}}, V)$ の定義

m, n ($1 \leq m < n$) を自然数。 $M(n, \mathbb{C}) \ni A$ に対し、 $|A| = \det A$
 $\|A\| = |\det A|$ 。 $M(n, \mathbb{C}) \ni A, M(n, \mu; \mathbb{C}) \ni B$ に対し、 $A[B] = {}^t \bar{B} A B$ 。

ν 個の自然数の組 $P = (p_1, \dots, p_\nu)$ は、 $p_1 + \dots + p_\nu = m$ のとき、
 $(\text{rank } \nu)$ m の分割という。 \mathfrak{S}_ν を ν 次対称群として、 \mathfrak{S}_ν の P の
 の作用を

$${}^\sigma P = (P_{\sigma(1)}, \dots, P_{\sigma(\nu)}) \quad (\sigma = (1, 2, \dots, \nu) \in \mathfrak{S}_\nu)$$

で定める。

$$k_P^{(i)} = p_1 + \dots + p_i, \quad k_P^{*(i)} = p_{\nu-i+1} + \dots + p_\nu \quad (i=1, \dots, \nu)$$

$$E_P^{(i)} = \begin{pmatrix} E_{k_P^{(i)}} & \\ & O_{(k_P^{(i)}, m-k_P^{(i)})} \end{pmatrix}, \quad E_P^{*(i)} = \begin{pmatrix} O_{(k_P^{*(i)}, m-k_P^{*(i)})} & \\ & E_{k_P^{*(i)}} \end{pmatrix}$$

とおく。ただし、 E_ν を ν 次単位行列、 $O^{(\nu, \mu)}$ を ν 行 μ 列の零行列
 を表わした。

$GL(m; \mathbb{C})$ の parabolic 部分群 B_P を次のようにとる。

$$B_P = \left\{ \begin{pmatrix} b_{11} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & b_{\nu\nu} \end{pmatrix} \in GL(m; \mathbb{C}) \mid \begin{array}{l} b_{ij} \in M(p_i, p_j; \mathbb{C}) \\ b_{ij} = 0 \quad (i < j) \end{array} \right\}$$

H を n 次 正定値 Hermite 行列、 $U(H)$ を H の unitary 群、すなわち、

$$U(H) = \{ g \in GL(m; \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{g} H g = H \}$$

$\tilde{U}(H) = \{ (g, h) \in GL(m; \mathbb{C}) \times GL(m; \mathbb{C}) \mid {}^t h H g = H \}$ とおくと, $\tilde{U}(H) \cong GL(m; \mathbb{C})$ である.

$$U(H) \ni g \longmapsto (g, \bar{g}) \in \tilde{U}(H)$$

よって, $U(H)$ は $\tilde{U}(H)$ の \mathbb{R} -有理点のなす Lie 群とみなせる.

さて, 我々の扱う概均質ベクトル空間は, 次の空間である.

$$G_{\mathbb{P}} = \tilde{U}(H) \times B_{\mathbb{P}} \times B_{\mathbb{P}}, \quad V = M(n, m; \mathbb{C}) \times M(n, m; \mathbb{C})$$

$G_{\mathbb{P}}$ の V 上の表現 ρ を

$$\rho(a_1, a_2, b_1, b_2)(x_1, x_2) = (a_1 x_1 {}^t b_1, a_2 x_2 {}^t b_2)$$

$$(a_1, a_2) \in \tilde{U}(H), \quad b_1, b_2 \in B_{\mathbb{P}}, \quad x_1, x_2 \in M(n, m; \mathbb{C})$$

で定義すれば, $(G_{\mathbb{P}}, \rho, V)$ は, 正則概均質ベクトル空間となっている.

$i = 1, \dots, \nu$ に対して,

$$P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x_1, x_2) = |{}^t x_2 H x_1 [E_{\mathbb{P}}^{(i)}]| \quad (x_1, x_2) \in V$$

$$\chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(g) = |b_1 [E_{\mathbb{P}}^{(i)}]| \cdot |b_2 [E_{\mathbb{P}}^{(i)}]| \quad g = (a_1, a_2, b_1, b_2) \in G_{\mathbb{P}}$$

とおけば,

$$P_{\mathbb{P}}^{(i)}(\rho(g)(x_1, x_2)) = \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(g) P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x_1, x_2)$$

が成立する. すなわち, $P_{\mathbb{P}}^{(i)}$ は, 指標 $\chi_{\mathbb{P}}^{(i)}$ に対応する相対不変式であり, さらに, 任意の相対不変式は, $P_{\mathbb{P}}^{(1)}, \dots, P_{\mathbb{P}}^{(\nu)}$ の積として表わされる.

特異点集合は,

$$S_P = \bigcup_{i=1}^k S_P^{(i)}, \quad S_P^{(i)} = \{(x_1, x_2) \in V \mid P_P^{(i)}(x_1, x_2) = 0\}$$

で与えられる。言い換えると、 $V - S_P$ は G_P の単一の軌道である。

V 上に内積

$$\langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = \frac{1}{2} \text{tr} ({}^t x_1 y_2 + {}^t x_2 y_1)$$

を考え、この内積で、 V と双対空間 V^* とを同一視する。このとき反傾表現 ρ^* は、

$$\rho^*(h_1, h_2, b_1, b_2)(y_1, y_2) = ({}^t h_2^{-1} y_1 b_2^{-1}, {}^t h_1^{-1} y_2 b_1^{-1})$$

$$(h_1, h_2) \in \tilde{O}(H), \quad b_1, b_2 \in B_P, \quad y_1, y_2 \in M(n, m; \mathbb{C})$$

となる。すなわち、

$$\langle \rho(g)(x_1, x_2), \rho^*(g)(y_1, y_2) \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle$$

$$g \in G_P, \quad (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$$

を満足する。 (G_P, ρ^*, V) も正則擬内積ベクトル空間であり、 $i = 1, \dots, k$ に対し、

$$Q_P^{(i)}(y_1, y_2) = |{}^t y_2 H^{-1} y_1 [E_P^{*(i)}]| \quad (y_1, y_2) \in V$$

$$\chi_P^{*(i)}(g) = |b_1 [E_P^{*(i)}]|^{-1} |b_2 [E_P^{*(i)}]|^{-1} \quad g = (h_1, h_2, b_1, b_2) \in G_P$$

とおけば、

$$Q_P^{(i)}(\rho^*(g)(y_1, y_2)) = \chi_P^{*(i)}(g) Q_P^{(i)}(y_1, y_2)$$

が成立ち、任意の相対不変式は、 $Q_P^{(1)}, \dots, Q_P^{(k)}$ の積として表わされる。

$$S_P^* = \bigcup_{i=1}^k S_P^{*(i)}, \quad S_P^{*(i)} = \{(y_1, y_2) \in V \mid Q_P^{(i)}(y_1, y_2) = 0\}$$

が、 (G_P, P^*, V) の特異点集合である。

相対不変式に対応する指標の向には、

$$\chi_P^{(i)} \cdot (\chi_P^{*(k-i)})^{-1} = \chi_P^{(k)} = (\chi_P^{*(k)})^{-1} \quad (i=1, \dots, k-1)$$

の関係がある。

G_P, V の real structure を、

$$(G_P)_R = U(H) \times B_P \ni (a, b) \longmapsto (a, \bar{a}, b, \bar{b}) \in G_P$$

$$V_R = M(n, m; \mathbb{C}) \ni x \longmapsto (x, \bar{x}) \in V$$

で定める。このとき、 $(G_P, P, V), (G_P, P^*, V)$ は、 \mathbb{R} 上定義された概均質ベクトル空間と考えられる。表現、相対不変式、指標の \mathbb{R} -有理点の空間への制限も同じ記号で表わすことにする。すなわち、

$$\varphi(a, b)x = a \cdot x \cdot {}^t b, \quad \varphi^*(a, b)y = {}^t \bar{a}^{-1} y \bar{b}^{-1}$$

$$P_P^{(i)}(x) = H[x \cdot E_P^{(i)}], \quad Q_P^{(i)}(y) = H^{-1}[y \cdot E_P^{*(i)}]$$

$$\chi_P^{(i)}(a, b) = \|b[E_P^{(i)}]\|^2, \quad \chi_P^{*(i)}(a, b) = \|b[E_P^{*(i)}]\|^{-2}$$

$$(x, y \in M(n, m; \mathbb{C}), (a, b) \in U(H) \times B_P)$$

又、内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ の V_R への制限は、

$$\langle x, y \rangle = \langle (x, \bar{x}), (y, \bar{y}) \rangle = \operatorname{Re} \operatorname{Tr}({}^t x \cdot \bar{y})$$

$$(x, y \in M(n, m; \mathbb{C}))$$

であり、これにて、 V_R と V_R^* とが同一視できる。特異点集合について

とは、

$$\begin{aligned} (S'_P)_{\mathbb{R}} &= (S'_P^*)_{\mathbb{R}} = (S'_P^{(k)})_{\mathbb{R}} = (S'_P^{*(k)})_{\mathbb{R}} \\ &= \{ X \in M(m, m; \mathbb{C}) = V_{\mathbb{R}} \mid \text{rank } X \leq m \} \end{aligned}$$

となる。これは、 \mathbb{P} に依存しないので、単に S と書こう。

以下では、 \mathbb{R} -有理点の空間のみを考えるから、 $(\)_{\mathbb{R}}$ を省略する。

§2. ここでは、後に必要となる幾つかの積分計算について述べる。

$$H^{\circ} = \{ W \in M(m; \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{W} = W > 0 \}.$$

$\pi: V-S \rightarrow H^{\circ}$ (resp. $\pi^*: V-S \rightarrow H^{\circ}$) を $\pi(X) = H[X]$ (resp. $\pi^*(X) = H^{-1}[X]$) と定義する。

$$H^{\circ} \ni W = (w_{ij}) \text{ に対し, } dW = \prod_{i=1}^m dw_{ii} \prod_{i>j} d\text{Re} w_{ij} \cdot d\text{Im} w_{ij}.$$

$$H^{\circ} \ni w_0 \text{ を定めるとき, } dX = \theta_{w_0} \wedge \pi^{-1}(dW) \text{ (resp.}$$

$$dX = \theta_{w_0}^* \wedge \pi^{*-1}(dW)) \text{ となる form } \theta_{w_0} \text{ (resp. } \theta_{w_0}^*) \text{ が,}$$

$\pi^{-1}(w_0)$ (resp. $\pi^{*-1}(w_0)$) 上に unique に定まる。 θ_{w_0} (resp. $\theta_{w_0}^*$)

で定まる $\pi^{-1}(w_0)$ (resp. $\pi^{*-1}(w_0)$) 上の measure を、 $|\theta_{w_0}|$

(resp. $|\theta_{w_0}^*|$) と記す。

$$\text{補題 1. (i) } \int_{\pi^{-1}(w_0)} |\theta_{w_0}| = |H|^{-m} |w_0|^{n-m} \frac{\pi^{\frac{m(2n-m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)}$$

$$(ii) \int_{\pi^{*-1}(w_0)} |\theta_{w_0}^*| = |H|^m |w_0|^{n-m} \frac{\pi^{\frac{m(2n-m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)}$$

この積分計算はよく知られている。例えば、Siegel [9] で、対称行列について行っている計算法を応用する。詳細は略す。

$b \in B_P$ を

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{p_1} & 0 \\ b_{2j} & E_{p_x} \end{pmatrix} \quad b_i = b_{ij} \in GL(p_i; \mathbb{C}), \quad b_{2j} \in M(p_i, p_j; \mathbb{C})$$

と分解する。 $b_{2j} (i \geq j)$ を $b_{2j} = (b^{(k_{2j}, l_{2j})})$ と成分表示して、

$$db = \prod_{i=1}^x \|b_i\|^{-2m+4k_P^{(i-1)}} \prod_{i \geq j} db_{2j}$$

$$db_{2j} = \prod_{\substack{1 \leq k_{2j} \leq p_i \\ 1 \leq l_{2j} \leq p_j}} d\operatorname{Re} b^{(k_{2j}, l_{2j})} d\operatorname{Im} b^{(k_{2j}, l_{2j})}$$

$$k_P^{(0)} = 0$$

とすると、 db は B_P の right invariant measure を与える。

$W_0 \in \mathcal{H}^0$ に対し、

$$(B_P)_{W_0} = \{ b \in B_P \mid \bar{b} W_0 {}^t b = W_0 \}$$

$$(B_P)_{W_0}^* = \{ b \in B_P \mid {}^t b W_0 \bar{b} = W_0 \}$$

と置く。 $(B_P)_{W_0}$ (resp. $(B_P)_{W_0}^*$) は、 $(B_P)_{E_m}$ (resp. $(B_P)_{E_m}^*$) と

同型である。簡単な計算で、

$$(B_P)_{E_m} = (B_P)_{E_m}^* = \left\{ \begin{pmatrix} A_1^{(p_1)} & 0 \\ 0 & A_x^{(p_x)} \end{pmatrix} \mid A_i \in U(E_{p_i}) \right\} \\ \cong U(E_{p_1}) \times \cdots \times U(E_{p_x})$$

B_P を \mathcal{H}^0 に、 $W \mapsto \bar{b} W {}^t b$ (resp. $W \mapsto {}^t b^{-1} W \bar{b}^{-1}$) と作用させた

る。 \mathcal{H}^0 上の B_P -相対不変測度を

$$d\tilde{W} = \prod_{i=1}^{x-1} |W[E_P^{(i)}]|^{-p_i - p_{i+1}} \cdot |W|^{-p_x} dW$$

$$(\text{resp. } \widetilde{dW}^* = \prod_{i=1}^{k-1} |W[E_P^{*(i)}]|^{-p_{x-i} - p_{x-i+1}} \cdot |W|^{-l_1} dW)$$

と定める。このとき, compact群 $(B_P)_{W_0}$ (resp. $(B_P)_{W_0}^*$) の Haar measure $d\nu_{W_0}$ (resp. $d\nu_{W_0}^*$) を

$$db = \widetilde{dW} \cdot d\nu_{W_0} \quad (\text{resp. } db = \widetilde{dW}^* \cdot d\nu_{W_0}^*)$$

