数理解析研究所講究録
第 262 巻 1976 年 42-53

主系列表現の既約性について

早大 理工　　大豆生田 雅一

§0. 序

Gを連結, 半単純, 非コンパクトリー群で中心が有限とする。KをGの極大コンパクト部分群, G, Kのリー環をそれぞれ $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{k}$, $\mathfrak{g}=\mathfrak{k}+\mathfrak{p}$ を対応するカルタン分解とする。$\mathfrak{p}$の極大可換部分空間$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$と$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$上実数値一次関数$\alpha$に対し$\mathfrak{g}_\alpha$を

$$\mathfrak{g}_\alpha=\{X\in\mathfrak{g} \mid [H,X]=\alpha(H)X,\ \text{すべての}\ H\in\mathfrak{a}_\mathfrak{p}\}$$

と定義し $\mathfrak{g}_\alpha\neq\{0\}$ なるαの全体をΣとする。Σに辞書式順序を導入して $\Sigma^+=\{\alpha\in\Sigma \mid \alpha>0\}$ とおく。さらに$m(\alpha)$を$\mathfrak{g}_\alpha$の次元, $\rho=\frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Sigma^+}m(\alpha)\alpha$, $\mathfrak{n}=\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\mathfrak{g}_\alpha$, $\bar{\mathfrak{n}}=\sum_{\alpha\in\Sigma^+}\mathfrak{g}_{-\alpha}$ とする。$\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{n}$, $\bar{\mathfrak{n}}$ に対応するGの解析的部分群をそれぞれ $A_\mathfrak{p}$, N, $\bar{N}$, 又, $A_\mathfrak{p}$のKにおける中心化群をMとする。

このとき $A_\mathfrak{p}=\exp(\mathfrak{a}_\mathfrak{p})$ で $G\approx K\times A_\mathfrak{p}\times N$ 微分同相 で $g\in G$, $g=\kappa(g)\exp H(g)\,n(g)$ $\kappa(g)\in K$, $H(g)\in\mathfrak{a}_\mathfrak{p}$, $n(g)\in N$ と一意に分解される。K/M上のK不変測度 dk_M を, $\int_{K/M}dk_M=1$

と正規化しておく。$b=kM\in K/M$, $g\in G$ に対し $g\cdot b=k(g k)M\in K/M$, $\mathcal{H}=L^2(K/M, dk_M)$ とする。そこで、G の $\mathcal{H}$ 上の表現を次の様に定義する。

$\lambda\in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$ $g\in G$, $\varphi\in\mathcal{H}$, $b\in K/M$. $b=kM$

$$(\pi_\lambda(g)\varphi)(b) = e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)H(g^{-1}k)}\varphi(g^{-1}b)$$

このとき、S. Helgason は [H] において $(\pi_\lambda, \mathcal{H})$ の既約性と Harish-Chandra の $\mathbb{C}$-関数 ([H]) との関係を与えた。すなわち、$\dim\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}=1$ の場合には次の性質が成立する。

$d\bar{n}$ を $\bar{N}$ のハール測度で $\int_{\bar{N}} e^{-2\rho H(\bar{n})}d\bar{n}=1$, 又, $\Sigma_0=\{\alpha\in\Sigma \mid \frac{1}{2}\alpha\notin\Sigma\}$, $\Sigma_0^+=\Sigma_0\cap\Sigma^+$, $\lambda\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$ に対して

$$\mathbb{C}(\lambda) = \int_{\bar{N}} e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(\bar{n})}d\bar{n} \qquad \mathrm{Re}\langle\sqrt{-1}\lambda, \alpha\rangle > 0 \quad \alpha\in\Sigma_0^+$$

$$d(\lambda) = \prod_{\alpha\in\Sigma_0^+}\Gamma(\langle\sqrt{-1}\lambda, \alpha_0\rangle)2^{-\langle\sqrt{-1}\lambda, \alpha_0\rangle} \qquad \alpha_0=\alpha/\langle\alpha,\alpha\rangle$$

$\langle\ ,\ \rangle$ はキリング形式から作られる $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$ 上の双線型形式, Γ は通常の Γ-関数.

