数理解析研究所講究録
第262巻 1976年 1-15

等質空間上の確率場の表現について

島根大 文理　麻生泰弘

確率場(Random fields)の概念が，乱流の統計的解析にとって有効なことは，A.S. Monin & A.M. Yaglomの大著，Statistical Fluid Mechanics, MIT, 1971, 及び同, vol. 2, MIT, 1975で十分に説明されている。他方，またP. Lévyは，彼のProcessus Stochastiques et Mouvement Brownien, 2 ed., 1965の第8章及びComplément第3章において，多次元パラメータをもつブラウン運動について述べている。

さて，我々は，定常過程については，そのスペクトル表現と，確率論的な性質との関わりの深い理論をもっているが，これから述べる確率場については未だ不十分であると思われる。以下，一つの試みと関連した興味ある結果について述べる。

§1. 諸定義

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$を確率空間とし，$S=G/K$を等質空間とす

3. $f(s): \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ を可測関数として，$\{f(s); s\in S\}$ を等質空間 S 上の確率場と云おう。

$s_1, \dots, s_k \in S$ と $E_1, \dots, E_k \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して，

$$\Phi(s_1, \dots, s_k; E_1, \dots, E_k) := P\{f(s_1)\in E_1, \dots, f(s_k)\in E_k\}$$

定義1. 確率場 $f=\{f(s); s\in S\}$ が homogeneous であるとは，任意の $s_1, \dots, s_k \in S$ と $E_1, \dots, E_k \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ に対して

(1) $\Phi(gs_1, \dots, gs_k; E_1, \dots, E_k) = \Phi(s_1, \dots, s_k; E_1, \dots, E_k)$, for $\forall g \in G$

のときをいい，(1) が，任意の $g \in K$ について成立するとき，isotropic という。

上記の Yaglom-Monin では，$S=\mathbb{R}^d$ の場合について，関数 Φ が translation re s - 不変のとき，homogeneous であるといい，$O(d)$-不変のとき，isotropic であると定義してある。さらに，$L^2(\Omega)$ を P に関して2乗可積な関数のなすヒルベルト空間とし，その内積は，

(2) $(f, h) = \int f(\omega)\overline{h(\omega)}\,dP(\omega)$

で定義される。 次の定義で，$(f(s), 1)=0 \ (s\in S)$ とする。

定義2. $\forall s \in S$ について，$f(s)\in L^2(\Omega)$ とする。このとき， (3) $\Gamma(s,t) := (f(s), f(t))$, $s,t\in S$.

確率場 $\mathfrak{f} = \{\mathfrak{f}(s), s \in S\}$ が w-homogeneous (homogeneous in the wide sense) であるとは，任意の $g \in G$ と，任意の $s, t \in S$ について

(4) $\Gamma(gs, gt) = \Gamma(s, t)$

が成立するときをいう，(4) が任意の $g \in K$ について成立するとき，w-isotropic (isotropic in the wide sense) という。

以下，我々は，G を局所コンパクト群，K をその閉部分群とし，確率場 $\mathfrak{f}$ は，$\forall s \in S = G/K$ について $\mathfrak{f}(s) \in L^2(\Omega)$ で，$(\mathfrak{f}(s), 1) = 0$ $(\forall s \in S)$ をみたし，さらに，$s \to t$ in S のとき，$\mathfrak{f}(s) \to \mathfrak{f}(t)$ in $L^2(\Omega)$ とする．このとき，(3) で定義される核関数 Γ は，エルミート対称正値定符号核である。（注：上の，任意の $s \in S$ について，$(\mathfrak{f}(s), 1) = 0$ なる条件は，本質的ではない。） 従って，この核の固有関数展開を行うことにより，我々は，確率場 $\mathfrak{f}$ に関するある程度の解析を行うことが出来るが，ここでは触れない。

§2. w-homogeneous な確率場の表現と w-isotropic な確率場の表現

確率場 $\mathfrak{f} = \{\mathfrak{f}(s), s \in S\}$ によって生成されるヒルベル

ト空間をℋとする。すなわち，一次結合 $\sum_{i=1}^{n} c_i f(s_i)$ ，
$c_1,\dots,c_n$ は複素数，$s_1,\dots,s_n$ は S の点，たちのなす線形
集合を，内積 $(f(s), f(t))$ $(s,t\in S)$ により完備化した~~線~~
~~形~~空間をℋとし，可分であると仮定する。~~ℋ~~ $f(s)$ に
対する G の作用を