と満足するように正規化できる。

補題 2.
$$\int_{(B_P)_{W_0}} d\nu_{W_0} = \int_{(B_P)_{W_0}^*} d\nu_{W_0}^* = \frac{\pi^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k p_i^2 + \frac{m}{2}}}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)} \quad (W_0 \in \mathcal{H}^0)$$

(\cdot) 積分値が W_0 のとり方によらないことは, $db, \widetilde{dW}, \widetilde{dW}^*$ の B_P -相対不変性からの結論である。よって, $W_0 = E_m$ としてよい。

$\pi_i : M(p_i; \mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{H}_0^{(p_i)} = \{W \in M(p_i; \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{W} = W > 0\}$ を, $\pi_i(x) = \bar{x}^t x$ で定義し, $dx = \theta_i \wedge \pi_i^{-1}(dW)$ ($x \in M(p_i; \mathbb{C}), W \in \mathcal{H}_0^{(p_i)}$) なる form θ_i によって $U(E_{p_i})$ 上の measure $|\theta_i|$ を定める。

$(B_P)_{E_m} = (B_P)_{E_m}^* = U(E_{p_1}) \times \cdots \times U(E_{p_k})$ で, 実は,

$$d\nu_{E_m} = d\nu_{E_m}^* = |\theta_1| \cdots |\theta_k|$$

である。従って, 補題 1 によって求める積分値を得る。 //

$V-S$ 上の G_P -相対不変測度, $\omega_P(x), \omega_P^*(x)$ を,

$$\omega_P(x) = \prod_{i=1}^k P_P^{(i)}(x)^{-p_i - p_{i+1}} dx \quad (p_{k+1} = n - m)$$

$$\omega_P^*(x) = \prod_{i=1}^k Q_P^{(i)}(x)^{-p_{x-i} - p_{x-i+1}} dx \quad (p_0 = n - m)$$

$$X = (x_{ij}) \in M(n, m; \mathbb{C}), \quad dx = \prod_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}} d\text{Re} x_{ij} d\text{Im} x_{ij}$$

とする。

補題3

$$(i) \int_{V-S} \frac{\prod_{i=1}^k P_P^{(i)}(x) S_i}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)} e^{-\pi \operatorname{tr} H[x]} \omega_P(x) \\ = \frac{\pi^{-\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^k k_P^{(i)} S_i + m n}{|H|^m \prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)} \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} \Gamma(S_i + \dots + S_k - k_P^{*(k-i)} - j)$$

$$(ii) \int_{V-S} \frac{\prod_{i=1}^k Q_P^{(i)}(x) S_i}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)} e^{-\pi \operatorname{tr} H^{-1}[x]} \omega_P^*(x) \\ = \frac{|H|^m \pi^{-\frac{k}{2}} \prod_{i=1}^k k_P^{*(i)} S_i + m n}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)} \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_{k-i}-1} \Gamma(S_i + \dots + S_k - k_P^{(k-i)} - j)$$

(ii) 全く同様だから(i)のみを示す。

$$\omega(x) = |W|^{m-1} \widetilde{dW} \cdot |\theta_w| \quad \text{補題1に} \rightarrow \tau$$

$$\int_{\mathcal{L}^0} e^{-\pi \operatorname{tr} W} \frac{\prod_{i=1}^k |W[E_P^{(i)}]|^{S_i} \widetilde{dW}}{|H|^m \prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)}$$

$$\mathcal{L}^0 \ni W \in \begin{pmatrix} W^{(m-1)} & 0 \\ 0 & w_m \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E_{m-1} & \mathbb{Q} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \quad (a \in \mathbb{C}^{m-1}, w_m \in \mathbb{R}_+,$$

$W^{(m-1)} = \tau \overline{W^{(m-1)}} > 0$) と分解すると、 $P_k \geq 2$ ならば、

$$\widetilde{dW} = |W^{(m-1)}| \cdot \widetilde{dW}^{(m-1)} \cdot da \cdot w_m^{-P_k} dw_m$$

ここで、 $\widetilde{dW}^{(m-1)}$ は、 $m-1$ の分割 $(P_1, \dots, P_{k-1}, P_k-1)$ に従って、

\widetilde{dW} と同様に構成する。又、 $\mathbb{Q} = {}^t(a_1, \dots, a_{m-1})$ に従って、 da

$$= \prod_{i=1}^{m-1} d\operatorname{Re} a_i d\operatorname{Im} a_i \text{ と } \mathcal{L}^k$$

$$\therefore \int_{\mathcal{L}^0} e^{-\pi \operatorname{tr} W} \frac{\prod_{i=1}^k |W[E_P^{(i)}]|^{S_i} \widetilde{dW}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{H_0^{(m-1)}} e^{-\pi t w^{(m-1)}} \frac{t^m}{\prod_{i=1}^m |w^{(m-1)} [E_{P'}^{(i)}]|^{S_i}} \widetilde{dw}^{(m-1)} \\
&\quad \times \int_{\mathbb{C}^{m-1}} e^{-\pi t w^{(m-1)}} [a] \cdot |w^{(m-1)}| da \cdot \int_0^{\infty} w_m^{S_x - P_x} e^{-\pi w_m} dw_m \\
&= \pi^{-(S_x + P_x + 1)} \Gamma(S_x - P_x + 1) \int_{H_0^{(m-1)}} e^{-\pi t w^{(m-1)}} \frac{t^x}{\prod_{i=1}^x |w^{(m-1)} [E_{P'}^{(i)}]|^{S_i}} \widetilde{dw}^{(m-1)}
\end{aligned}$$

ただし、 $P' = (P_1, \dots, P_{x-1}, P_x - 1)$ 。

$P_x = 1$ の場合には、同様の考察で、 $P' = (P_1, \dots, P_{x-1})$ に對し、

$$\begin{aligned}
&\int_{H_0^0} e^{-\pi t w} \frac{t^x}{\prod_{i=1}^x |w [E_{P'}^{(i)}]|^{S_i}} \widetilde{dw} \\
&= \pi^{-S_x} \Gamma(S_x) \int_{H_0^{(m-1)}} e^{-\pi t w^{(m-1)}} \frac{t^{x-2}}{\prod_{i=1}^{x-2} |w^{(m-1)} [E_{P'}^{(i)}]|^{S_i}} \cdot |w^{(m-1)}|^{S_{x+1} + S_x - 1} \widetilde{dw}^{(m-1)}
\end{aligned}$$

この2つの漸化式によって、帰納的に(1)が得られる。 //

§3. 相対不変式の複素中の満足する函数等式

この節では、 $\prod_{i=1}^k P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{S_i}$, $\prod_{i=1}^k Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{S_i}$ ($(S_1, \dots, S_k) \in \mathbb{C}^k$) が、2つの Type の函数等式を持つことを示す。第一の Type は、Fourier 変換に基づくものであり、第二の Type は、本質的には、 $SL(m; \mathbb{C})$ の帯球函数の函数等式である。

$\mathcal{S}(V)$ を V 上の急減少函数の空間とする。 $S = (S_1, \dots, S_k) \in \mathbb{C}^k$,

$f \in \mathcal{S}(V)$ に対して、

$$\Phi_{\mathbb{P}}(S, f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^k P_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{S_i} f(x) \omega_{\mathbb{P}}(x)$$

$$\Phi_{\mathbb{P}}^*(S, f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^k Q_{\mathbb{P}}^{(i)}(x)^{S_i} f(x) \omega_{\mathbb{P}}^*(x)$$

と定義すれば、 $\Phi_{\mathbb{P}}(S, f)$ (resp. $\Phi_{\mathbb{P}}^*(S, f)$) は、 $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$

(resp. $\operatorname{Re}(S_i) > p_{r-i} + p_{r-i+1}$) ($i=1, \dots, k$) で絶対収束し、さらに、

\mathbb{C}^k 全体に有理型函数として解析接続される (cf. [1]).

$f \in \mathcal{S}(V)$ の Fourier 変換を、

$$\hat{f}(x) = \int_V f(y) e^{2\pi\sqrt{-1}\langle x, y \rangle} dy$$

で定義する。

命題 1. 次の函数等式が成立つ。

$$\Phi_{\mathbb{P}}(S, \hat{f}) = |H|^{-m} \pi^{-2 \sum_{i=1}^k k_{\mathbb{P}}^{(i)} S_i + m(m-1)}$$

$$\times \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} \sin \pi(S_i + \dots + S_k - m k_{\mathbb{P}}^{(i)} - j) T(S_i + \dots + S_k - m + k_{\mathbb{P}}^{(i)} - j) T(S_i + \dots + S_k - k_{\mathbb{P}}^* - j)$$

$$\times \Phi_{\mathbb{P}}^*(S_{k-1}, \dots, S_1, m - S_1, \dots, S_k; f)$$

この Type の函数等式は、[4]、[7] で論じられている。空間 (G_p, V) は、そこで仮定を満足しないが、[7] の才 2 章の議論を修正して、 $\mathbb{F}_p(S; \hat{f}) = C(S) \mathbb{F}_p^*(S_{k-1}, \dots, S_1, n-S_1, \dots, S_k; f)$ なる $C(S)$ の存在を示せる。([7] p158, 例 9 は図像が深い)。 $C(S)$ の具体的な決定は、補題 3 の種命を利用すれば、

$$\int_V e^{-\pi i h \pi(x)} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dy = |H|^{-m} e^{-\pi i h \pi(x)}$$

により実行できる。

Micro local calculus の方法によつて、 (G_p, V) を含む一般的空间について、相対不変式の複素中の Fourier 変換を求めることは、室氏によつて研究されている ([5])。

才 2 の Type の函数等式を記述するに、次に変数変換を行了。

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = z_2 - z_1 + \frac{p_1 + p_2}{2} \\ S_2 = z_3 - z_2 + \frac{p_2 + p_3}{2} \\ \dots \\ S_{k-1} = z_k - z_{k-1} + \frac{p_{k-1} + p_k}{2} \\ S_k = -z_k + \frac{p_k + n - m}{2} \end{array} \right. & \quad \text{(b)} \quad \left\{ \begin{array}{l} S_1 = z_k - z_{k-1} + \frac{p_{k-1} + p_k}{2} \\ S_2 = z_{k-1} - z_{k-2} + \frac{p_{k-2} + p_{k-1}}{2} \\ \dots \\ S_{k-1} = z_2 - z_1 + \frac{p_1 + p_2}{2} \\ S_k = z_1 + \frac{p_1 + n - m}{2} \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

$\mathbb{F}_p(S; f)$ (resp $\mathbb{F}_p^*(S; f)$) は変数変換 (a) (resp (b)) によつて、 z_1, \dots, z_k の函数とみれば、 $\mathbb{F}_p(z_1, \dots, z_k; f)$ (resp $\mathbb{F}_p^*(z_1, \dots, z_k; f)$) と記すことにする。

命題 2

$\tilde{C}_0^\infty(V-S) = \{f \in C_0^\infty(V-S) \mid \text{supp } f \text{ is compact, } f(x^k) = f(x), \forall x \in V-S, k \in U(\mathbb{Z}_m)\}$
 とおく。 $f \in \tilde{C}_0^\infty(V-S)$ に対し、任意の $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(m)) \in \mathfrak{S}_m$ につい
 て

$$\Phi_P(z_1, \dots, z_m; f) = \Phi_{\sigma P}(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}; f)$$

$$\Phi_P^*(z_1, \dots, z_m; f) = \Phi_{\sigma P}^*(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(m)}; f)$$

が成立つ。

証明のため、次の2つの補題を用意する。

補題 4 (Hardy-Littlewood)

$A = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{pmatrix} \mid a_i \in \mathbb{R}_+, a_1 \cdots a_m = 1 \right\}$, $A \ni a = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{pmatrix}$ に対し、 $e^{p(\log a)}$
 $= \prod_{i=1}^m a_i^{-(m-2i+1)}$ とする。 $N = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \mid n_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$, N 上の measure
 $\int dm = \prod_{i,j} d\text{Re } n_{ij} d\text{Im } n_{ij}$ とする。

$SL(m; \mathbb{C})$ 上の台が compact 連続関数 f について、

$$F_f(a) = e^{p(\log a)} \int_N f(am) dm \quad a \in A$$

とおく。このとき、 f が、任意の $k \in SU(m)$ に対し、

$$f(kgk^{-1}) = f(g) \quad g \in SL(m; \mathbb{C})$$

を満足すれば、

$$F_f(a^\sigma) = F_f(a) \quad \sigma \in \mathfrak{S}_m$$

但し、 $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(m))$ について、

$$a = \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)} & & \\ & \ddots & \\ & & a_{\sigma(m)} \end{pmatrix} = a^\sigma$$

(i) 半単純 Lie 群についての一般的な定理 (例えば [3] Ch. X. Theorem 1.15) を $SL(m; \mathbb{C})$ について書き下すだけである。 //

補題 5. $f \in \tilde{C}_0^\infty(V-S)$. $V-S \ni x_0 \in H[x_0] = E_m$ とする。 dh を $U(H)$ 上の Haar measure とし、 $\int_{U(H)} dh = 1$ と正規化する。

このとき、 $f_t(g) = \int_{U(H)} f(hx_0 {}^t g \cdot t) dh$ ($t \in \mathbb{R}_+$, $g \in SL(m; \mathbb{C})$) と定義すると、 $f_t(g)$ は、 $SL(m; \mathbb{C})$ 上の台が compact な連続関数で、 $f_t(kgk^{-1}) = f_t(g)$ ($k \in SU(m)$, $g \in SL(m; \mathbb{C})$) を満足する。

(i) f_t が連続であることは明らか。 $U(H) \cdot \text{supp} f = C$ とおくと C は $V-S$ の compact set である。

$$\text{supp}(f_t) \subset \{g \in SL(m; \mathbb{C}) \mid x_0 {}^t g \in C\}$$

この右辺は compact. $\therefore \text{supp}(f_t)$ も compact.