すると $\mathbb{C}(\lambda)$ を解析接続したものを再び $\mathbb{C}(\lambda)$ と書くと

$$(\pi_\lambda, \mathcal{H}) \text{ が既約} \iff \Phi(\lambda)\Phi(-\lambda)\neq 0 \qquad \Phi(\lambda)=d(\lambda)^{-1}\mathbb{C}(\lambda)$$

以下の議論は、この結果の非ユニタリ主系列表現に関する類似の結果~~に対~~する予想を考えてみる。

§1. 非ユニタリ主系列表現

(σ, E_σ) を M の既約ユニタリ表現, E_σ の内積を $(\ ,\ )_{E_\sigma}$ で表わす。そこで $\mathcal{H}_\sigma$ を次の様なヒルベルト空間とする。

① $\varphi : K \to E_\sigma$ は K の正規化されたハール測度 dk に関する可測関数。

② $\varphi(km) = \sigma(m^{-1})\varphi(k)$ が $k \in K$, $m \in M$ に対して成立。

③ $\|\varphi\|^2_{\mathcal{H}_\sigma} = \int_K \|\varphi(k)\|^2_{E_\sigma}\, dk < \infty$

上の①〜③を満す φ の全体を $\mathcal{H}_\sigma$ とする。

$g \in G$, $\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$, $k \in K$ に対して

$$(\pi_{\sigma,\lambda}(g)\varphi)(k) = e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)H(g^{-1}k)}\varphi(k(g^{-1}k)) \qquad \lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$$

とすると $(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ は G の連続表現となる。

<u>定義</u> M の既約ユニタリ表現 (σ, E_σ) と $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$ に対して、$(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ を G の非ユニタリ主系列表現という。

次に (τ, V_τ) を K の有限次元ユニタリ表現とする。ここで

$$C(G:\tau) = \{ f : G \to V_\tau \mid \text{(i) 連続},\ \text{(ii) } f(gk) = \tau(k^{-1}) f(g) \ \ g \in G,\ k \in K \}$$

$$\mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau) = \{ A \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(E_\sigma, V_\tau) \mid \tau(m)A = A\sigma(m) \ \ \forall m \in M \}$$

$$\mathrm{Hom}_M(V_\tau, E_\sigma) = \{ B \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V_\tau, E_\sigma) \mid B\tau(m) = \sigma(m)B \ \ \forall m \in M \}$$

$A \in \mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau)$, $\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$, $g \in G$ に対して

$$(P^\lambda_A \varphi)(g) = \int_K e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(g^{-1}k)} \tau(k(g^{-1}k)) A \varphi(k)\, dk, \qquad \lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$$

と定義する。

$P^\lambda_A : \mathcal{H}_\sigma \to C(G:\tau)$ 連続線型写像となる。(但し $C(G:\tau)$ にはコンパクト一様収束の位相を入れる。)

このとき

<u>補題1</u> $\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$, $g, g_0 \in G$, $(P^\lambda_A \varphi)(g^{-1}g_0) = P^\lambda_A(\pi_{\sigma,\lambda}(g)\varphi)(g_0)$

が、すべての $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$ 及び M の既約ユニタリ表現 σ に対して成立する。

<u>系 2</u>　P_A^{λ} の核は $(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の不変閉部分空間となる。

<u>§2. $(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の既約性と P_A^{λ} の単射性</u>

以後 K の有限次元ユニタリ表現は常に既約と仮定する。又 K, M の既約ユニタリ表現 τ, σ の反傾表現を ${}^t\tau$, ${}^t\sigma$、さらに線型写像 A の転置写像を ${}^tA$ で表わす。

<u>補題3</u>　(σ, E_σ), (τ, V_τ) をそれぞれ M, K の既約ユニタリ表現, $\mathrm{Hom}_M(V_\tau, E_\sigma) \neq \{0\}$　$B \neq 0 \in \mathrm{Hom}_M(V_\tau, E_\sigma)$ $v \in V_\tau$ $v \neq 0$　$\varphi_{B,v}(k) = B(\tau(k^{-1})v)$ とする。すると、$\varphi_{B,v} \in \mathcal{H}_\sigma$ であり、$\varphi_{B,v}$ が $(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の巡回ベクトルであることと $P_{{}^tB}^{-\lambda}$ が $\mathcal{H}_{{}^t\sigma}$ 上単射であることは同値。

証明.