$$(4)\qquad T(g)f(s) = f(g^{-1}s)$$

で与える。このとき，$\{T(g),\mathcal{H}\}$ が，群 G の表現であることは見易い。さらに，$s_0=eK\in S$ とするとき，

$$T(k)f(s_0) = f(s_0)\ ,\quad \forall k\in K.$$

(イ) さて，確率場 f を w-homogeneous とするとき，任意の $g\in G$ と $s,t\in S$ とについて，

$$(T(g)f(s), T(g)f(t)) = (f(s), f(t))\text{。}$$

故に，このとき，表現 $\{T(g),\mathcal{H}\}$ は，ユニタリー表現であり，しかもクラス1の表現である（K に関して）。逆に，表現 $\{T(g),\mathcal{H}\}$ が，かゝる性質をもつとき，確率場 f は，w-homogeneous である。Gel'fand & Raikov によれば，

$$(6)\qquad T(g) = \int_X T_x(g)\,d\mu(x)$$

と，既約成分の連続和に分解される。このとき，

$$\Gamma(t,s) = (f(t), f(s)) = (T(g_1)f(s_0), T(g_2)f(s_0))$$
$$= (T(g_2^{-1}g_1)f(s_0), f(s_0)) =$$

$$= \int_X (T_x(g_2^{-1}g_1)\xi_x(s_0), \xi_x(s_0))\, d\mu(x) \quad ,$$
$$(\ t = g_1^{-1}s_0,\quad s = g_2^{-1}s_0\ ) \quad ,$$

すなわち，形式的に，　$s = g s_0$ とするとき，

(6′)　　$\xi(s) = \int_X T_x(g^{-1})\xi_x(s_0)\cdot d\mu(x)$

(7)　$\Gamma(t, s) = \int_X (T_x(g_2^{-1}g_1)\xi_x(s_0), \xi_x(s_0))\, d\mu(x)$ 。

このとき，関数 $\Gamma(t, s)$ は，$g_2^{-1}g_1$ のみに depend するので，改めて $s = g^{-1}s_0$ とするとき，$\Gamma(s, e) = \Gamma(g)$ とおいて $\Gamma(g)$ は，G/K 上の K－左不変な関数であり，正値定符号。

Y. Asoo は，上記 X として elementary positive definite fu. の集合をとり，A. M. Yaglom は，G が separable な局所コンパクト，Type I gr. の場合について，X として G の dual をとり，(6′)，(7) の coordinate 表示を与えている。（Y. Asoo (1975)，A. M. Yaglom (1963)）。

我々の問題は，① 如何なる形の連続和分解をとるか．

② 上記の表現 (6′)，(7) において $\xi(s)$，あるいは，$\Gamma(t, s)$ より測度 μ を定めること（形式的 inversion formula），

等が考えられるが，群 G の表現 $\{T(g), \mathfrak{H}\}$ の数々の分類や標準的な性質をしらべることが必要か。

(ロ)　確率場 ξ が w. isotropic のときは，もはや $\{T(g), \mathfrak{H}\}$

は、Gのユニタリー表現ではないが、Kに関しては、ユニタリーであり、さらにクラスIである。逆に、表現$\{T(g), g \in G\}$が、この性質をもつとき、確率場ξは、w-isotropicである。従って、w-isotropicな確率場については、Gを局所コンパクト群、Kをその閉部分群として、Kに関してクラスIであるGの表現を扱うこととなる。このような、w-isotropicな確率場の興味深い例を、R. Gangolli (1967) に従って、次に述べる。

§3. R. Gangolli による、P. Lévy の多次元パラメータブラウン運動の存在定理

P. Lévy は、(a) 任意の $a \in \mathbb{R}^d$ に対して、
$(\xi(a), 1) = 0$、かつ、任意の $a, b \in \mathbb{R}^d$ に対して

$$(8) \quad (\xi(a), \xi(b)) = \frac{1}{2}(|a| + |b| - |a-b|)$$

をみたすガウス過程 $\{\xi(a), a \in \mathbb{R}^d\}$ (これを le mouvement brownien à plusieurs paramètres と呼ぶ)、および (b) 任意の $a \in S^d$ に対して、$(\xi(a), 1) = 0$、かつ任意の $a, b \in S^d$ に対して

$$(9) \quad (\xi(a), \xi(b)) = \frac{1}{2}(d(a,o) + d(b,o) - d(a,b))$$

をみたすガウス過程 $\{\xi(a), a \in S^d\}$ (これを la fonction brownien sur la sphère S^d と呼ぶ)を考察している