$$f_t(kgk^{-1}) = \int_{U(H)} f(hx_0 {}^t k^{-1} {}^t g \cdot t {}^t k) dh.$$

$k \in SU(m)$ より、 $H[x_0 {}^t k^{-1}] = E_m$ である。 $\therefore h_0 x_0 = x_0 {}^t k^{-1}$ とおくと $h_0 \in U(H)$ が存在する。

$$\begin{aligned} \therefore f_t(kgk^{-1}) &= \int_{U(H)} f(h_0 h x_0 {}^t g \cdot t {}^t k) dh \\ &= \int_{U(H)} f(h x_0 {}^t g \cdot t) dh = f_t(g) \end{aligned}$$

命題 2 の証明にかゝる。

$\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \ni t = \begin{pmatrix} t \\ \vdots \\ t \end{pmatrix}$ と同一視する。

$$B^+(m) = \mathbb{R}_+ \times A \cdot N = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ n_{ij} & & 1 \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R}_+, a_i \cdots a_m = 1, a_i \in \mathbb{R}_+, n_{ij} \in \mathbb{C} \right\}$$

積分 $\mathbb{F}_p(z; f)$ は群 $B^+(m)$ 上の積分に書きかえよう。

任意の $h \in U(H)$ に対して、

$$\mathbb{F}_p(s_1, \dots, s_k; f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^k \mathbb{F}_p^{(i)}(x)^{s_i} \cdot f(ax) \omega_p(x).$$

$U(H)$ 上で積分すると、

$$\mathbb{F}_p(s_1, \dots, s_k; f) = \int_{V-S} \prod_{i=1}^k \mathbb{F}_p^{(i)}(x)^{s_i - p_i - p_{i+1}} \int_{U(H)} f(ax) da \, dx.$$

被積分函数は $U(H)$ -不変であるから、

$$\int_{U(H)} f(ax) da = f_1 \circ \pi(x) \quad (x \in V-S)$$

と置くと $f_1 \in C_0^\infty(\mathfrak{h}^0)$ が存在し、補題 1 より、

$$\mathbb{F}_p(s_1, \dots, s_k; f) = |H|^{-m} \cdot \frac{\pi^{\frac{m}{2}(2n-m+1)}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)} \int_{\mathfrak{h}^0} \prod_{i=1}^k |w[\mathbb{F}_p^{(i)}]|^{s_i} f_1(w) \tilde{dw}$$

さて、 $\psi: B^+(m) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{h}^0$ とする homeomorphism $\varepsilon \psi(b) = b^t b$ と

定義する。 $d^*t = \frac{dt}{|t|}$, $da = \prod_{i=1}^{m-1} \frac{da_i}{|a_i|}$ と、 $\{da_i\}$ は \mathbb{R}_+, A 上の

Haar measure とおき、 $\therefore a \varepsilon$ とす。

$$\psi^*(\tilde{dw}) = 2^m \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2(k_p^{*(k-i)} + k_p^{*(k-i+1)})} d^*t da dn.$$

又、

$$\prod_{i=1}^k |w[\mathbb{F}_p^{(i)}]|^{s_i} = t^{-2 \sum_{i=1}^k p_i z_i + m(n+m)} \times \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2z_i + (k_p^{*(k-i)} + k_p^{*(k-i+1)})}$$

$$\begin{aligned} \therefore \Phi_p(z_1, \dots, z_r; f) &= \frac{2^m \pi^{\frac{m}{2}} (2m-m+1)}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)} \cdot |H|^{-m} \int_{\mathbb{R}_+} t^{-2 \sum_{i=1}^r p_i z_i + m(n+m)} dx_t \\ &\int_A \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2z_i - (k_p^{*(i)} + k_p^{*(i+1)})} da \int_N f_1(t a \bar{n}^t m a t) dn. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{よて} \quad & \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2z_i - (k_p^{*(i)} + k_p^{*(i+1)})} \cdot e^{-p(\log a)} \\ &= \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2z_i - (k_p^{*(i)} + k_p^{*(i+1)}) + \{m - 2(k_p^{(i)} - j) + 1\}} \\ &= \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2z_i - p_i + 2j}. \end{aligned}$$

よて、 f_1 の定義に依りて、

$$\begin{aligned} \Phi_p(z_1, \dots, z_r; f) &= \frac{2^m \pi^{\frac{m}{2}} (2m-m+1)}{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)} \cdot |H|^{-m} \int_{\mathbb{R}_+} t^{-2 \sum_{i=1}^r p_i z_i + m(n+m)} dx_t \\ &\times \int_A \prod_{i=1}^r \prod_{j=0}^{p_i-1} a_{k_p^{(i)}-j}^{-2z_i - p_i + 2j} da \cdot e^{p(\log a)} \int_N \int_{U(H)} f(x_0^t m a t) dx_0 dm \end{aligned}$$

$\therefore \exists x_0$ (f. $\pi(x_0) = H[x_0] = E_m$ と $t=1$) T^{-S} の元である。

補題4.5より、 $e^{p(\log a)} \int_N \int_{U(H)} f(x_0^t m a t) dx_0 dm$ は、 A 上の関数

数として、 (a_1, \dots, a_m) の任意の置換に不変である。いま、 $\Theta_x \in$

次のようにして Θ_m に埋め込む。すなわち、 $\sigma = (\sigma(1), \dots, \sigma(r)) \in$

$$\begin{aligned} & (\overbrace{1, 2, \dots, p_1}^{p_1}, \overbrace{p_1+1, \dots, p_1+p_2}^{p_2}, \dots, \overbrace{k_p^{(r-1)}+1, \dots, m}^{p_r}) \\ & \mapsto (\overbrace{k_p^{(\sigma(1)-1)}+1, \dots, k_p^{(\sigma(1))}}^{p_{\sigma(1)}}, \dots, \overbrace{k_p^{(\sigma(r)-1)}+1, \dots, k_p^{(\sigma(r))}}^{p_{\sigma(r)}}) \end{aligned}$$

と同様にして、 Θ_m の元と対応する。言いかえれば、 $\exists m \in p_1, \dots, p_r$

個の σ -ブロックに分け、各ブロック内での順序を変えず、ブロックを入れかえる置換とみなす。

このとき、上の積分表示は、

$$(z_1, \dots, z_k) \mapsto (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)})$$

$$p = (p_1, \dots, p_k) \mapsto (p_{\sigma(1)}, \dots, p_{\sigma(k)}) = \sigma p$$

$$(a_1, \dots, a_m) \mapsto (a_{\sigma(1)}, \dots, a_{\sigma(m)})$$

の変換で不変である。これは、 $\mathcal{I}_p(z_1, \dots, z_k; f) = \mathcal{I}_{\sigma p}(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)}; f)$

を意味している。 \mathcal{I}_p^* についても同様である。 //

Rem. 以上の証明は、実質的には、球函数の函数等式の証明(例えば [3] の chap X, Proposition 6-7) を follow したことに他ならない。

§ 4. (G, \mathbb{V}) の Zeta 函数

K を類数 1 の虚二次体, \mathcal{O}_K を K の整数環として, $\mathbb{V}_{\mathbb{Q}} = M(n, m; K)$

$B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Q}) = B_{\mathbb{P}} \cap GL(m; K)$, $B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}) = B_{\mathbb{P}} \cap GL(m; \mathcal{O}_K)$ とおく。

$\mathbb{V}_{\mathbb{Q}}$ の格子 L が, $GL(m; \mathcal{O}_K)$ -不変とは, 任意の $\gamma \in GL(m; \mathcal{O}_K)$ に
対し, $L = L \cdot \gamma$ を満足することである。

$\overline{H}_0 = \{w \in M(m; \mathbb{C}) \mid {}^t \bar{w} = w \geq 0\}$, \overline{H}_0 上の連続函数の空間を,
 $C(\overline{H}_0)$ とおく。 $\pi: \mathbb{V} \rightarrow \overline{H}_0$, $\pi^*: \mathbb{V} \rightarrow \overline{H}_0$ は, $\pi(x) = H[x]$,
 $\pi^*(x) = H^{-1}[x]$ で定義される。

定義 1. $GL(m; \mathcal{O}_K)$ -不変の格子 $L \subset \mathbb{V}_{\mathbb{Q}}$, $f \circ \pi \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$,

(resp. $f \circ \pi^* \in \mathcal{L}(\mathbb{V})$) とする $f \in C(\overline{H}_0)$ に対し

$$Z_{\mathbb{P}}(S; L; f) = \int_{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^k \chi_{\mathbb{P}}^{(i)}(b_i)^{S_i} \sum_{\xi \in L \cap \mathbb{V}^{-S}} f(H[\xi; b]) db$$

$$(\text{resp.}) Z_{\mathbb{P}}^*(S; L; f) = \int_{B_{\mathbb{P}}/B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^k \chi_{\mathbb{P}}^{*(i)}(b_i)^{S_i} \sum_{\xi \in L \cap \mathbb{V}^{-S}} f(H^{-1}[\xi; b^{-1}]) db$$

ここで, db は \mathbb{P} の \mathbb{R} 正規化 $c \in B_{\mathbb{P}}$ の right-invariant
measure, 又, $\chi_{\mathbb{P}}^{(i)}, \chi_{\mathbb{P}}^{*(i)}$ は $U(H)$ 上 trivial の指標である。
単に $B_{\mathbb{P}}$ の指標と見たとき。

定義 2. $L: GL(m; \mathcal{O}_K)$ -不変の格子, $L \ni \xi, \eta$ について,

$$\xi \sim \eta \iff \exists {}^t b = \eta \quad ({}^t b \in B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}))$$

$$\xi \overset{*}{\sim} \eta \iff \exists \cdot b^{-1} = \eta \quad ({}^2 b \in B_{\mathbb{P}}(\mathbb{Z}))$$

定義3. $GL(m; \mathcal{O}_K)$ -不変な格子 L について

$$\mathfrak{z}_P(L; S_1, \dots, S_k) = \sum_{X \in L \cap (V-S)/\sim} \prod_{i=1}^k I_P^{(i)}(X)^{-S_i}$$

$$\mathfrak{z}_P^*(L; S_1, \dots, S_k) = \sum_{Y \in L \cap (V-S)/\sim} \prod_{i=1}^k Q_P^{(i)}(Y)^{-S_i}$$

Mass[6] に従って.

まず \surd 格子 $L_0 = M(m, m; \mathcal{O}_K)$ について $\mathfrak{z}_P, \mathfrak{z}_P^*$ を計算してみよう。

補題6. m の分割 $\hat{p}, \hat{p} \in \tilde{p} = (p_1, \dots, p_k, p_{k+1}), \hat{p} = (p_0, p_1, \dots, p_k)$

$p_0 = p_{k+1} = m - m$ とする。 \cup_K で \mathcal{O}_K の単数群を表わす。 $\mathcal{O}_K - \{0\}$ に対し、 (a) で a の生成するイデアルを表わす。

(i) $L_0 \cap (V-S)/\sim$ の完全代表系として、次がとれる。

$$\left\{ U \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_{ij} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_m \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a_i \in \mathcal{O}_K - \{0\} / \cup_K, a_{ij} \in \mathcal{O}_K / (a_i) \\ U \in SL(m; \mathcal{O}_K) / \mathfrak{t}_{B_{\hat{p}}} \cap SL(m; \mathcal{O}_K) \end{array} \right\}$$

(ii) $L_0 \cap (V-S)/\sim$ の完全代表系として、次がとれる。

$$\left\{ U \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_{ij} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_m \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} a_i \in \mathcal{O}_K - \{0\} / \cup_K, a_{ij} \in \mathcal{O}_K / (a_i) \\ U \in SL(m; \mathcal{O}_K) / \mathfrak{t}_{B_{\hat{p}}} \cap SL(m; \mathcal{O}_K) \end{array} \right\}$$

(i) K の類数 = 1 と仮定してあるから、単因子論が使える。 $V-S$ の元は、 $\text{rank} = m$ であることに注意すれば、上の Type の元と同値

にたるとは、易しい。 故に、 $\mathfrak{t} \in B_P(\mathbb{Z})$ があって、

$$U \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & & \\ & a_{ij} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_m \end{pmatrix} \cdot \mathfrak{t} = U' \cdot \begin{pmatrix} a'_1 & & & \\ & a'_{ij} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a'_m \end{pmatrix} \text{ とする。}$$

このとき、 $U^{-1}U' \in \mathfrak{t}_{B_{\hat{p}}} \cap SL(m; \mathcal{O}_K)$ とたよりから $U = U'$ 。

$$\therefore \begin{pmatrix} a_1 & a_{ij} \\ & a_m \end{pmatrix} \cdot {}^t b = \begin{pmatrix} a'_1 & a'_{ij} \\ & a'_m \end{pmatrix} \quad \therefore b \in B_{\mathbb{P}_0}(\mathbb{Z}) \quad \text{Lti かつ}$$

$$\mathbb{P}_0 = (\underbrace{1, 1, \dots, 1}_m)$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ b_{ij} & b_m \end{pmatrix} \text{ と } \bar{\sigma} < \psi. \quad b_i \in \mathcal{O}_K. \quad a_i \in \mathcal{O}_K \setminus \mathcal{O}_K / \mathcal{O}_K \neq \emptyset.$$

$$a_i = a'_i. \quad \therefore b_i = 1. \quad a_{ij} \in \mathcal{O}_K / (a_i) \neq \emptyset \text{ かつ } \text{Lti かつ } b_{ij} = 0$$