まず E_σ, V_τ の双対空間を E_σ', V_τ' と書る。$E_\sigma \times E_\sigma'$, $V_\tau \times V_\tau'$ 上の標準的な双線型形式をそれぞれ $\langle\ ,\ \rangle_{E_\sigma}$　$\langle\ ,\ \rangle_{V_\tau}$ と書く。

$\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$, $\varphi' \in \mathcal{H}_{{}^t\sigma}$ に対し $\langle \varphi, \varphi' \rangle_\sigma = \int_K \langle \varphi(k), \varphi'(k) \rangle_{E_\sigma} dk$ とすると

(1) $\langle \pi_{\sigma,\lambda}(g)\varphi_{B,v}, \varphi' \rangle_\sigma = \langle v, (P_{{}^tB}^{-\lambda}\varphi')(g) \rangle_{V_\tau}$　$\varphi' \in \mathcal{H}_{{}^t\sigma}$

が成立する。

従って $P_{{}^tB}^{-\lambda}$ が単射であれば $\varphi_{B,v}$ は巡回ベクトルとなる。

逆は、$v_0 \neq 0$ $v_0 \in V_\tau$、$\varphi_{B,v}$ が巡回ベクトルとなること

と $\varphi_B v_0$ が巡回ベクトルとなることが同値となる（T の既約性）から(1)より $P_B^{-\lambda}$ が単射となる。

命題4

$(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ が既約である為の必要十分条件は次の性質をもつ K の既約ユニタリ表現 (τ, V_τ) が存在すること。

(i) $\mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau) \neq \{0\}$ i.e. $\dim \mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau) \geqq 1$

(ii) $B \in \mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau)$, $B^* \in \mathrm{Hom}(V_\tau, E_\sigma)$ を

$(B^* v, e)_{E_\sigma} = (v, Be)_{V_\tau}$ $v \in V_\tau$, $e \in E_\sigma$ とし

$\hat{B} = {}^tB^*$ このとき、$B \neq 0$ なら

P_B^λ, $P_{\hat{B}}^{-\lambda}$ が共に単射となる。

証明.

$(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ を K に制限した表現に含まれる K の既約ユニタリ表現の一つを (τ, V_τ) とする。さらに $(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ が既約とする。

このとき $\mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau) \neq \{0\}$ であり，$B \in \mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\tau)$ とすると，$P_B^\lambda \varphi_{B^*,v}(e) = (\dim_{\mathbb{C}} V_\tau)^{-1}\,\mathrm{Trace}\,(BB^*)\,v$. $v \in V_\tau$.

従て $P_B^\lambda \neq 0$. 故に系2から P_B^λ $(B \neq 0)$ は単射. 同様に $(\pi_{t\sigma,-\lambda}, \mathcal{H}_{t\sigma})$ が既約ならば $P_{\hat{B}}^{-\lambda}$ は単射。$(\pi_{t\sigma,-\lambda}, \mathcal{H}_{t\sigma})$ の既約性は $(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の既約性と

$\langle \pi_{\sigma,\lambda}(g)\varphi, \pi_{t\sigma,-\lambda}(g)\varphi' \rangle_\sigma = \langle \varphi, \varphi' \rangle_\sigma$ $\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$, $\varphi' \in \mathcal{H}_{t\sigma}$