。(8)および(9)は，それぞれ，R^d ~~および~~ $= M(d)/SO(d)$ および $S^d = SO(d+1)/SO(d)$ 上の正値定符号核であり，$SO(d)$-不変である。すなわち，我々の定義2にいう w-isotropic な実確率場の例である。ブラウン運動は，確率論的に重要な概念であるとともに，解析学的にも興味深い性質を数々もっているが，これらについては，例えば，飛田"ブラウン運動"をみてもらうことにして，ここでは，その存在に関するR. Gangolli の結果についてのみ述べる。Gを第二可算公理をみたす局所コンパクト群，Kをその閉部分群とする。また$S=G/K$は，等質空間である。さて，確率場$\{\xi(s), s\in S\}$は実数値をとるものとするとき，これがS上のガウス場であるとは，任意の実数$\theta_1, \ldots, \theta_n$と$s_1, \ldots, s_n \in S$に対して，

$$(10)\quad \langle \exp\{i\sum_{i=1}^{n}\theta_i \xi(s_i)\}, 1\rangle = \exp\{i\sum_{i=1}^{n}\theta_i m(s_i) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\theta_i\theta_j \Gamma(s_i, s_j)\}$$

をみたすS上の(実)関数$m(s)$と，正値定符号核$\Gamma(t,s)$ $(t,s\in S)$が存在することをいう。このとき，必要ならば，$\xi(s)-m(s)$ $(\forall s\in S)$を考えることにより，$m(s)\equiv 0$ $(\forall s\in S)$としてよい。以下，$m(s)=\langle\xi(s),1\rangle\equiv 0$とする。すると，$\langle\xi(s),\xi(t)\rangle = \Gamma(s,t)$となる。

定義3：S上の核$\Gamma(s,t)$が，Lévy-Schönberg核

（以下，略してL-S核という）であるとは，次の諸条件をみたすときをいう；

(i) $\Gamma(s,t) = \Gamma(t,s) \quad (s,t \in S)$

(ii) $\Gamma(s,s_0) = 0 \quad (s_0 = eK)$, $\forall s \in S$

(iii) $\forall g \in G$ に対して，

$$\Gamma(gs,gs) + \Gamma(gt,gt) - 2\Gamma(gs,gt) = \Gamma(s,s) + \Gamma(t,t) - 2\Gamma(s,t), \quad s,t \in S$$

(iv) $\Gamma(s,t)$: positive definite.

定義4：$\Gamma(s,t)$を，S上のL-S核とするとき，S上のガウス場$\{f(s), s \in S\}$が，S上のブラウン運動であるとは，任意の$s,t \in S$に対して，

$$(11) \quad (f(s), f(t)) = \Gamma(s,t)$$

がみたされるときをいう。

いま，$K(s,t) = \Gamma(s,s) + \Gamma(t,t) - 2\Gamma(s,t)$ とおくと，Γ がL-S核のとき，$K(s,s_0) = \Gamma(s,s)$，$K(t,s_0) = \Gamma(t,t)$ より，

$$2\Gamma(s,t) = K(s,s_0) + K(t,s_0) - K(s,t).$$

このとき，任意の$k \in K$に対して，

$$2(f(ks), f(kt)) = 2\Gamma(ks,kt) = 2\Gamma(s,t) = 2(f(s),f(t))$$

従って，S上のブラウン運動は，w-isotropicな（実）確率場である。（注：実は，isotropicな確率場である）

問題：等質空間 $S=G/K$ 上の L-S 核を決定せよ。

Gangolliは，（イ）G：連結局所コンパクト・アーベル群，K：Gの任意の閉部分群，（ロ）$G=M(d)$, $K=SO(d)$（ハ）G：連結コンパクト・半単純リー群，K：$S=G/K$ がコンパクトな対称空間となるGの任意の閉部分群，（ニ）G：中心がfiniteであるnoncompact，連結半単純リー群，K：Gの極大コンパクト部分群の場合について，この問題を解いた。

Lemma；等質空間 $S=G/K$ 上の，$\Gamma(s_0, s_0)=0$ $(s_0=eK)$ なる対称核が L-S 核であるための必要十分条件は，

（a）任意の $g\in G$ に対して，$K(gs,gt)=K(s,t)$,

（b）任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$\Theta_\varepsilon(s,t) := \exp\{-\varepsilon K(s,t)\} \quad \text{positive def.}$$