(i+j) が言える。

(ii) の証明も同様だから、省略する。 //

補題 7. 数体 K の Dedekind zeta $\zeta_K(s)$ とする。

$L_0 = M(n, m; \mathcal{O}_K)$ について。

$$(i) \zeta_{\mathbb{P}}(L_0; S_1, \dots, S_k) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} \zeta_K(S_i + \dots + S_k - k_{\mathbb{P}}^{(k-i)} - j)$$

$$\times \sum_{U \in SL(n; \mathcal{O}_K) / \mathcal{B}_{\mathbb{P}} \cap SL(n; \mathcal{O}_K)} \prod_{i=1}^k |{}^t U H U [E_{\mathbb{P}}^{(i)}]|^{-S_i}$$

$$(ii) \zeta_{\mathbb{P}}^*(L_0; S_1, \dots, S_k) = \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_{k-i}-1} \zeta_K(S_i + \dots + S_k - k_{\mathbb{P}}^{(k-i)} - j)$$

$$\times \sum_{U \in SL(n; \mathcal{O}_K) / \mathcal{B}_{\mathbb{P}} \cap SL(n; \mathcal{O}_K)} \prod_{i=1}^k |{}^t U H^{-1} U [E_{\mathbb{P}}^{*(i)}]|^{-S_i}$$

特に、 $\zeta_{\mathbb{P}}(L_0; S_1, \dots, S_k)$ (resp. $\zeta_{\mathbb{P}}^*(L_0; S_1, \dots, S_k)$) は $\text{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$
 $i=1, \dots, k$, $p_{k+1} = n-m$ (resp. $\text{Re}(S_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1}$, $i=1, \dots, k$, $p_0 = n-m$)
 で絶対収束する。

(i) (i) 補題 6 による。

$$\zeta_{\mathbb{P}}(L_0; S_1, \dots, S_k) = \sum_{a_i \in \mathcal{O}_K \setminus \mathcal{O}_K / \mathcal{O}_K} \sum_{a_{ij} \in \mathcal{O}_K / (a_i)} \sum_{U \in SL(n; \mathcal{O}_K) / \mathcal{B}_{\mathbb{P}} \cap SL(n; \mathcal{O}_K)} \quad (\#)$$

$$(\#) = \prod_{i=1}^k |H[U, E_P^{(i)}] \left[\begin{pmatrix} a_i & a_{ij} \\ & a_m \end{pmatrix} \right] [E_P^{(i)}]|^{-S_i}$$

$$= \prod_{i=1}^k \chi_P^{(i)} \left(\begin{pmatrix} a_i & 0 \\ & a_m \end{pmatrix} \right) \cdot |H[U] [E_P^{(i)}]|^{-S_i}$$

$$= \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} |a_{K_P^{(i)}-j}|^{-2(S_i+\dots+S_k)} \cdot \prod_{i=1}^k |H[U] [E_P^{(i)}]|^{-S_i}$$

$$\therefore \sum_P(L_0; S_1, \dots, S_k) = \sum_{a_i \in \mathcal{O}_K \setminus \mathfrak{o}_K} \sum_{a_{ij} \in \mathcal{O}_K / (a_i)} \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} |a_{K_P^{(i)}-j}|^{-2(S_i+\dots+S_k)}$$

$$\times \sum_{U \in \text{SL}(n; \mathcal{O}_K) / \mathfrak{t}_{B_P} \cap \text{SL}(n; \mathcal{O}_K)} |\mathfrak{t}^U H U [E_P^{(i)}]|^{-S_i}$$

$$= \sum_{a_i \in \mathcal{O}_K \setminus \mathfrak{o}_K} \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} |a_{K_P^{(i)}-j}|^{-2(S_i+\dots+S_k - \frac{p_i-1}{K_P} - j)}$$

$$\cdot \sum_{U \in \text{SL}(n; \mathcal{O}_K) / \mathfrak{t}_{B_P} \cap \text{SL}(n; \mathcal{O}_K)} |\mathfrak{t}^U H U [E_P^{(i)}]|^{-S_i}$$

$$= \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} \left\{ \sum_{a \in \mathcal{O}_K \setminus \mathfrak{o}_K} |a|^{-2(S_i+\dots+S_k - \frac{p_i-1}{K_P} - j)} \right\}$$

$$\times \sum_{U \in \text{SL}(n; \mathcal{O}_K) / \mathfrak{t}_{B_P} \cap \text{SL}(n; \mathcal{O}_K)} |\mathfrak{t}^U H U [E_P^{(i)}]|^{-S_i}$$

K が素数 p の虚二次体だから、 $\int_K(S) = \sum_{a \in \mathcal{O}_K \setminus \mathfrak{o}_K} |a|^{-2S}$ である。

ゆえに (i) は証明された。

(ii) も全く同様である。

$\text{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k$) のとき。

$$\operatorname{Re}(S_1 + \dots + S_k) - k_p^{*(k-1)} - j \neq k_p^{*(k-1)} + n - m \geq 1$$

よって $\int_k (S_1 + \dots + S_k - k_p^{*(k-1)} - j)$ は $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k$) で絶対収束。

$$\sum_{U \in \text{SL}(n; \mathbb{Q}_k) / \text{B}_p \cap \text{SL}(n; \mathbb{Q}_k)} \prod_{i=1}^k |{}^t U H U [E_p^{(i)}]|^{-S_i} \text{ は } \text{SL}(n; \mathbb{Q}) \text{ の Eisenstein 関}$$

数に他ならず、この級数が $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k$) で絶対収束することは、Goodment の判定条件の結論である。(cf A. Borel [Z])

$\zeta_p^*(L_0; S_1, \dots, S_k)$ の収束も全く同様である。 //

補題 8 $\text{GL}(m; \mathbb{Q}_k)$ -不変な格子 L 、 $f \circ \pi$ (resp. $f \circ \pi^*$) $\in \mathcal{L}(V)$ に対し $f \in C(\overline{H}_0)$ に対し、 $Z_p(S; L; f)$ 、 $\zeta_p(L; S)$ (resp. $Z_p^*(S; L; f)$ 、 $\zeta_p^*(L; S)$) は $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k$) (resp. $\operatorname{Re}(S_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1}$ ($i=1, \dots, k$)) で絶対収束。

$$(i) Z_p(S; L; f) = \pi^{\frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_k^2 + m^2) - mn} \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)}$$

$$\times |H|^m \cdot \zeta_p(L; S) \cdot \Phi_p(S; f \circ \pi)$$

$$(ii) Z_p^*(S; L; f) = \pi^{\frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_k^2 + m^2) - mn} \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(n-m+i)}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)}$$

$$\times |H|^{-m} \cdot \zeta_p^*(L; S) \cdot \Phi_p^*(S; f \circ \pi^*)$$

(') $L \subset V_{\mathbb{Q}}$ 、 L に對して、 $\alpha \in \mathbb{Q}_k^{\times}$ 、 $\alpha \cdot L \subset L_0 = M(m, m; \mathbb{Q}_k)$ とするものが存在する。

$$\begin{aligned} \therefore \sum_{x \in L \cap V-S} \frac{\prod_{i=1}^k |P_P^{(i)}(x)|^{-\operatorname{Re} s_i}}{\sim} &\leq \sum_{x \in L \cap V-S} \frac{\prod_{i=1}^k |P_P^{(i)}(\alpha^{-1}x)|^{-\operatorname{Re} s_i}}{\sim} \\ &= |\alpha|^{-2 \sum_{i=1}^k k_P^{(i)} \operatorname{Re} s_i} \cdot \zeta_P(L; \operatorname{Re}(s_1), \dots, \operatorname{Re}(s_k)) \end{aligned}$$

この左辺は、すでに述べたように、 $\operatorname{Re}(s_i) > \rho_i + \rho_{i+1}$ ($i=1, \dots, k$)
で絶対収束している。よって $\zeta_P(L; s_1, \dots, s_k)$ は、同じ範囲で絶対収
束する。 $\zeta_P^*(L; s_1, \dots, s_k)$ についても同様である。

次に、 $Z_P(S; L; f)$ を形式的に変形してみる。

$$\begin{aligned} Z_P(S; L; f) &= \int_{B_P/B_P(\mathbb{Z})} \frac{\prod_{i=1}^k \chi_P^{(i)}(b)^{s_i}}{\sim} \sum_{\zeta \in L \cap V-S} f(H[\zeta^t b]) db \\ &= \sum_{\zeta \in L \cap V-S} \int_{B_P} \frac{\prod_{i=1}^k \chi_P^{(i)}(b)^{s_i}}{\sim} f(H[\zeta^t b]) db \\ &= \sum_{\zeta \in L \cap V-S} \frac{\prod_{i=1}^k |P_P^{(i)}(\zeta)|^{-s_i}}{\sim} \int_{B_P} \frac{\prod_{i=1}^k P_P^{(i)}(\zeta^t b)^{s_i}}{\sim} f(H[\zeta^t b]) db \end{aligned}$$

ここで、補題 2 を利用すれば、

$$\begin{aligned} &\int_{B_P} \frac{\prod_{i=1}^k P_P^{(i)}(\zeta^t b)^{s_i}}{\sim} f(H[\zeta^t b]) db \\ &= \int_{(B_P)} d\mu_{H[\zeta]} \cdot \int_{\mathbb{R}^0} \frac{\prod_{i=1}^k |w[E_P^{(i)}]|^{s_i}}{\sim} f(w) \widetilde{dw} \\ &= \frac{\pi^{\frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \rho_i^2 + \frac{m}{2}}}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{\rho_i} \Gamma(j)} \cdot \int_{\mathbb{R}^0} \frac{\prod_{i=1}^k |w[E_P^{(i)}]|^{s_i}}{\sim} f(w) \widetilde{dw} \end{aligned}$$

一方、補題 1 によつて、

$$\begin{aligned}
\mathfrak{F}_P(S; f \circ \pi) &= \int_{V-S} \prod_{i=1}^k \rho_P^{(i)}(x)^{S_i - p_i - p_{i+1}} f(H(x)) dx \\
&= \int_{\mathcal{A}^0} \prod_{i=1}^k |W[EP^{(i)}]|^{S_i - p_i - p_{i+1}} f(w) dw \cdot \int \frac{|w|}{\pi'(w)} \\
&= |H|^{-m} \cdot \frac{\pi^{\frac{m(2n-m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(m-m+i)} \cdot \int_{\mathcal{A}^0} \prod_{i=1}^k |W[EP^{(i)}]|^{S_i} f(w) \tilde{dw}
\end{aligned}$$

以上より、容易に(i)が得られる。\$\mathfrak{F}_P\$ の \$\text{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}\$ (\$i=1, \dots, k\$) での絶対収束性より、以上の計算は正当化される。(ii)に就いても同様である。 //

さて、我々の定理は次のとおりである。

定理 \$\mathfrak{F}_P(L; S)\$, \$\mathfrak{F}_P^*(L; S)\$ は、\$\mathbb{C}^k\$ 上の有理型函数として解析接続され、次の函数等式を満足する。

$$\begin{aligned}
(1). L^* \text{ と } L \text{ の 双対格子、すなわち、} L^* &= \{x \in V_{\mathbb{Q}} \mid \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z}, \\
\forall y \in L\}。 \nu(L^*) &= \int_{V/L^*} dx。 \\
\mathfrak{F}_P(L; S_1, \dots, S_k) &= |H|^{-\frac{m}{2}} \pi^{-\sum_{i=1}^k k_P^{(i)} S_i} \\
&\quad \times \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_i-1} \Gamma(S_i + \dots + S_k - k_P^{*(k-i)} - j) \cdot \mathfrak{F}_P(L; S_1, \dots, S_k) \\
\mathfrak{F}_P^*(L^*; S_1, \dots, S_k) &= |H|^{-\frac{m}{2}} \pi^{-\sum_{i=1}^k k_P^{*(i)} S_i} \\
&\quad \times \prod_{i=1}^k \prod_{j=0}^{p_{k-i+1}-1} \Gamma(S_i + \dots + S_k - k_P^{(k-i)} - j) \cdot \mathfrak{F}_P^*(L^*; S_1, \dots, S_k)
\end{aligned}$$

と表わせば、

$$\nu(L^*)^{-1} \mathfrak{F}_P(L; S_1, \dots, S_k) = \mathfrak{F}_P^*(L^*; S_{k-1}, \dots, S_1, m-S_1, \dots, -S_k)$$

(2) $D \in K$ の判別式、 $\eta_K(s) = \left(\frac{\sqrt{|D|}}{2\pi}\right)^s \Gamma(s) \zeta_K(s)$ とおく。

$\zeta_P(L; s_1, \dots, s_k)$ (resp. $\zeta_P^*(L; s_1, \dots, s_k)$) は変数変換 (a) (resp. (b)) によって、 z_1, \dots, z_k の函数とみなして、 $\zeta_P(L; z_1, \dots, z_k)$ (resp. $\zeta_P^*(L; z_1, \dots, z_k)$) と記す。

任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ に対して、 $\zeta_P(L; z_1, \dots, z_k) / \zeta_{P^\sigma}(L; z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)})$ (resp. $\zeta_P^*(L; z_1, \dots, z_k) / \zeta_{P^\sigma}^*(L; z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)})$) は、 $\eta_K(z_\nu - z_\mu + \frac{p_\mu + p_\nu}{2} - j)$ ($j=0, 1, 2, \dots$) の積で書ける。

特に、巡回置換 $\tau_0 = (1, 2, \dots, k)$ に対しては、

$$\frac{\zeta_{P^{\tau_0}}(L; z_{\sigma_0(1)}, \dots, z_{\sigma_0(k)})}{\zeta_P(L; z_1, \dots, z_k)} = \frac{\zeta_{P^{\tau_0}}^*(L; z_{\sigma_0(1)}, \dots, z_{\sigma_0(k)})}{\zeta_P^*(L; z_1, \dots, z_k)} = \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \eta_K(z_i - z_{i+1} + \frac{p_i + p_{i+1}}{2} - j)$$

置換 $\sigma_i = (i, i+1)$ ($i=1, \dots, k-1$) に対しては、

$$\frac{\zeta_{P^{\sigma_i}}(L; z_{\sigma_i(1)}, \dots, z_{\sigma_i(k)})}{\zeta_P(L; z_1, \dots, z_k)} = \frac{\zeta_{P^{\sigma_i}}^*(L; z_{\sigma_i(1)}, \dots, z_{\sigma_i(k)})}{\zeta_P^*(L; z_1, \dots, z_k)} = \prod_{j=0}^{p_i-1} \eta_K(z_i - z_{i+1} + \frac{p_i + p_{i+1}}{2} - j)$$

と与えられる。

Remark $p_1 = p_2 = \dots = p_k = p$ とおき、命題 11 について、函数等式 (2)

は、任意の $\sigma \in \mathfrak{S}_k$ について

$$\prod_{1 \leq \mu < \nu \leq k} \prod_{j=1}^p \eta_K(z_\nu - z_\mu + j) \zeta_P(L; z_1, \dots, z_k)$$

$$\prod_{1 \leq \mu < \nu \leq k} \prod_{j=1}^p \eta_K(z_\nu - z_\mu + j) \zeta_P^*(L; z_1, \dots, z_k)$$

は、 $(z_1, \dots, z_k) \rightarrow (z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(k)})$ で変換した形式に与えられる。

§5. 定理の証明.

