数理解析研究所講究録
第 261 巻 1976 年 46-54

雑音を含んだある放物型方程式について

九大 工学部 渡辺寿夫

雑音のある力学系の問題が工学上の問題に関連があるとして、主として工学者によって考察されている。現実の系は本来雑音が入っているはずであり、それ等を観測して得たデーターも雑音を含むはずであるという理論上の要請より考察されている。これ等のうちで Kalman-Bucy による filtering の問題がある。この問題は工学者によって種々の方向に形式的に拡張され複雑な系となっている。力学系が偏微分方程式で記述されるとき、それは雑音を含んだ方程式となり、それらをどう理解するかは一つの問題であろう。(これ等に関連する文献については綜合報告 Curtain [1] を参照)。

この小論において、放物型方程式に関する最近の論文 [2], [3] に関連した問題に筆者に

よる若干の考察を加えた結果を述べる。

Balakrishnan [2] は次の方程式を扱っている。

$$
(B)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = Lu(t,x) + \alpha(t,x,\omega)u(t,x) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (t \geq 0,\ x \in I) \\ u\big|_{t=0} = g(x) \qquad\qquad\quad x \in I. \end{cases}
$$

ここで L は楕円型作用素で適当な境界条件をみたすとする。I は R^1 の部分区間とする。

Marcus [3] は次の非線型の方程式を取り扱っている。

$$
(M)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x) = Lu(t,x) + f(u) + \alpha(t,x,\omega) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (0<t,\ x \in I), \\ u\big|_{t=0} = g(x) \end{cases}
$$

以上で現われる関数 g, f 等は必要な滑らかさを仮定する。$\alpha(t,x,\omega)$ は 2 変数（R^n のときは $n+1$ 変数）の white noise で形式的に $\dfrac{\partial^2 W}{\partial t \partial x} = \alpha(t,x,\omega)$ とあらわされる。$W(t,x,\omega)$ は 2 次元 Wiener process で $E(W(t,x,\omega))=0$, $E(W(t_1,x_1,\omega)W(t_2,x_2,\omega)) = \min(t_1,t_2)\min(x_1,x_2)$ にしたがうものとする。そうすると (B), (M) は形式的意味しかもたず、適当な解釈をしなければならぬ。

以下主として (B) について考察する。Balakrishnan [2] は $\alpha(t,x,\omega)$ を $L^2[0,T]\times L^2[I]$ の元として考えている。ここでは $\alpha(t,x,\omega)$ をある確率空間 $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ の random element と考えてみる。

今，方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = L u. & t>0,\ x\in I, \\ B\, u(t,x) = 0. & t>0,\ x\in\partial I \end{cases}$$

の Green 関数を $U = U(t,x,y)$ とする.（B は適当な境界条件）(B) は形式的に次の積分方程式に変換される.

$$\text{(B)}' \quad \begin{aligned} u(t,x) &= \int_I U(t,x,y) g(y)\, dy \\ &+ \int_0^t \int_I U(t-s,x,y)\, u(s,y)\, d^2_{s,y} W(s,y) \end{aligned}$$

ここで，$d^2_{s,y} W(s,y,\omega)$ は $W(s,y,\omega)$ よりみちびかれる random measure をあらわす。(B)′ は確定した意味をもつから，(B)′を (B) の方程式と同等なものと考え，(B) は象徴的意味しかもたぬものと考える。しかしながら，(B) と (B)′ の相互関係はもっとくわしく，しらべる必要がある。

(B)$'$ の解の存在について考えよう。

$$u_0(t,x) = \int_I U(t,x,y)\, g(y)\, dy$$

とする。帰納的に、

$$u_{j+1}(t,x) = u_0(t,x) + \int_0^t \int_I U(t-s,x,y)\, u_j(s,y)\, d^2_{s,y} W(s,y,\omega)$$

と定義する。したがって、

$$u_{j+1}(t,x) - u_j(t,x) = \int_0^t \int_I U(t-s,x,y) \left(u_j(s,y) - u_{j-1}(s,y) \right) d^2_{s,y} W(s,y,\omega),$$

$$\int_I dx\, E\left(| u_{j+1}(t,x) - u_j(t,x) |^2 \right)$$

$$= \int_0^t ds \int_I dy \left(\int_I dx\, (U(t-s,x,y))^2\, E\left(| u_j(s,y) - u_{j-1}(s,y) |^2 \right) \right).$$

<u>假定 I.</u>　$x \in I$ に関して一様に、

$$\int_I (U(t,x,y))^2 dy \leqq C_1(t) < \infty$$

がなりたつ。$C_1(t)$ は t だけの関数。

假定 I の下で、

$$\int_I dx\, E\left(| u_{j+1}(t,x) - u_j(t,x) |^2 \right)$$

$$= E\left(\|u_{j+1}(t) - u_j(t)\|^2\right)$$

$$\leqq \int_0^t c_1(s)\, E\left(\|u_j(s) - u_{j-1}(s)\|^2\right) ds$$

をうる。逐次くり返して、

$$E\left(\|u_{j+1}(t) - u_j(t)\|^2\right) \leqq \sup_{0 \leqq s \leqq t} E\left(\|u_1(s) - u_0(s)\|^2\right) \times$$

$$\times \int_0^t c_1(t_1) dt_1 \int_0^{t_1} c_1(t_2)\, dt_2 \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{j-1}} c_1(t_j)\, dt_j .$$