から得られる。

逆に i), ii) を仮定する。

iii) P_B^{λ} が単射であると $(\pi_{\sigma\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の {0} でない不変閉部分空間は φ_{B^*v} $v\in V_\tau$, $v\neq 0$ を含む。

iii) が成立すると ii) より $\varphi_{B^*v}\neq 0$ 又 補題3により $(\pi_{\sigma\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の既約性は $P_{\tilde{B}}^{-\lambda}$ の単射性と同値となる。

iii) の証明

$\mathcal{H}$ を $(\pi_{\sigma\lambda}, \mathcal{H}_\sigma)$ の {0} でない任意の不変閉部分空間とする。すると $\varphi\in\mathcal{H}$, $(P_B^{\lambda}\varphi)(e)\neq 0$ となるものが存在する。

$\chi_\tau(k) = \mathrm{Trace}(\tau(k^{-1}))$

$$\int_K \chi_\tau(k)\varphi(k^{-1}k_0)\,dk = \int_K \chi_\tau(k)(\pi_{\sigma\lambda}(k)\varphi)(k_0)\,dk = F(k_0)$$

$\mathcal{H}$ が閉部分空間であり, 又不変性から $F\in\mathcal{H}$

次に簡単な計算より

$(P_B^{\lambda}F)(e) = (P_B^{\lambda}\varphi)(e)$, $P_B^{\lambda}F = P_B^{\lambda}\varphi_{B^*v}$ $\exists v\in V_\tau$ となる。

従って P_B^{λ} の単射性より $F=\varphi_{B^*v}$, $v\neq 0$, が得られる。

(注意) S. Helgason [2] によれば (σ, E_σ) が自明な表現であるときには (τ, V_τ) として K の自明な表現を取ればよい。従って命題4は次の様に言いかえられる。

$\pi_{\sigma\lambda}=\pi_\lambda$, $\mathcal{H}_\sigma=\mathcal{H}$ ((σ, E_σ) が M の自明な表現のとき) とおくと

$(\pi_\lambda, \mathcal{H})$ 既約. P^{λ} $P^{-\lambda}$ が共に単射.

§3 P_A^λ の単射性

$C^\infty(K:E_\sigma)=\{F:K\to E_\sigma \mid C^\infty\text{-関数}\}$ ((σ,E_σ) M の既約表現)

$C^\infty(K\ \sigma)=C^\infty(K:E_\sigma)\cap \mathcal{H}_\sigma$

$\mathbb{D}(K)$ を K 上左不変微分作用素の全体が作る代数

$C^\infty(K:E_\sigma)$ にセミノルム $\nu_D(F)=\sup_{k\in K}\|(DF)(k)\|_{E_\sigma}$ $D\in\mathbb{D}(K)$

によって局所凸位相を入れたものを $\mathcal{D}(K:E_\sigma)$ とすると $C^\infty(K\ \sigma)$ は閉部分空間であり

$$\mathcal{D}(K,E_\sigma)\ni F\longmapsto \overline{F}(k)=\int_M \sigma(m)F(km)\,dm$$

が連続な射影となる。ここで dm は $\int_M dm=1$ なる M のハール測度。$C^\infty(K,\sigma)$ に $\mathcal{D}(K\ E_\sigma)$ からの誘導位相を入れたものを $\mathcal{D}(K,\sigma)$ 各々の双対空間を $\mathcal{D}(K,E_\sigma)'$ $\mathcal{D}(K,\sigma)'$ とする。

$\varphi:K\to E_\sigma$ 局所可積分であり $\varphi(km)=\sigma(m^{-1})\varphi(k)$ $m\in M$, $k\in K$ とする。

$\varphi'\in\mathcal{D}(K,{}^t\sigma)$ $\langle S_\varphi\ \varphi'\rangle=\langle\varphi\ \varphi'\rangle_\sigma=\int_K\langle\varphi(k),\varphi'(k)\rangle_{E_\sigma}dk$ すると

<u>補題5</u> $\mathcal{D}(K\ \sigma)\ni\varphi\mapsto S_\varphi\in\mathcal{D}(K\ {}^t\sigma)'$ は単射.

証明.