§5-1: 函数等式(1)の証明

$\pi: V \rightarrow \overline{\mathbb{R}_0}$ ($\pi(x) = H[x]$), $\pi^*: V \rightarrow \overline{\mathbb{R}_0}$ ($\pi^*(x) = H^{-1}[x]$) で, $H \in \text{明}$
 示したいときには, π_H, π_H^* とかくことにする.

$\psi \in C(\overline{\mathbb{R}_0})$, $g \in GL(m; \mathbb{C})$ に対し, $\pi_{H[g]}(x) = \pi_H(gx)$.

$\psi \circ \pi_{H[g]}(x) = \psi \circ \pi_H(gx)$ が成立つ. よって, ある n 次正定値エル
 ミート行列 H_0 に対し, $\psi \circ \pi_{H_0} \in \mathcal{S}(V)$ ならば, 任意の n 次正定値エル
 ミート行列 H に対し $\psi \circ \pi_H \in \mathcal{S}(V)$ が成立つ. 特に $\pi_H^* = \pi_{H^{-1}}$ だ
 から $\psi \circ \pi_H^* \in \mathcal{S}(V)$ でもある.

$\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_0}) = \{ \psi \in C(\overline{\mathbb{R}_0}) \mid \psi \circ \pi_H \in \mathcal{S}(V) \}$ とおく. これは, H によ
 らない.

補題9.

(1) 線型写像 $\rho: \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_0}) \rightarrow \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_0})$ ($\psi \mapsto \psi^\rho$) が存在し,

$$\widehat{\psi \circ \pi_H^*} = |H|^m \cdot \psi^\rho \circ \pi_H \quad (\psi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_0}))$$

(2) $\psi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_0})$ で次の条件 a), b) を満足するものが存在する.

a) $\psi(\bar{u}w^t u) = \psi(w) \quad (u \in U(E_m), w \in \overline{\mathbb{R}_0})$

b) 任意の n 次正定値エルミート行列 $\overset{H}{\downarrow}$ に対し,

$$\psi \circ \pi_H^* \Big|_{\mathcal{S}} = 0, \quad \widehat{\psi \circ \pi_H^*} \Big|_{\mathcal{S}} = 0$$

(1) (1) $\psi \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_0})$ に対し, Fourier 変換の定義より, $\widehat{\psi \circ \pi_{E_m}^*}$
 は, $U(E_m)$ -不変. よって $\psi^\rho \circ \pi_{E_m} = \widehat{\psi \circ \pi_{E_m}^*}$ とおき $\psi^\rho \in \mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}_0})$ が

する。 $\psi \mapsto \psi^g$ が条件 ε を満足する。

写像 ($g \in GL(n, \mathbb{C})$) とおく。

$$\pi_H^*(x) = \psi \circ \pi_{E_m}^*(t\bar{g}^{-1}x)$$

$$\widehat{\pi}_H^*(x) = |H|^m \cdot \psi^g \circ \pi_H(x) = |H|^m \cdot \psi^g \circ \pi_{E_m}(gx)$$

$= E_m$ のときに条件 $b)$ が満たされるだけである。

上の定係数微分作用素 $D(x)$ を $D(x) e^{2\pi i \langle x, y \rangle}$

$e^{2\pi i \langle x, y \rangle}$ を満たすようにとる。 $D(x)$ は、 $h \in U(E_m)$

$(hx) = D(x)$ を満たすことに注意する。

) について、

$$) = D(x) \cdot |t\bar{x} \cdot x|^{2m+1} \int_{U(E_m)} \psi \circ \pi_{E_m}(x^t u) du$$

(du は $U(E_m)$ の Haar measure)

$(hx^t u) = \varphi_\psi(x)$ ($h \in U(E_m)$, $u \in U(E_m)$) が成立つ。

$\varphi = \psi \circ \pi_{E_m}$ とする。 $\varphi_0 \in S(\overline{\mathbb{C}^n})$ が存在するか、 φ_0 は条件

a) は明らかである。 $D(x)$ は、 $2m$ 階の定係数微分作用

$\varphi_\psi|_S = 0$ 。又、部分積分によつて、

$$= \int_V D(x) \left\{ |t\bar{x} \cdot x|^{2m+1} \int_{U(E_m)} \psi \circ \pi_{E_m}(x^t u) du \right\} e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dx$$

$$= |t\bar{y} \cdot y| \int_V |t\bar{x} \cdot x|^{2m+1} \int_{U(E_m)} \psi \circ \pi_{E_m}(x^t u) du \cdot e^{2\pi i \langle x, y \rangle} dx。$$

$\gamma = 0$ 。

//

補題 9 を利用して、函数等式 (1) の証明をしよう。

$\Phi \in \mathcal{S}(V)$ に、Poisson の和公式を適用すれば、

$$v(L^*)^{-1} \sum_{x \in L} \widehat{\Phi}(x^t b) = \|b\|^{-2m} \sum_{y \in L^*} \Phi(y \bar{b}^{-1})$$

が成立つ。特に、補題 9 の (2) によって、

$$f \circ \pi^*|_S = 0, \quad \widehat{f \circ \pi^*}|_S = |H|^m f \circ \pi|_S = 0$$

とたゞ $f \in \mathcal{S}(\bar{b}_0)$ とすれば、

$$v(L^*)^{-1} \sum_{x \in L \cap V-S} \widehat{f \circ \pi^*}(x^t b) = \|b\|^{-2m} \sum_{y \in L^* \cap V-S} f \circ \pi^*(y \bar{b}^{-1})$$

をうる。

$$Z_P^+(S; L; |H|^m f) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(i)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^k \chi_P^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{x \in L \cap V-S} \widehat{f \circ \pi^*}(x^t b) db$$

$$Z_P^-(S; L; |H|^m f) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{(i)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^k \chi_P^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{x \in L \cap V-S} \widehat{f \circ \pi^*}(x^t b) db$$

$$Z_P^{*+}(S; L^*; f) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{*(i)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^k \chi_P^{*(i)}(b)^{s_i} \sum_{y \in L^* \cap V-S} f \circ \pi^*(y \bar{b}^{-1}) db$$

$$Z_P^{*-}(S; L^*; f) = \int_{\substack{B_P/B_P(\mathbb{Z}) \\ \chi_P^{*(i)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^k \chi_P^{*(i)}(b)^{s_i} \sum_{y \in L^* \cap V-S} f \circ \pi^*(y \bar{b}^{-1}) db$$

とあつて、補題 8 によって、 Z_P^+ は $\{s \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}, i=1, \dots, k-1\}$

Z_P^- は $\{s \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}, i=1, \dots, k\}$, Z_P^{*+} は $\{s \in \mathbb{C}^k \mid$

$\operatorname{Re}(s_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1}, i=1, \dots, k-1\}$, Z_P^{*-} は $\{s \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(s_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1}, i=1, \dots, k\}$

7. 絶対収束する。

$$Z_p(S: L: |H|^m f^p) = Z_p^+(S: L: |H|^m f^p) + Z_p^-(S: L: |H|^m f^p)$$

→ Poisson和公式によつて、

$$Z_p^-(S: L: |H|^m f^p) = \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{(s)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^{\nu} \chi_p^{(s_i)}(b)^{s_i} \sum_{x \in L \cap V_S} \widehat{f \circ \pi^*}(x^t b) db$$

$$= v(L^*) \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{(s)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^{\nu-1} \chi_p^{(s_i)}(b)^{s_i} \cdot \chi_p^{(s_\nu)}(b)^{s_\nu - \eta} \sum_{y \in L^* \cap V_S} f \circ \pi^*(y \bar{b}^{-1}) db$$

$$= v(L^*) \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{*(s)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^{\nu-1} \chi_p^{*(s_i)}(b)^{s_i} \cdot \chi_p^{*(s_\nu)}(b)^{\eta - s_\nu - s_\nu} \sum_{y \in L^* \cap V_S} f \circ \pi^*(y \bar{b}^{-1}) db$$

$$= v(L^*) Z_p^{*+}(S_{\nu-1}, \dots, S_1, \eta - s_1, \dots, -s_\nu; L^*; f)$$

$$\therefore Z_p(S: L: |H|^m f^p)$$

$$= Z_p^+(S: L: |H|^m f^p) + v(L^*) Z_p^{*+}(S_{\nu-1}, \dots, S_1, \eta - s_1, \dots, -s_\nu; L^*; f)$$

この表示は、 $Z_p(S: L: |H|^m f^p)$ が、 $\{s \in \mathbb{C}^\nu \mid \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}, i=1, \dots, \nu-1\}$

上の正則函数として延長されることを示している。

同様にして、

$$Z_p^*(S_{\nu-1}, \dots, S_1, \eta - s_1, \dots, -s_\nu; L^*; f)$$

$$= Z_p^{*+}(S_{\nu-1}, \dots, S_1, \eta - s_1, \dots, -s_\nu; L^*; f) + v(L^*)^{-1} Z_p^+(S: L: |H|^m f^p)$$

が得られる。

従って $\{s \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(s_i) > \rho_i + \rho_{i+1} \quad i=1, \dots, k-1\}$ である。

$$\nu(L^*)^{-1} Z_p(s_1, \dots, s_k; L: |H|f) = Z_p^*(s_{k-1}, \dots, s_1, n-s_1, \dots, s_k; L^*: f).$$

補題 8 の (i), (ii) と 命題 1 とを合わせれば、容易に函数等式 (1) を得る。 //

Rem. ここでは、 $Z_p(L; S)$ (resp. $Z_p^*(L^*; S)$) は、 $\operatorname{Re}(s_i) > \rho_i + \rho_{i+1}$ ($i=1, \dots, k-1$), (resp. $\operatorname{Re}(s_i) > \rho_{k-i} + \rho_{k-i+1}$ ($i=1, \dots, k-1$)) の範囲に有理型函数として解析接続された。 \mathbb{C}^k 全体への解析接続は、函数等式 (2) を必要とする。

§ 5-2 : この節では、函数等式 (2) の証明に必要な補題をまとめしておく。

補題 10. m の分割 $q = (q_1, \dots, q_{k+1})$ ($k \geq 1$)、 n 次正定値エルミート行列 H に対し、

$$E_q(H; s_1, \dots, s_k) = \sum_{\substack{U \in \operatorname{SL}(n; \mathbb{Q}_k) \\ \in B_q \cap \operatorname{SL}(n; \mathbb{Q}_k)}} \prod_{i=1}^k |{}^t U H U [E_q^{(i)}]|^{-s_i}$$

$$E_q^*(H; s_1, \dots, s_k) = \sum_{\substack{U \in \operatorname{SL}(n; \mathbb{Q}_k) \\ \in B_q \cap \operatorname{SL}(n; \mathbb{Q}_k)}} \prod_{i=1}^k |{}^t U H U [E_q^{*(i)}]|^{-s_i}$$

とする。 E_q (resp. E_q^*) は、 $\operatorname{Re}(s_i) > \rho_i + \rho_{i+1}$, $1 \leq i \leq k$ (resp.

$\operatorname{Re}(s_i) > \rho_{k-i} + \rho_{k-i+1}$, $1 \leq i \leq k$) で絶対収束して、

$$E_q(H; s_1, \dots, s_k) = |H|^{-s_1 - \dots - s_k} E_q^*(H; s_k, \dots, s_1)$$

$$|H U [E_q^{(i)}]| = |H| \cdot |U^{-1} H^{-1} U^{-1} [E_q^{*(k-i+1)}]|$$

$$|H: S_1, \dots, S_k| = |H|^{-S_1 - \dots - S_k} \left\{ \sum_{U \in SL(n; \mathbb{Q}_k)} \prod_{i=1}^k |U^{-1} H^{-1} U^{-1} [E_q^{*(k-i+1)}]|^{-S_i} \right\}$$

$\in B_q \cap SL(n; \mathbb{Q}_k)$

$(n; \mathbb{Q}_k) / \in B_q \cap SL(n; \mathbb{Q}_k)$ の完全代表系を取ると、 U^{-1} は、

$B_q \cap SL(n; \mathbb{Q}_k)$ の完全代表系を取ることにより、

$$(H: S_1, \dots, S_k) = |H|^{-S_1 - \dots - S_k} E_q^*(H: S_k, \dots, S_1) \quad .$$

4 まで注意したように Godement の判定条件によらず、

命題 2 の証明で利用した記号を再び使う。すなわち、

$$n) = \mathbb{R}^x \cdot A \cdot N = \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\frac{dn}{t}, da = \prod_{i=1}^{m-1} \frac{da_i}{a_i}, dn = \prod_{i > j} dR_{ij} dIm_{ij}$$

$$n) = U(E_m) \cap B_p = \left\{ \begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_k \end{pmatrix} \mid A_i \in U(E_{p_i}) \right\} \cong \prod_{i=1}^k U(E_{p_i})$$

かつ $B_p = U_p(E_m) \cdot B^+(m)$ と分解できる。 $B_p \ni b$ の対

に $b = u \cdot b^+ (u \in U_p(E_m), b^+ \in B^+(m))$ とする。

$U_p(E_m)$ 上の right invariant measure db^+ , $U_p(E_m)$ 上の Haar

measure du を、それぞれ du とする。

$$db^+ = \prod_{i=1}^m a_i^{2i} dx^i da^i dn$$

$$\int_{U_p(E_m)} du = 2^m \cdot \prod_{i=1}^k \left(\frac{\pi^{\frac{p_i(p_i+1)}{2}}}{\prod_{j=1}^{p_i} T(j)} \right)$$