をみたすことである。

このとき，任意の $k_1, k_2\in K$ に対して，

$$\Theta_\varepsilon(k_1 g k_2 s_0, s_0) = \exp\{-\varepsilon K(k_1 g k_2 s_0, s_0)\}$$
$$= \exp\{-\varepsilon K(gs_0, s_0)\} = \Theta_\varepsilon(gs_0, s_0)$$

$$\Theta_\varepsilon(e\cdot s_0, s_0)=1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0}\Theta_\varepsilon(g\cdot s_0, s_0)=1 \quad (g\in G)$$

すなわち, $\Theta_\varepsilon(gs_0, s_0)$ は, normalized zonal spherical fn. である。また, 群G上の関数族 $h_\varepsilon(g)$ $(\varepsilon \geqq 0)$ が imbeddable であるとは, $\forall \varepsilon$ に対して h_ε が pos. def. であり, $\lim_{\varepsilon \to 0} h_\varepsilon = 1$ をみたすときをいう。さらに, G上の関数 h が無限分解可能であるとは, h が pos. def. であり, $\forall n \in \mathbb{N}$ に対して, $h(g) = h_n(g)^n$ なる pos. def. な関数 h_n が存在するときをいう。

以下, $\mathcal{K} = \mathcal{K}(G)$ を, G上の複素数値, 連続, normalized zonal spherical, 無限分解可能な関数の class とする。

(イ) G: 連結局所コンパクト・アーベル群

K: Gの任意の閉部分群 の場合

定理: G上の関数 θ に対して, $\theta^*(gK) = \theta(g)$ により, S上の関数 $\theta^*(s)$ $(s = gK)$ を定義するとき, $\theta \in \mathcal{K}$ で実数値をとるための条件は, θ^* が

(12) $\theta^*(s) = \exp\{-[\varphi(s) + \int_{\hat{S}\setminus\{e\}} (1 - \chi(s))\, d\mu(\chi)]\}$,

と表現されることである。ここに, φ は,

(13) $\frac{1}{2}(\varphi(s+t) - \varphi(s-t)) = \varphi(s) + \varphi(t)$

の連続な, nonnegative sol. であり, μ は, dual $\hat{S}$ 上の対称な pos. meas. であり, $e \in \hat{S}$ の任意の近傍 U ~~finite mass~~ の補集合に finite mass をもち,

(14) $\displaystyle\int_{\hat{S}\setminus\{e\}} (1-\mathrm{Re}\,\chi(s))\,d\mu < +\infty,\quad \forall s\in S$

をみたす。さらに、φ, μ は、θ^* により unique に決定される。

このとき、

$$K(s,s_0) := \varphi(s) + \int_{\hat{S}\setminus\{e\}} (1-\chi(s))\,d\mu(\chi),\quad \forall s\in S.$$

とおくならば、

$$2\Gamma(s,t) = K(s,s_0) + K(t,s_0) - K(s-t,s_0)$$

は L-S 核である。

(ロ) $G = M(d)$, $K = SO(d)$ の場合 $(d\geq 2)$

~~$S=G/K$ の関数 θ に対して $\theta^*(g) := \theta(gK)$, $g\in G$~~

G 上の関数 θ が、$\mathcal{P}$ に属するとき、対応する $S=G/K$ 上の関数 θ^* は、$\mathbb{R}^d$ 上の radial fn. であるが、

定理：G 上の関数 θ が、$\mathcal{P}$ に属するための条件は、

(15) $\displaystyle\theta^*(s) = \exp\left\{-\left[c|s|^2 + \int_{0+}^{\infty} (1-Y_d(\lambda|s|))\,d\mu(\lambda)\right]\right\}$ $(c\geq 0)$

と表現されることである。ここに、

$$Y_d(t) = \frac{1}{B\left(\frac{1}{2},\frac{d-1}{2}\right)}\int_0^{\pi} e^{\sqrt{-1}\,t\cos\theta}\sin^{d-2}\theta\,d\theta \quad (t\geq 0)$$

であり、μ は、$[0,\infty)$ 上の pos. measure で、

$$\int_{0+}^{\infty} \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} d\mu(\lambda) < +\infty$$

をみたす。さらに，c と ν とは，θ^* により unique に決定される。

このとき，

$$K(s, s_0) = c|s|^2 + \int_{0+}^{\infty} (1 - Y_\alpha(\lambda|s|)) d\mu(\lambda)$$

とおくと，

$$2P(s,t) = K(s, s_0) + K(t, s_0) - K(s-t, s_0)$$

は，L-S 核である。

特に興味あるのは，$c=0$ の場合に，$d\mu_\alpha(\lambda) = \frac{d\lambda}{\lambda^{\alpha+1}}$ $(0<\alpha<2)$ ととると，$K_\alpha(s, s_0) = |s|^\alpha$ となる。