をうる。一方、

$$|u_0(t,x)| \leqq \int_I U(t,x,y)\, |g(y)|\, dy \leqq \|g\|_\infty \int_I U(t,x,y)\, dy.$$

$$\int_I |u_0(t,x)|^2 dx \leqq \|g\|_\infty^2 \cdot \int_I dx \left(\int_I U(t,x,y)\, dy\right)^2$$

<u>仮定2</u>

$$\int_I dx \left(\int_I U(t,x,y)\, dy\right)^2 = c_2(t) < \infty$$

さらに、

$$\int_I E\left(|u_1(t,x)|^2\right) dx \leqq 2 \int_I |u_0(t,x)|^2 dx$$

$$+ 2 \int_I dx \int_0^t ds \int_I \left(U(t-s,x,y)\right)^2 |u_0(s,y)|^2 dy$$

$$\leqq 2\,\|g\|_\infty^2\, C_2(t) + 2\int_0^t C_1(s)\, C_2(s)\, ds\, \|g\|_\infty^2$$

仮定3

ある t_0 に対して $\int_0^{t_0} C_1(s)\, C_2(s)\, ds < \infty$. $A_n(t) = \int_0^t C_1(t_1)\, dt_1 \int_0^{t_1} C_1(t_2)\, dt_2 \int_0^{t_2} \cdots \int_0^{t_{n-1}} C_1(t_n)\, dt_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} A_n(t_0) < \infty$ であれば、

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_{0 \leqq s \leqq t_0} E\left(\| u_{j+1}(s) - u_j(s) \|^2 \right) < \infty$$

が得られるから、$\sup_{0 \leqq s \leqq t_0} E\left(\| u(s) \|^2 \right) < \infty$ なる $u(s, x)$ が存在して、$\lim_{j \to \infty} \sup_{0 \leqq t \leqq t_0} E\left(\| u_j(s) - u(s) \|^2 \right) = 0$ となる。

一意性については、u, v を $(B)'$ をみたす2つの解とすると、

$$E\left(\| u(t) - v(t) \|^2 \right) = \int_0^t ds \int_I dx \int_I \left(\sigma(t-s, x, y) \right)^2 E\left(| u(s,y) - v(s,y) |^2 \right) dy$$

$$\leqq \int_0^t C_1(s)\, E\left(\| u(s) - v(s) \|^2 \right) ds$$

$$\leqq A_n(t) \sup_{0 \leqq s \leqq t} E\left(\| u(s) - v(s) \|^2 \right).$$

$$\to 0 \quad (n \to \infty) \qquad (t = t_0)$$

より $u = v$ が得られる。かくして、

定理 1. $\|g\|_\infty < \infty$, 假定 1. 2. 3 の下で,

(B)′ において $\sup_{0\le t\le t_0} E(\|u(s)\|^2) < \infty$ なる局所解 $u(s,x)$

が存在して一意である。

ついで大域解についてしらべる。

假定 4

$$\int_0^\infty ds \int_I dx \, (\sigma(s,x,y))^2 \le A < 1$$

が $y \in I$ に関して一様に成り立つ。

假定 4 の下で

$$\sup_{0\le t<\infty} \int E(|u_{j+1}(t,x) - u_j(t,x)|^2)\,dx$$

$$\le A \sup_{0\le s<\infty} \int_I E(|u_j(s,y) - u_{j-1}(s,y)|^2)\,dy$$

であるから, $\sup_{0\le t<\infty} E(\|u(t)\|^2) < \infty$ なる解 $u(t,x)$

が存在する。

假定 1 〜 4 はあまり一般的でない。$\alpha(t,x,\omega)$

は非常に irregular と考えてよいから, その様な

α に対して解がないのが自然のような気がする。

Balakrishnan はなめらかな noise で近似するので解をもつのであろうと思う。

以上により解のある場合、構成法より、

$$u(t,x) = u_0(t,x) + \Phi u_0(t,x) + \cdots + \Phi^n u_0(t,x) + \cdots\cdots$$

と展開される。ここで

$$\Phi u_0(t,x) = \int_0^t \int_I U(t-s,\ x,y)\ u_0(s,y)\ d^2_{s,y}W(s,y)$$

である。Φ^n は n 重積分であらわされている。この意味が解をもつ場合、これ等の量は $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ 上で確定した意味をもつので確率変数となり、解の連続性等も考える事ができる。

附記1. 多次元パラメーターのブラウン運動については [4] を参照

文献

[1]. R. Curtain, A survey of infinite dimensional filtering, Siam Review. 17 (1975), 395–411.

[2]. R. V. Balakrishnan, Stochastic bilinear partial differential equations (manuscript)

[3]. R. Marcus. Parabolic Itô equations.
Trans. Amer. Math. Soc. 198 (1974),
177–190

[4]. R. Cairoli and J.B. Walsh
stochastic integrals in the plane
Acta Mathematica 134 (1975) 111 ~ 183.