よって、

$$db = du db^+$$

17. p.77 之に B_p a right invariant measure τ あり

特に, $\nu=1$, $P=(m)$ のとき.

$$GL(m; \mathbb{C}) = U(E_m) \cdot B^+(m)$$

$$dg = \frac{\prod_{i,j} d\operatorname{Re} g_{ij} d\operatorname{Im} g_{ij}}{\|g\|^{2m}} = du dt \quad (g = (g_{ij}) \in GL(m; \mathbb{C}))$$

$$\int_{U(E_m)} du = 2^m \frac{\pi^{\frac{m(m+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^m \Gamma(i)}$$

補題 11. $f \in S(\overline{H_0})$ かつ, $f(\alpha w^t u) = f(w)$ ($u \in U(E_m)$, $w \in \overline{H_0}$)
 を満足するとしよう。このとき, $GL(m; \mathbb{Q}_K)$ -不変格子 $L \subset \overline{H_0}$
 に対し,

(i) $\operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, \nu$, $p_{\nu+1} = n-m$) のとき,

$$Z_p(S; L; f) = \pi^{\frac{p_1^2 + \dots + p_\nu^2 - m^2}{2}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(i)}{\prod_{i=1}^{\nu} \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)}$$

$$\cdot \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_K)} \|g\|^{2s_\nu} E_p(({}^t \bar{g} g)^{-1}; s_1, \dots, s_\nu) \sum_{\gamma \in L \cap V^{-S}} f(H[\gamma] \bar{g} \gamma) dg.$$

(ii) $\operatorname{Re}(s_i) > p_{\nu-i} + p_{\nu-i+1}$ ($i=1, \dots, \nu$, $p_0 = n-m$) のとき,

$$Z_p^*(S; L; f) = \pi^{\frac{p_1^2 + \dots + p_\nu^2 - m^2}{2}} \cdot \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(i)}{\prod_{i=1}^{\nu} \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)}$$

$$\cdot \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_K)} \|g\|^{-2s_\nu} E_p^*(({}^t \bar{g} g)^{-1}; s_1, \dots, s_\nu) \sum_{\gamma \in L \cap V^{-S}} f(H^{-1}[\gamma] \bar{g}^{-1} \gamma) dg$$

(1) (i). 補題 8 より、 $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k$) と $Z_p(S; L; f)$ は絶対収束して、以下の変形が許される。

$$\begin{aligned} Z_p(S; L; f) &= \int_{B_p/B_p(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^k \chi_p^{(i)}(b) S_i \sum_{\zeta \in L \cap V-S} f(H[\zeta^t b J]) db \\ &= \int_{B_p} \prod_{i=1}^k \chi_p^{(i)}(b) S_i \sum_{\zeta \in L \cap V-S / \sim} f(H[\zeta^t b J]) db \end{aligned}$$

f の $U(E_m)$ -不変性により、

$$\begin{aligned} &= 2^m \prod_{i=1}^k \left(\frac{\pi^{p_i(p_i+1)}}{\prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)} \right) \int_{B^+(m)} \prod_{i=1}^k \chi_p^{(i)}(b) S_i \sum_{\zeta \in L \cap V-S / \sim} f(H[\zeta^t b J]) db \\ &= \pi^{\frac{p_1^2 + \dots + p_k^2 - m^2}{2}} \frac{\prod_{i=1}^m \Gamma(i)}{\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} \Gamma(j)} \\ &\quad \times \int_{GL(m; \mathbb{C})} \|g\|^{2S_k} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\Gamma(j)} |(\tau \bar{g})^{-1} [E_p^{(i)}]|^{-S_i} \sum_{\zeta \in L \cap V-S / \sim} f(H[\zeta^t g J]) dg. \end{aligned}$$

$$= C_p \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_k)} \|g\|^{2S_k} \sum_{U \in GL(m; \mathbb{Q}_k) / B_p(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1}{\Gamma(j)} |(\tau \bar{g})^{-1} [U^{-1} E_p^{(i)}]|^{-S_i}$$

$$\times \sum_{\zeta \in L \cap V-S} f(H[\zeta^t U g J]) dg.$$

$L \cap V-S$ が $GL(m; \mathbb{Q}_k)$ -不変と仮定することに注意すれば、

$$= C_p \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_k)} \|g\|^{2S_k} E_p((\tau \bar{g})^{-1}; S_1, \dots, S_{k-1}) \sum_{\zeta \in L \cap V-S} f(H[\zeta^t g J]) dg$$

ここで、簡単に、 $\pi^{\frac{1}{2}(p_1^2 + \dots + p_k^2 - m^2)} \cdot \prod_{i=1}^m T(i) \cdot \left(\prod_{i=1}^k \prod_{j=1}^{p_i} T(i) \right)^{-1}$ を C_P と書
いた。(ii) も全く同じ議論で証明できる。 //

Remark: $Z_P^+(S; L; f)$, $Z_P^{*+}(S; L; f)$ を p-28 と同様に定義すれば、
 $\operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k-1$) で、

$$Z_P^+(S; L; f) = C_P \cdot \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{O}_k) \\ \|g\| \geq 1}} \|g\|^{2S_k} E_P((tgg^{-1})^{-1}; S_1, \dots, S_{k-1}) \sum_{\gamma \in L \cap V-S} f(H[\gamma g]) dg$$

$\operatorname{Re}(S_i) > p_{k-i} + p_{k-i+1}$ ($i=1, \dots, k-1$) で

$$Z_P^{*+}(S; L; f) = C_P \cdot \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{O}_k) \\ \|g\| \leq 1}} \|g\|^{-2S_k} E_P^*(tgg^{-1}; S_1, \dots, S_{k-1}) \sum_{\gamma \in L \cap V-S} f(H^{-1}[\gamma g^{-1}]) dg$$

が、補題11と同じ仮定の下で成立する。

§5-1 で示したように、 $\psi \in S(\overline{H_0})$ が、 $\psi \circ \pi|_S = 0$, $\widehat{\psi \circ \pi}|_S = 0$ を
満たすならば、 $Z_P(S; L; \psi)$ は $\{(S_1, \dots, S_{k-1}) \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1} (i=1, \dots, k-1)\}$
上の正則関数とみなせ、次の不等式が成立する。すなわち、

補題12 $\psi \in S(\overline{H_0})$ が、 $\psi \circ \pi^*|_S = 0$, $\widehat{\psi \circ \pi^*}|_S = 0$ を満たすならば、領域
 $D_M = \{(S_1, \dots, S_k) \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(S_i) > p_i + p_{i+1} (i=1, \dots, k-1), |\operatorname{Re}(S_k)| < M\}$ ($M > 0$) 上で

$$|Z_P(S; L; \psi^g)| \leq Z_P(\operatorname{Re}(S_1), \dots, \operatorname{Re}(S_{k-1}), M; L; \psi_1)$$

$$+ v(L^*) Z_P^*(\operatorname{Re}(S_{k-1}), \dots, \operatorname{Re}(S_1), n+M-\operatorname{Re}(S_1) - \dots - \operatorname{Re}(S_{k-1}); L^*; \psi_2)$$

を満たす $\psi_1, \psi_2 \in S(\overline{H_0})$ が存在する。

$$\begin{aligned}
 (\cdot) Z_p(S; L; \Psi^3) &= \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{(i)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^k \chi_p^{(i)}(b)^{s_i} \sum_{x \in L \cap V-S} \widehat{\Psi \circ \pi^*}(x^{\epsilon_b}) db \\
 &+ \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{(i)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^k \chi_p^{(i)}(b)^{s_i} \cdot \chi_p^{(a)}(b)^{-\alpha} \cdot v(L^*) \sum_{y \in L^* \cap V-S} \widehat{\Psi \circ \pi^*}(y^{\epsilon_b^{-1}}) db
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore |Z_p(S; L; \Psi^3)| &\leq \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{(i)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^k \chi_p^{(i)}(b)^{\operatorname{Re}(s_i)} \sum_{x \in L \cap V-S} |\widehat{\Psi \circ \pi^*}(x^{\epsilon_b})| db \\
 &+ v(L^*) \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{(i)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^k \chi_p^{(i)}(b)^{\operatorname{Re}(s_i)} \cdot \chi_p^{(a)}(b)^{-\alpha} \sum_{y \in L^* \cap V-S} |\widehat{\Psi \circ \pi^*}(y^{\epsilon_b^{-1}})| db
 \end{aligned}$$

∴ 上では.

$$\begin{aligned}
 |Z_p(S; L; \Psi^3)| &\leq \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{(i)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_p^{(i)}(b)^{\operatorname{Re}(s_i)} \cdot \chi_p^{(a)}(b)^M \sum_{x \in L \cap V-S} |\widehat{\Psi \circ \pi^*}(x^{\epsilon_b})| db \\
 &+ v(L^*) \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{(i)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_p^{(i)}(b)^{\operatorname{Re}(s_{k-i})} \cdot \chi_p^{(a)}(b)^{n+M-\operatorname{Re}(s_1)-\dots-\operatorname{Re}(s_{k-1})} \sum_{y \in L^* \cap V-S} |\widehat{\Psi \circ \pi^*}(y^{\epsilon_b^{-1}})| db \\
 &\leq \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{(i)}(b) \geq 1}} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_p^{(i)}(b)^{\operatorname{Re}(s_i)} \cdot \chi_p^{(a)}(b)^M \sum_{x \in L \cap V-S} |\widehat{\Psi \circ \pi^*}(x^{\epsilon_b})| db \\
 &+ v(L^*) \int_{\substack{B_p/B_p(\mathbb{Z}) \\ \chi_p^{(i)}(b) \leq 1}} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_p^{(i)}(b)^{\operatorname{Re}(s_{k-i})} \cdot \chi_p^{(a)}(b)^{n+M-\operatorname{Re}(s_1)-\dots-\operatorname{Re}(s_{k-1})} \sum_{y \in L^* \cap V-S} |\widehat{\Psi \circ \pi^*}(y^{\epsilon_b^{-1}})| db.
 \end{aligned}$$

∴ $\Psi_1, \Psi_2 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ 且 $\Psi_1 \circ \pi(x) \geq |\widehat{\Psi_1 \circ \pi^*}(x)|, \Psi_2 \circ \pi(x) \geq |\widehat{\Psi_2 \circ \pi^*}(x)|$
 $(\forall x \in V)$ なるようにとれる (Weil [12] lemma 5.)。よって、補題は成立。
//

§5-3 : 函数等式 (2) の証明.

§5-3-1 巡回置換に対する不変性

$f \in \mathcal{S}(\overline{V_0})$ を補題 9 の (2) の条件 a), b) を満足するようにとり、
 9 時、補題 11 によつて、

$$Z_p(S; L; |H|^m f^p) = C_p \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{O}_K)}} \|g\|^{2s_k} E_p((g^g)^{-1}; s_1, \dots, s_{k-1}) \sum_{\xi \in L \cap V_S} |H|^m f^p(H[\xi^g]) dg$$

が、 $\Re(s_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k$, $p_{k+1} = n-m$) で成立つ。

又、Poisson の和公式の形として、

$$(*)_1 \quad v(L^*)^{-1} \sum_{\xi \in L \cap V_S} |H|^m f^p(H[\xi^g]) = \|g\|^{-2u} \sum_{\xi \in L^* \cap V_S} f^p(H^*[\xi^g]) \quad (g \in GL(m; \mathbb{C}))$$

を得らぬ。

さて、 $E_p((g^g)^{-1}; s_1, \dots, s_{k-1})$ は、補題 7, 8 によつて、いま考へてい
 る Type の概均値ベクトル空間の Zeta 函数の主要な因子として得ら
 れる。詳しく言之ば、次のようにたす。

$\mathbb{P}_1 = (p_1, \dots, p_{k-1})$ は、 $k_p^{(k-1)}$ の rank $k-1$ の分割。 $G_{\mathbb{P}_1}^{(g)} = U((g^g)^{-1}) \times B_{\mathbb{P}_1}$
 $(g \in GL(m; \mathbb{C}))$, $V_1 = M(m, k_p^{(k-1)}; \mathbb{C})$, $S_1 = \{X \in V_1 \mid \text{rank } X \leq k_p^{(k-1)}\}$,
 $L_1 = M(m; k_p^{(k-1)}; \mathbb{O}_K)$ とおく。

$\overline{H}_1 = \{w \in M(k_p^{(k-1)}; \mathbb{C}) \mid \epsilon w = w \geq 0\}$, $\mathcal{H}_1 = \{w \in \overline{H}_1 \mid w \neq 0\}$ とお
 く。 $d\tilde{w}$, $d\tilde{w}^*$ は、分割 \mathbb{P}_1 に対して、p. 7, 8 と同様に定義される
 \mathcal{H}_1 上の $G_{\mathbb{P}_1}^{(g)}$ -相対不変測度。 $\pi_g: V_1 \rightarrow \overline{H}_1$, $\pi_g^*: V_1 \rightarrow \mathcal{H}_1$ は

$\pi_g(x) = ({}^t \bar{g} g)^{-1} [x]$, $\pi_g^*(x) = ({}^t \bar{g} g) [x]$ ($x \in V_1$) ($g \in GL(m; \mathbb{C})$) で定め
 る。

任意の $g \in GL(m; \mathbb{C})$ に対し、 $\psi \circ \pi_g^*|_S = 0$, $\widehat{\psi \circ \pi_g^*}|_S = 0$ とおき
 $\psi \in S(\bar{H}_1)$, $\psi \neq 0$ と一つとる。補題 9 によってこのように ψ は存在
 している。

$$e_{\mathbb{P}_1} = \pi^{-\frac{1}{2}} (p_1^2 + \dots + p_{k-1}^2 + k_{\mathbb{P}}^{(k-1)}), \left(\prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=1}^{p_i} T(j) \right)^{-1}, \sigma_0 = (1, 2, \dots, k)$$