$\varphi'\in\mathcal{D}(K\ {}^t\sigma)$ に対し $\varphi_0'\in\mathcal{D}(K:E_\sigma')$ $\overline{\varphi_0'}=\varphi'$ とする。すると. $\langle S_\varphi\ \varphi'\rangle=\int_K\langle\varphi(k)\ \varphi_0'(k)\rangle_{E_\sigma}dk$.

故に $S_\varphi=0$ なら. すべての $\varphi_0'\in\mathcal{D}(K\ E_\sigma')$ に対して

$\int_K \langle \varphi(k)\ \varphi_0'(k)\rangle dk = 0$ 故に $\varphi = 0$.

以上より $\mathcal{H}_\sigma \subset \mathcal{D}(K\ {}^t\sigma)'$ と考えられる。そこで P_A^λ の定義を $S \in \mathcal{D}(K\ {}^t\sigma)'$ にまで拡張する。

$S \in \mathcal{D}(K, {}^t\sigma)'$ に対し $\tilde{S} \in \mathcal{D}(K\ E_\sigma')'$ を.

$\langle \tilde{S}\ \ \varphi_0 \rangle = \langle S\ \ \overline{\varphi_0} \rangle \qquad \varphi_0 \in \mathcal{D}(K, E_\sigma')$

によって定める。次に $(e_p)_p$ を E_σ の基底, $(e_p^*)_p$ を E_σ' の双対基底とする。$F \in \mathcal{D}(K)$ ($= C^\infty(K)$ にセミノルム ν_D によって位相を入れたもの。すなわち $\mathcal{D}(K) = \mathcal{D}(K : \mathbb{C})$) に対して. $F_p(k) = F(k)e_p^*$ とすると $F_p \in \mathcal{D}(K\ E_\sigma')$ そこで

$\tilde{S}_p \in \mathcal{D}(K)'$ を $\langle \tilde{S}_p\ F \rangle = \langle \tilde{S}, F_p \rangle \quad F \in \mathcal{D}(K)$ とする。

$S \in \mathcal{D}(K, {}^t\sigma)' \quad \lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_\mathfrak{p}, \mathbb{C}) \quad A \in \mathrm{Hom}_M(E_\sigma, V_\sigma)$

$$(P_A^\lambda S)(g) = \sum_p \int_K e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(g^{-1}k)}\tau(k(g^{-1}k))Ae_p\, d\tilde{S}_p(k)$$

すると P_A^λ は基底の取り方によらず, $S \in \mathcal{H}_\sigma$ のときは前の定義に一致する。

<u>補題 6</u> P_A^λ が $\mathcal{D}(K\ \sigma)$ 上単射であることと, $\mathcal{D}(K\ {}^t\sigma)'$ 上単射であることは同値.

証明.

補題 5 によって $\mathcal{D}(K\ {}^t\sigma)'$ 上単射であれば, $\mathcal{D}(K. \sigma)$ の上でも単射. 逆に $S \in \mathcal{D}(K\ {}^t\sigma)'$ $P_A^\lambda S = 0$. P_A^λ が $\mathcal{D}(K\ \sigma)$ 上単

解とする。すると任意の $f\in\mathcal{D}(K)$ に対して

$$0=\int_K f(k)(P_A^\lambda S)(k^{-1}g)\,dk$$
$$=\int_K f(k)\sum_p\int_K e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(g^{-1}kk_0)}\tau(k(g^{-1}kk_0))Ae_p\,d\tilde{S}_p(k)\,dk$$
$$=\int_K e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(g^{-1}k)}\tau(k(g^{-1}k))A\Big(\sum_p\int_K f(kk_0^{-1})\,d\tilde{S}_p(k_0)\,e_p\Big)dk.$$

ここで、

$$F(k)=\sum_p\int_K f(kk_0^{-1})\,d\tilde{S}_p(k_0)e_p=\sum_p(f*\tilde{S}_p)(k)e_p.$$