(ハ) $S = G/K$：コンパクトな対称空間 の場合

定理： G 上の関数 θ が，$\mathfrak{N}$ に属するための必要十分条件は，

$$(16) \qquad \theta(g) = \exp\{-\sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - \varphi_n(g))\}$$

と表現されることである。ここに，$\{\varphi_n(g)\}_{n=0}^{\infty}$ は，normalized, pos. def. zonal spherical fn.，すなわち，$\varphi_n(g) = \int_K \chi_n(g^{-1}k) dk$，$a_n \geq 0$ は，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ をみたし，θ により unique に決定される。involution ι を $\iota(\varphi_n) = \overline{\varphi_n}$ で定義するとき，$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ を，$a_n \geq 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$ かつ $\iota(a_n) = a_n$ $(\forall n \geq 0)$ をみたすようにとり，$K(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(1-\varphi_n($

$g_2^{-1}g_1)$) $(s=g_1K,\ t=g_2K)$ ととると，

$$2P(s,t)=K(s,s_0)+K(t,s_0)-K(s,t)$$

は，L-S 核である。

(二) $S=G/K$ ： noncompact な対称空間の場合

$\mathfrak{M}$ を，elementary pos. def. zonal spherical fn. の集合とする。

定理： G上の関数 θ が，$\mathcal{L}$ に属するための条件は，

(17) $\theta^*(s)=\exp\{-[\gamma(s)+\int_{\mathfrak{M}\setminus\{1\}}(1-\phi(x))\,d\mu(\phi)]\}$

と表現されることである。ここに，

(a) μ は，$\mathfrak{M}\setminus\{1\}$ 上の pos. meas. で，

$\mu(A)=\mu(\iota(A))$ をみたし，

(b) $e\in G$ の任意のコンパクトな近傍に対して，

$$I_U(\phi)=\int_U(1-\mathfrak{Re}\,\phi(x))\,dx$$

とするとき，$\int_{\mathfrak{M}\setminus\{1\}}I_U(\phi)\,d\mu(\phi)<+\infty$,

(c) $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ を，$U_n\downarrow\{1\}$ なる，$1\in\mathfrak{M}$ のコンパクトな近傍列とするとき，Support$(\mu_n)=U_n$ なる finite meas. の seq. $\{\mu_n\}$ が存在して，

$$\gamma(s)=\lim_n\int_{U_n}(1-\mathfrak{Re}\,\phi(s))\,d\mu_n。$$

γ, μ は，θ^* により unique に決定される。関数 γ を，θ^* により決定されるガウス関数，μ を θ^* により決定される Lévy 測度という。

関数γの形を、はっきりさせるには、$1 \in \mathfrak{M}$ の近くの$\mathfrak{M}$の細い構造をしることが必要であり、補系列の表現が関連することが指摘されている。

例： $G = SL(2;\mathbb{R})$, $K = SO(2)$ のとき

$$\gamma(x) = c \log(\cosh \rho(x,o)/2) \quad (c \geq 0).$$

いま、$\psi(x) = \gamma(x) + \int_{\mathfrak{M}\setminus\{1\}} (1-\phi(x))\, d\mu(\phi)$

とおき、$K(g_1K, g_2K) = \psi(g_2^{-1} g_1)$ とすると、

$$2P(s,t) = K(s,s_0) + K(t,s_0) - K(s,t)$$

は、L-S 核である。

例： $G = SL(2;\mathbb{R})$, $K = SO(2)$ のとき

$$2P(s,t) = (\log \cosh \rho(s,s_0)/2)^{1/2} + (\log \cosh \rho(t,s_0)/2)^{1/2} - (\log \cosh \rho(s,t)/2)^{1/2}$$

は、L-S 核である。

文献

(1) Y. Asoo (1975): On Random Fields on Homogeneous Space, Mem. Fac. Lit & Sci., Shimane Univ., Nat. Sci. 8, pp. 25-29.

(2) R. Gangolli (1967): Abstract Harmonic Analysis

and Lévy's Brownian Motion of Several Parameters, 5 th Berkeley Symp. Prob. Stat., Vol. 2 - Part 1, pp. 13 - 30.

(3) A. M. Yaglom (1963): Second-Order Homogeneous Random Fields, 4 th Berkeley Symp. Prob. Stat., Vol. 2, pp. 593 - 622.