と置く。このとき、補題 7.8, 及び、補題 1.54.

$$\begin{aligned} (*)_2. Z_{\mathbb{P}_1}^{(g)}(s_1, \dots, s_{k-1}; L_1; \|g\|^{-2k_{\mathbb{P}}^{(k-1)}}; \psi) \\ = \int_{\mathbb{B}_{\mathbb{P}_1}/\mathbb{B}_{\mathbb{P}_1}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{P}_1}^{(i)}(b_i)^{s_i} \sum_{x \in L_1 \cap V_1^{s_i}} \|g\|^{2k_{\mathbb{P}}^{(k-1)}} \psi \circ \pi_g(x^{b_i}) db_i \\ = e_{\mathbb{P}_1} \cdot \|g\|^{-2k_{\mathbb{P}}^{(k-1)}} \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \int_K (s_i + \dots + s_{k-1} - k_{\mathbb{P}_1}^{*(k-i-1)} - j) \\ \cdot \int_{H_1} \psi(gw) \prod_{i=1}^{k-1} |w[E_{\mathbb{P}_1}^{(i)}]|^{s_i} d\tilde{w} \cdot E_{\mathbb{P}}({}^t \bar{g} g^{-1}; s_1, \dots, s_{k-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*)_3. Z_{\mathbb{P}_1}^{*(g)}(s_1, \dots, s_{k-1}; L_1^*; \psi) \\ = \int_{\mathbb{B}_{\mathbb{P}_1}/\mathbb{B}_{\mathbb{P}_1}(\mathbb{Z})} \prod_{i=1}^{k-1} \chi_{\mathbb{P}_1}^{*(i)}(b_i)^{s_i} \sum_{y \in L_1^* \cap V_1^{s_i}} \psi \circ \pi_g^*(y^{b_i}) dy \\ = e_{\mathbb{P}_1} \cdot \left(\frac{|D|}{4}\right) \prod_{i=1}^{k-1} k_{\mathbb{P}_1}^{*(i)} s_i \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \int_K (s_i + \dots + s_{k-1} - k_{\mathbb{P}_1}^{(k-i-1)} - j) \\ \cdot \int_{H_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{k-1} |w[E_{\mathbb{P}_1}^{*(i)}]|^{s_i} d\tilde{w} \cdot E_{\mathbb{P}_0}^*({}^t \bar{g} g^{-1}; s_1, \dots, s_{k-1}). \end{aligned}$$

ただし、 D は虚二次体 K の判別式である。(*)₃ を導く際には、

$L^* = M(G_m, K_{\mathbb{P}}^{(2k-1)}, 2\mathcal{O}^{-1})$ (\mathcal{O} は K の整環差積) を利用することに注意しておく。

§5-1 の結果によって、(*)₂、(*)₃ に現れる関数は、すべて

$\{(s_1, \dots, s_{k-1}) \in \mathbb{C}^{k-1} \mid \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \ (i=1, \dots, k-2)\}$ 上の有理型関数と考へる。

補題 B $d_i > p_i + p_{i+1} \ (i=1, \dots, k-2)$, $M > \max\{p_{k-1} + p_k, d_1 + \dots + d_{k-2} + p_{k-1} + p_k - m\}$ とする正数 d_1, \dots, d_{k+2} , $M \in \mathbb{C}$ とする。

$$\Omega = \{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k \mid d_i > \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \ (i=1, \dots, k-2), M > \operatorname{Re}(s_{k-1}) > -M\}$$

とおく。積令

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}_{\mathbb{P}}(S; L: |H|^m f^{\rho}) &= C_{\mathbb{P}} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}}^{-1} \\ &\times \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathcal{O}_k)} \frac{\|g\|^{2s_k + 2k_{\mathbb{P}}^{(2k-1)}}}{Z_{\mathbb{P}}^{*(\rho)}(s_1, \dots, s_{k-1}; L_1: \|g\|^{-2k_{\mathbb{P}}^{(2k-1)}} \psi^{\rho})} \sum_{\mathfrak{f} \in L \cap \mathcal{O}^{-1} S} |H[\frac{g}{\mathfrak{f}}]|^m \frac{d\mathfrak{b}}{d\mathfrak{g}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{Z}_{\mathbb{P}}^*(S; L: |H|^m f^{\rho}) &= C_{\mathbb{P}} \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}}^{-1} \\ &\times \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathcal{O}_k)} \frac{\|g\|^{2s_k + 2k_{\mathbb{P}}^{(2k-1)}}}{Z_{\mathbb{P}}^{*(\rho)}(s_{k-2}, \dots, s_1, m-s_1, \dots, s_{k-1}; L^*: \psi^{\rho})} \\ &\times \sum_{\mathfrak{f} \in L \cap \mathcal{O}^{-1} S} |H[\frac{g}{\mathfrak{f}}]|^m \frac{d\mathfrak{b}}{d\mathfrak{g}} \end{aligned}$$

を考へると、こゝからは Ω 上の正則函数と表し、

$$\tilde{Z}_P(S; L: |H|^m f^p) = v(L^*) \tilde{Z}_P^*(S; L: |H|^m f^p)$$

なる関係式と書ける。

この補題の証明は後回しとし、まずこの等式の意味するところを考へてみる。

まず、 $\Omega_1 = \{(s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k \mid \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \ (i=1, \dots, k)\}$ 上で、

(*)₂ と補題 11 a) によつて、

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \int_K (s_i + \dots + s_{k-1} - k_{P_i}^{*(k-i-1)} - j) \int_{H_1} \Psi^S(w) \prod_{i=1}^{k-1} |w|^{E_{P_i}^{(i)} S_i} dw \\ &\quad \times Z_P(S; L: |H|^m f^p) \end{aligned}$$

一方、(*)₃ によれば、

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_P^*(S; L: |H|^m f^p) &= \left(\frac{4}{|D|} \right)^{\sum_{i=1}^{k-1} k_{P_i}^{(i)} S_i - m \cdot k_P^{(k-1)}} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \int_K (-s_{k-i} - \dots - s_{k-1} + k_{P_i}^{*(i+1)} - j) \int_{H_1} \Psi(w) \prod_{i=1}^{k-2} |w|^{E_{P_i}^{(i)} S_{k-i-1}} \\ &\quad \cdot |w|^{m-S_1-\dots-S_{k-1}} dw \\ &\quad \times C_P \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{R}_k)} |gH|^{2(S_{k-1}+S_k-p_k)} E_{P_{P_0}}(m-S_1-\dots-S_{k-1}, S_1, \dots, S_{k-2}) \\ &\quad \times \sum_{\{ \in L \cap V^S \}} |H|^m f^p (H[\frac{c}{d}]) \frac{dg}{db} \end{aligned}$$

ただし、こゝで補題 10 を考慮に入れた。

従って、再度補題11の(i)によつて

$$\Omega_2 = \left\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k \left| \begin{array}{l} \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \quad (i=1, \dots, k-2) \\ m - \operatorname{Re}(s_1) - \dots - \operatorname{Re}(s_{k-1}) > p_k + p_1 \\ \operatorname{Re}(s_{k-1}) + \operatorname{Re}(s_k) > p_{k-1} + p_k + n - m \end{array} \right. \right\}$$

上にて

$$\tilde{Z}_P^*(S; L; |H| f^p) = \left(\frac{4}{|D|} \right) \prod_{i=1}^{k-1} k_{p_i}^{(a_i-1)} s_i^{-m} k_{p_i}^{(a_i-1)} \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} s_k^{-s_{k-i} - \dots - s_{k-1} + k_{p_i}^{*(a_i)} - j}$$

$$\times \int_{\mathcal{R}_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{k-2} |w|^{s_{k-i-1}} \cdot |w|^{m-s_1 - \dots - s_{k-1}} d^*w$$

$$\times Z_{P^0}(m-s_1 - \dots - s_{k-1}, s_1, \dots, s_{k-2}, s_{k-1} + s_k - p_k; L; |H| f^p)$$

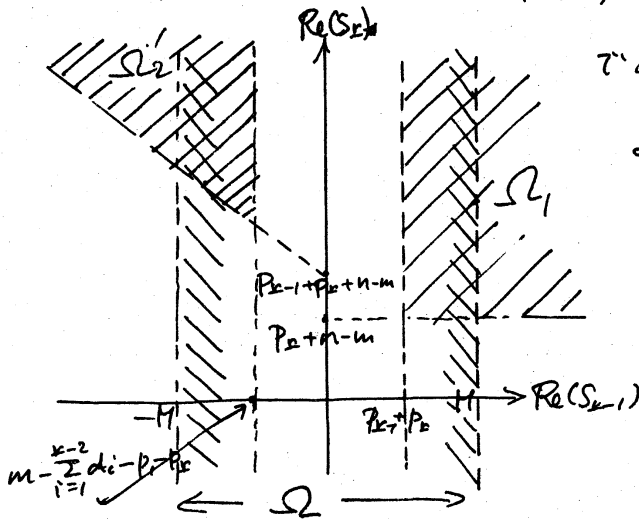
である。

ここで $d_i > \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k-2$) に對し $P \in \mathcal{C}$ である。

$$\Omega'_2 = \left\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k \left| \begin{array}{l} d_i > \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \quad (i=1, \dots, k-2) \\ m - \sum_{i=1}^{k-2} d_i - p_i - p_k > \operatorname{Re}(s_{k-1}) \\ \operatorname{Re}(s_{k-1}) + \operatorname{Re}(s_k) > p_{k-1} + p_k + n - m \end{array} \right. \right\}$$

とあるが $\Omega'_2 \subset \Omega_2$ 。M のと η 矢に注意すると、 $\Omega, \Omega_1, \Omega'_2$ の

間に、下図のよりの交わりが存在する。($d_i > \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1}$ ($i=1, \dots, k-2$)



である。

よつて、 $\tilde{Z}_P^*(S; L; |H| f^p)$ (従

つて、 $Z_P(S; L; |H| f^p)$) は、

$\Omega \cup \Omega_1 \cup \Omega_2$ の convex

tube である。

$$\left\{ (s_1, \dots, s_k) \in \mathbb{C}^k \left| \begin{array}{l} \operatorname{Re}(s_i) > p_i + p_{i+1} \\ i=1, \dots, k-2 \end{array} \right. \right\}$$

上の有理型函数へ解析接続される。

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 \longmapsto m - S_1 - \dots - S_{k-1} \\ S_2 \longmapsto S_1 \\ \dots \\ S_{k-1} \longmapsto S_{k-2} \\ S_k \longmapsto S_{k-1} + S_k - p_k \end{array} \right.$$

という変換を (H) によって、 Z_1, \dots, Z_k についての変換に書き換える

と、これは、 $\sigma_0 = (1, 2, \dots, k; k, 1, \dots, k-1)$ に対し、

$$\{ Z_i \mapsto Z_{\sigma_0(i)}, p_i \mapsto p_{\sigma_0(i)} \mid i=1, \dots, k \}$$

という変換を行っていいことに注意。つまり、補題13は、 $Z_p(Z; L; |H|f^p)$

と $Z_{p\sigma_0}(Z_{\sigma_0(1)}, \dots, Z_{\sigma_0(k)}; L; |H|f^p)$ の間に成立する函数等式を写している。

次に、この函数等式を見やすい型に整理してみよう。

命題1と補題1を考慮して書きかえよ。

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{k-1} k_P^{(i)} S_i \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \Gamma(S_i + \dots + S_{k-1} - k_P^{*(k-i)} - j) \\ & \quad \times \int_{\mathcal{K}_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{k-2} |w [E_{P_i}^{*(i)}]|^{S_{k-i-1}} |w|^{m-S_1-\dots-S_{k-1}} \widetilde{dw}^* \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} k_P^{(i)} S_i - m k_P^{(k-1)} \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_{\sigma_0(i)}-1} \Gamma(-S_{k-i} - \dots - S_{k-1} - k_P^{(i+1)} - j) \\ & \quad \times \int_{\mathcal{K}_1} \psi^{\sigma_0}(w) \prod_{i=1}^{k-1} |w [E_{P_i}^{(i)}]|^{S_i} \widetilde{dw} \end{aligned}$$

又、 $v(L_1^*) = \left(\frac{2}{\sqrt{D}}\right)^{m k_P^{(k-1)}}$ である。

これを利用して、変形すれば、補題13の示すところから、

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \eta_k(z_x - z_i + \frac{p_i + p_x}{2} - j) \cdot Z_P(z_1, \dots, z_x; L; |H|^m f^p) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \eta_k(z_i - z_x + \frac{p_i + p_x}{2} - j) Z_{P^{\sigma_0}}(z_{\sigma_0(1)}, \dots, z_{\sigma_0(k)}; L; |H|^m f^p) \end{aligned}$$

である。補題 8 と命題 2 と合わせれば、

$$\begin{aligned} & \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \eta_k(z_x - z_i + \frac{p_i + p_x}{2} - j) \zeta_P(L; z_1, \dots, z_x) \\ &= \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \eta_k(z_i - z_x + \frac{p_i + p_x}{2} - j) \zeta_{P^{\sigma_0}}(L; z_{\sigma_0(1)}, \dots, z_{\sigma_0(k)}) \end{aligned}$$

が得られる。すなわち、巡回置換 $\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & k \\ k & 1 & \dots & k-1 \end{pmatrix}$ に対する函数等式である。

又、この函数等式によつて、 $\zeta_P(L; z_1, \dots, z_x)$ の \mathbb{C}^k 上の有理型函数への解析接続が得られる。実際、今説明したように、 $\zeta_P(L; z_1, \dots, z_x)$ は、変数 z_{x-1}, z_x について全平面に解析接続される。右辺と比べれば、 z_{x-2}, z_{x-1} について全平面に解析接続されている。よつて、この函数等式で、 $\zeta_P(L; z_1, \dots, z_x)$ を z_{x-2} について全平面で定義できる。以下、 σ_0^i ($i=1, 2, \dots$) に対応する函数等式を利用して、 ζ_P の \mathbb{C}^k 上の解析接続を得る。