すると定義より $F\in\mathcal{D}(K,\sigma)$

従って $F\equiv0$。故に任意の $f\in\mathcal{D}(K)$ 及び各 p について

$f*\tilde{S}_p=0$ が成立するから $\tilde{S}=0$，結局 $S=0$

となる。

以後，$\dim_{\mathbb{R}}\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}}=1$ とする。このとき $w\in K$，$Ad(w)\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}}=\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}}$ で $Ad(w)|\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}}=-1$ となるものを固定する。すると (σ,E_σ) の既約性から次の補題が成立する。

<u>補題7</u>　$\dim\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}}=1$ のとき $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}},\mathbb{C})\cong\mathbb{C}$ であり

$\lambda\in\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}},\mathbb{C})$　$\mathrm{Re}\langle\sqrt{-1}\lambda,\alpha\rangle>0$　${}^\forall\alpha\in\Sigma^+$，$v\in E_\sigma$

$S'_{\lambda,v}\in\mathcal{D}(K,{}^t\sigma)'$ を，$\varphi\in\mathcal{D}(K,{}^t\sigma)$ に対し

$$\langle S'_{\lambda,v},\varphi'\rangle=\int_{\bar{N}}e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(\bar{n})}\langle v,\varphi(wk(\bar{n}))\rangle_{E_\sigma}d\bar{n}$$

と定義すると任意の $\varphi\in\mathcal{D}(K,{}^t\sigma)$ に対し

$\lambda\longmapsto\langle S'_{\lambda,v},\varphi'\rangle$ は $\mathbb{C}\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{g}},\mathbb{C})$ 全体に有理型関数として解析接続出来，さらに有理型関数 $c_\sigma(\lambda)$ が存在して，次の(i)，(ii)が成立つ，

(i) $\lambda \mapsto \frac{1}{c_{\Pi_\sigma}(\lambda)} \langle S'_{\lambda,v}, \varphi' \rangle$ はすべての $\varphi' \in \mathcal{D}(K, \tau)$ に対して整関数となる。

(ii) 各 $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$ に対して $\varphi' \in \mathcal{D}(K, \tau)$ が存在して $\frac{1}{c_{\Pi_\sigma}(\lambda)} \langle S'_{\lambda,v}, \varphi' \rangle \neq 0$ となる。

証明については S. Helgason [1]. 定理4.5, 又は Knapp-Stein [3] 定理3 と同様。

又、簡単な計算より

<u>補題8</u> $\lambda \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$ $w \in K$, $\mathrm{Ad}(w)\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \subset \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$ とする.

$w\lambda(H) = \lambda(\mathrm{Ad}(w^{-1})H)$ $H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}$, $c_{\Pi_\sigma}(\lambda)^{-1} S'_{\lambda,v} = S_{\lambda,v}$ とすると,

$$P_A^\lambda S_{\lambda,v}(g) = e^{-(\sqrt{-1}\,w\lambda+\rho)H(g^{-1})}\tau(\kappa(g^{-1}))\tau(w)\mathbb{C}_\sigma(\lambda:\tau)Av$$

ここで

$\mathrm{Re}\langle\sqrt{-1}\lambda, \alpha\rangle > 0 \quad \forall \alpha \in \Sigma^+$ のとき

$$\mathbb{C}(\lambda:\tau) = \int_{\bar N} e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(\bar n)}\tau(\kappa(\bar n))\,d\bar n$$

は絶対収束し $\mathbb{C}_\sigma(\lambda:\tau) = c_{\Pi_\sigma}(\lambda)^{-1}\mathbb{C}(\lambda:\tau)$ は $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C})$ 上整関数となる。

<u>系9</u> P_A^λ が単射であるならば $\mathbb{C}_\sigma(\lambda:\tau)A \neq 0$ さらに $\mathrm{Re}\langle\sqrt{-1}\lambda, \alpha\rangle > 0$ $\alpha \in \Sigma^+$ のときは $\mathbb{C}_\sigma(\lambda:\tau)A \neq 0$ が P_A^λ が単射となる為の必要十分条件となる。($\mathcal{H}_\tau$ の上で)

証明

前半は 補題6, 補題8 より得られる,

$\varphi \in \mathcal{H}_\sigma$ とする。

$F \in \mathcal{D}(K)$ $\quad \int_K F(k)\,dk = \int_{\bar N}\int_M F(\kappa(\bar n)m)\,e^{-2\rho H(\bar n)}\,d\bar n\,dm.$

Harish-Chandra [2].

及び $H(a^{-1}\kappa(\bar n)) = H(a^{-1}\bar n a) - H(\bar n) - \log a.$ $\quad d(a^{-1}\bar n a) = e^{2\rho \log a}\,d\bar n$

より.

$$(P_A^\lambda \varphi)(a) = e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)\log a}\int_{N} e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(\bar n)}\,e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)H(a\bar n a^{-1})}\,\tau(\kappa(\bar n))\,A\,\varphi(\kappa(a\bar n a^{-1}))\,d\bar n$$

$\mathrm{Re}\langle\sqrt{-1}\lambda, \alpha\rangle > 0$ $\quad \alpha \in \Sigma^+$, $\quad a \in A_{\mathfrak{p}}^+ = \exp \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^+$ のとき

$$e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(\bar n)}\,e^{(\sqrt{-1}\lambda-\rho)H(a\bar n a^{-1})}\,\tau(\kappa(\bar n))\,A\,\varphi(\kappa(a\bar n a^{-1})) = F_\lambda(\bar n, a)$$

は $d\bar n$ に関して可積分.

さらに $a_t = \exp tH$. $H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^+$ とするとき,

$\lim_{t\to+\infty} F_\lambda(\bar n, a_t)$ も可積分

ここで $\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}^+ = \{H \in \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} \mid \alpha(H) > 0 \ \forall \alpha \in \Sigma^+\}$.

故に, $\lim_{t\to+\infty} a_t \bar n a_t^{-1} = e$ より

$$e^{(-\sqrt{-1}\lambda+\rho)\log a_t}(P_A^\lambda \varphi)(a_t) \to \left(\int_{\bar N} e^{-(\sqrt{-1}\lambda+\rho)H(\bar n)}\,\tau(\kappa(\bar n))\,d\bar n\right) A\,\varphi(e)$$

$(t \to +\infty)$

従って $\mathrm{Re}\langle\sqrt{-1}\lambda, \alpha\rangle > 0$ のとき. $d\pi_\sigma(\lambda)^{-1} \neq 0$ に注意すれば.

$C_\sigma(\lambda : \tau)A \neq 0$ ならば P_A^λ は単射となる。

以上により, $C(\lambda : \tau)$ とプランシェレル測度との関係 (Knapp - Stein [3]) を合わせれば次の命題が成立すること //

が予想される。

命題　G を連結，半単純，非コンパクト・リー群で中心が有限，さらに $\dim_{\mathbb{R}} \mathfrak{a}_{\mathfrak{p}} = 1$ とする。$(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_{\sigma})$ を非ユニタリ主系列表現，対応するプランシェレル測度を $\mu(\sigma,\lambda)$ とする。このとき，$\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{a}_{\mathfrak{p}}, \mathbb{C}) \cong \mathbb{C}$ 上の有理型関数 $P_0(\sigma,\lambda)$ が存在して，$(\pi_{\sigma,\lambda}, \mathcal{H}_{\sigma})$ が可約である為の必要十分条件は λ が $\mu(\sigma,\lambda)P_0(\sigma,\lambda)$ の特異点となること。

References.

[1] Harish-Chandra. Spherical functions on a semisimple Lie group I, II Amer. J. Math vol. 80 (1958) 241-310, 553-613.

[2] Helgason. S A duality for symmetric space with applications to group representations Advances in Math. vol. 5 (1970) 1-154.

[3] Knapp A.W. and Stein E.M. Intertwining operators for semisimple groups. Ann. of Math. vol. 93 (1971) 489-578.

[4] Warner G. Harmonic analysis on semi simple Lie groups II. Springer-Verlag. (1972)