(補題 13 の証明)

積 $\tilde{Z}_P(S; L; |H|^m f^p)$ が Ω 上で絶対収束することはいふまでもない。このとき、函数等式は、 $Z_P^{(p)}$ の §5-1 で論じた函数等式から直ちに従う。

$f^p \geq 0$ と仮定してよい。以下、絶対値を考へるから、 $S_i \in \mathbb{R}$ 。

補題 12 による。

$$\begin{aligned}
 & \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_k)} \frac{2(S_k + k_P^{(\alpha-1)})}{\|g\|} |Z_{P_1}^{(g)}(S_1, \dots, S_{k-1}; L_1; \|g\| \psi^g)|^{-2k_P^{(\alpha-1)}} \sum_{\zeta \in L \cap V-S} |H|^{m_P} f^P(H[\zeta^g]) dg \\
 & \leq \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_k)} \frac{2S_k}{\|g\|} Z_{P_1}^{(g)}(S_1, \dots, S_{k-2}, M; L_1; \psi_1) \sum_{\zeta \in L \cap V-S} |H|^{m_P} f^P(H[\zeta^g]) dg \\
 & + \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_k)} \frac{2S_k}{\|g\|} Z_{P_1}^{*(g)}(S_{k-2}, \dots, S_1, M+M-S_1, \dots, S_{k-2}; L_1^*; \psi_2) \sum_{\zeta \in L \cap V-S} |H|^{m_P} f^P(H[\zeta^g]) dg \\
 & = \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_k)} \frac{2S_k}{\|g\|} Z_{P_1}^{(g)}(S_1, \dots, S_{k-2}, M; L_1; \psi_1) \sum_{\zeta \in L \cap V-S} |H|^{m_P} f^P(H[\zeta^g]) dg \\
 & + \nu(L_1^*) \nu(L^*) \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_k)} \frac{2S_k + 2k_P^{(\alpha-1)} - 2m}{\|g\|} Z_{P_1}^{*(g)}(S_{k-2}, \dots, S_1, M+M-S_1, \dots, S_{k-2}; L_1^*; \psi_2) \\
 & \quad \times \sum_{\eta \in L^* \cap V-S} f(H[\eta^g]) dg.
 \end{aligned}$$

Ω 上では、 $M+m-S_1, \dots, S_{k-2} > M+m-d_1, \dots, d_{k-2} > p_1 + p_k$ とおける。

とに注意する。★-の積分について考えると、(★)₂ より、

$$\begin{aligned}
 \text{積分} & = E_{P_1} \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \int_K (S_i + \dots + S_{k-2} + M - k_P^{*(\alpha-i-1)} - j) \cdot \int_{\mathcal{H}_1} \psi_1(w) \prod_{i=1}^{k-2} |w[E_{P_1}^{(w)}]|^{S_i} |w|^{M-\sim} \\
 & \times \int_{GL(m; \mathbb{C}) / GL(m; \mathbb{Q}_k)} \frac{2S_k}{\|g\|} E_{P_1}(\psi^g)^{-1}(S_1, \dots, S_{k-2}, M) \sum_{\zeta \in L \cap V-S} |H|^{m_P} f^P(H[\zeta^g]) dg \\
 & = E_{P_1} \prod_{i=1}^{k-1} \prod_{j=0}^{p_i-1} \int_K (S_i + \dots + S_{k-2} + M - k_P^{*(\alpha-i-1)} - j) \int_{\mathcal{H}_1} \psi_1(w) \prod_{i=1}^{k-2} |w[E_{P_1}^{(w)}]|^{S_i} |w|^{M-\sim}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \left\{ \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{O}_k)}} \frac{\|g\|^{2s_k + \frac{p_1 + p_2}{2} - 2s_k}}{\|g\|^{2s_k + M + s_{k-2} + \dots + s_1 - \eta}} E_{\mathbb{R}}^{*(\mathbb{C}^{\eta})^{-1}}(s_1, \dots, s_{k-2}, M) \sum_{\gamma \in L \cap V^{-S}} |H|^{mf} (H[\gamma, \gamma]) dg \right. \\
 & \quad \|g\| \geq 1. \\
 & \left. + \mathfrak{z}(L^*) \cdot \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{O}_k)}} \frac{\|g\|^{2(s_k + M + s_{k-2} + \dots + s_1 - \eta)}}{\|g\|^{2s_k + M + s_{k-2} + \dots + s_1}} E_{\mathbb{R}}^{*(\mathbb{C}^{\eta})^{-1}}(M, s_{k-2}, \dots, s_1) \sum_{\gamma \in L \cap V^{-S}} f(H[\gamma, \gamma]) dg \right\} \\
 & \quad \|g\| \leq 1
 \end{aligned}$$

補題11のRemarkによつて、この場合も収束する。

才2の場合についても、全く同様であるから省略する。 //

§5-3-2. 互換に対する不変性.

巡回置換に対する函数等式を考慮すれば、 $\sigma = (1, 2)$ について証明すれば十分である。 $\sigma = (1, 2)$ について、 $z_1 \rightarrow z_2, z_2 \rightarrow z_1, p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_1$ なる変換を S_i の変換に書きかへしてみる。

$$\begin{cases}
 S_1 \rightarrow t_1 = -S_1 + (p_1 + p_2) \\
 S_2 \rightarrow t_2 = S_1 + S_2 - p_2 \\
 S_i \rightarrow t_i = S_i \quad (i=3, \dots, k)
 \end{cases}$$

命題2により、

$$Z_{\mathbb{R}}(t_1, \dots, t_k; L^*; |H|^{mf}) = \prod_{j=0}^{p_1-1} \frac{\gamma_k(z_2 - z_1 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)}{\gamma_k(z_1 - z_2 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)} Z_{\mathbb{R}}(s_1, \dots, s_k; L^*; |H|^{mf})$$

を証明すればよい。

ν に因する帰納法で証明する。 $\nu = 2$ の時は、 $\nu = 0$ 、すなわち、
 §5-3-1 で求めた巡回置換についての函数等式に化せらる。

以下、 $\nu \geq 3$ とする。

補題 9 の (2) の条件 a), b) を満足する $f \in S(\overline{D_0})$ について、

$$\begin{aligned} & Z_{P_0}^* (t_{x-1}, \dots, t_1, n-t_1, \dots, -t_x; L^*; f) \\ &= \int_{\substack{GL(n; \mathbb{C}) \\ GL(n; \mathbb{Q}_x)}} \|g\|^{-2(n-t_1-\dots-t_x)} E_{P_0}^* (c_0 g^{-1}; t_{x-1}, \dots, t_1) \sum_{\substack{\mathfrak{H} \in L^* \cap \mathcal{V}^S}} f(\mathfrak{H}^{-1} [c_0^{-1}]) dg \end{aligned}$$

§5-3-1 と、同様の条件の下で、

$$\int_{\substack{GL(n; \mathbb{C}) \\ GL(n; \mathbb{Q}_x)}} \|g\|^{-2(n-t_1-\dots-t_x)} Z_{P_2}^*(g) (t_{x-1}, \dots, t_1; L^*; \psi) \sum_{\substack{\mathfrak{H} \in L^* \cap \mathcal{V}^S}} f(\mathfrak{H}^{-1} [c_0^{-1}]) dg$$

$$P_2 = (p_1, p_3, \dots, p_x)$$

と等しい。補題 13 と同じ論法で、

$$\tilde{\Omega} = \left\{ (t_1, \dots, t_x) \in \mathbb{C}^x \mid \begin{array}{l} M > t_1 > -M \\ d_2 > t_2 > p_1 + p_3 \\ d_3 > t_3 > p_3 + p_4 \\ \vdots \\ d_{x-1} > t_{x-1} > p_{x-1} + p_x \end{array} \right\}$$

M, d_2, \dots, d_{x-1} は十分大なる正数。 $(M$ は d_i に依存する。)

この領域上で意味を持ち、正則函数と表わす。

そこで、

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}(t_1, \dots, t_{x-1}) &= \varepsilon_{P_2} \left(\frac{D}{4} \right)^{\sum_{i=1}^{x-1} k_{P_2}^{*(i)}} t_{x-i}^{-\sum_{j=0}^{x-1} \frac{p_{0x-i}-1}{\prod_{k=1}^j (t_{x-i} + \dots + t_1 - k_{P_2} - j)}} \\ &\times \int_{\mathfrak{H}_1} \psi(w) \prod_{i=1}^{x-1} |w[E_{P_2}^{*(i)}]|^{s_i} \tilde{\omega} dw^* \end{aligned}$$

とおけば、 $(*)_3$ より、

$$\text{積令} = \tilde{\Psi}(t_1, \dots, t_{k-1}) \cdot Z_{\mathbb{P}^0}(t_{k-1}, \dots, t_1, n-t_1, \dots, t_k : L^* : f)$$

→ Poissonの公式と補題10より、

$$\text{積令} = v(L^*)^{-1} \cdot \tilde{\Psi}(t_1, \dots, t_{k-1})$$

$$\times \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \|g\|^{2t_k} E_{\mathbb{P}^0}(\tilde{\mathcal{E}}_k^{-1}; t_1, \dots, t_{k-1}) \sum_{\{L^* \cap T-S\}} |H|^m f^p(H \{z_j\}) dg$$

解法1の仮定により、

$$E_{\mathbb{P}^0}(\tilde{\mathcal{E}}_k^{-1}; t_1, \dots, t_{k-1}) = \prod_{j=0}^{p_1-1} \frac{\gamma_k(z_2 - z_1 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)}{\gamma_k(z_1 - z_2 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)} E_{\mathbb{P}}(\tilde{\mathcal{E}}_k^{-1}; s_1, \dots, s_{k-1})$$

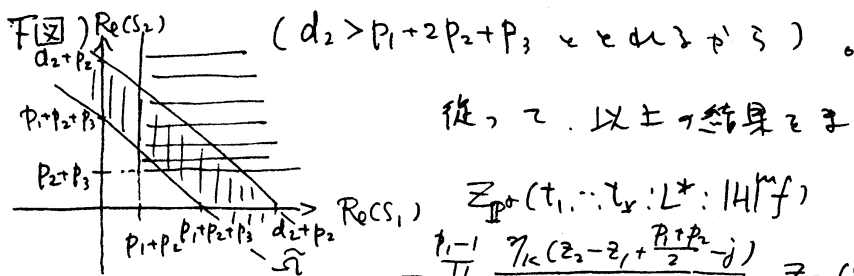
だから、ここで、

$$v(L^*)^{-1} \cdot \tilde{\Psi}(t_1, \dots, t_{k-1}) \cdot \prod_{j=0}^{p_1-1} \frac{\gamma_k(z_2 - z_1 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)}{\gamma_k(z_1 - z_2 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)} \times \int_{\substack{GL(m; \mathbb{C}) \\ GL(m; \mathbb{Q}_k)}} \|g\|^{2s_k} E_{\mathbb{P}}(\tilde{\mathcal{E}}_k^{-1}; s_1, \dots, s_{k-1}) \sum_{\{L^* \cap T-S\}} |H|^m f^p(H \{z_j\}) dg$$

従って、 $\{p_0 \leq p_i + p_{i+1} \ (i=1, \dots, k)\}$ 上では、この積令は収束し、

$$\text{積令} = v(L^*)^{-1} \tilde{\Psi}(t_1, \dots, t_{k-1}) \cdot \prod_{j=0}^{p_1-1} \frac{\gamma_k(z_2 - z_1 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)}{\gamma_k(z_1 - z_2 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)} \cdot Z_{\mathbb{P}}(s_1, \dots, s_k : L^* : |H|^m f^p)$$

よって、 $\tilde{\Omega}$ と $\{p_0 \leq p_i + p_{i+1} \ (i=1, \dots, k)\}$ 上では、共通部分を持つ (cf



従って、以上の結果をまとめると、

$$Z_{\mathbb{P}^0}(t_1, \dots, t_k : L^* : |H|^m f) = \prod_{j=0}^{p_1-1} \frac{\gamma_k(z_2 - z_1 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)}{\gamma_k(z_1 - z_2 + \frac{p_1+p_2}{2} - j)} Z_{\mathbb{P}}(s_1, \dots, s_k : L^* : |H|^m f)$$

ここで、 ξ_p に関する函数等式は完全に証明された。 ξ_p^* については、函数等式(1)を利用して、この等式を書き直せばよい。

<参考文献>

- [1] I.M. Bernstein & S.I. Gel'fand, Meromorphy of the function P^* , *Funct. Anal. & Its Appl.* 3. 1. (1969) 84-86.
- [2] A. Borel, Introduction to automorphic forms, *Proc. Symp. Pure Math.* 18 A.M.S. Providence (1966) 199-210
- [3] S. Helgason, Differential geometry and Symmetric spaces, New York, Academic Press (1962)
- [4] 根原-三輪, Micro local calculus と 概均値ベクトル空間の相対不変式の Fourier 変換, *数理解析論* 238 (1975) 60-147.
- [5] 宮正和, Prehomogeneous vector space の相対不変式の Fourier 変換について, *数理解析論* "代数学の諸問題" (1975)
- [6] H. Maass, Siegel's Modular forms and Dirichlet series, *Lect. note in Math.*, vol 216, Springer, (1971)
- [7] 佐藤-新谷, 概均値ベクトル空間の理論, *数学の歩み* 15-1
- [8] M. Sato and T. Shintani, Zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces, *Ann. of Math.* (1974) 100 131-170

- [9]. C.L. Siegel, *Lectures on quadratic forms*, Tata (1957)
- [10] A. Terras, A generalization of Epstein's Zeta function
Nagoya Math. Jour. (42) (1971) 173-188
- [11] A. Terras, Functional equations of generalized Epstein
Zeta functions in several complex variables, *Nagoya
Math. Jour.* (44) (1971), 89-95.
- [12] A. Weil, Sur certains groupes d'opérateurs unitaires,
Acta Math. 111 (1964) 143-211.