数理解析研究所講究録
第262巻 1976年 72-91

正規部分群に対する双対性

京大 理　辰馬伸彦

§1. 可換局所コンパクト群Aでは，その閉部分群の全体と，Aのdual群$\hat{A}$の閉部分群全体の間に，次に述べる様な，Pontrjaginの双対性がある．

命題1. Aの任意の閉部分群Hに対して，H上で恒等的に1となる$\hat{A}$の元の全体（Hのannihilator）を$\check{H}$とすると，$\check{H}$は$\hat{A}$の閉部分群となるが，こゝで，

(1) HはAの中での$\check{H}$のannihilatorであり，Hと$\check{H}$を対応させる対応で，Aの閉部分群の全体は，$\hat{A}$の閉部分群の全体と1対1に対応する．

(2) 可換局所コンパクト群としてのHのdual群は，$\hat{A}$の元のHへの制限をHの表現と見る所の，自然な対応で$\hat{A}/\check{H}$と同型になる．

(3) 商群A/Hのdual群は，$\check{H}$の元をA/Hの表現と見る様な対応で，$\check{H}$と同型になる．

小文では，此の双対性を可換とは限らない局所コンパクト群Gとその部分群に拡張する事を考える。Gの dual $\hat{G}$にては，可換群の dual 群の積演算の拡張と考えられるものは，テンソル積演算である．しかし$\hat{A}$と異り，$\hat{G}$は一般にはこの積演算で群にならないから，命題1の analogy を得るには適当な型式化を必要とする。特に，$\hat{G}$自身，テンソル積で閉じて居ないので，型式化の為には，$\hat{G}$の代りにGの（必ずしも既約でない）ユニタリ表現の同値類の全体Ω（以下，Gの弱 dual と呼ぶ）を用いるのが便利である．以下先ず命題1をΩの言葉に書き替える．

<u>定義2.</u>　Gの部分集合Sが与えられた時，Sの全ての元を単位作用素で表現する様なΩの元の全体を，Sの annihilator と呼び，$\Sigma(S)$で示す。

<u>補題3.</u>　Sの annihilator $\Sigma(S)$（Σと略記）では，

(A-1)　$\forall \omega_1, \omega_2 \in \Sigma$ で $\omega_1 \oplus \omega_2$（直和）$\in \Sigma$．

(A-2)　$\forall \omega_1, \omega_2 \in \Sigma$ で $\omega_1 \otimes \omega_2$（テンソル積）$\in \Sigma$．

(A-3)　$\forall \omega \in \Sigma$ で ω^*（ωの共軛表現）$\in \Sigma$．

(A-4)　Σは Fell 位相で閉じて居る．

証明は自明である．

<u>定義4.</u>　Ωの部分集合Σが，(A-1)〜(A-4)の条件を満す時，ΣはΩの subalgebra であると云う。

<u>定義5.</u>　Ωの部分集合Ξに対し，Ξの全ての元の共通核（Ξに属する全ての表現で，単位作用素に表現されるGの元の全体）を，Ξのannihilatorと云い，$H(\Xi)$で示す。

<u>補題6.</u>　Ξのannihilator $H(\Xi)$は，Gの閉正規部分群である。

<u>証明。</u>一つの表現の核は閉正規部分群である事から明か。

可換群Aの場合，Aの弱dual Ωのsubalgebra Σに含まれる$\hat{A}$の元（即ち既約なΣの元）全体$\hat{H}$は，(A-4)により$\hat{A}$の閉部分集合であるが，同時に(A-2)，(A-3)によって，$\hat{A}$の部分群である。そして，(A-1)，(A-4)は$H(\Sigma)$が$\hat{H}$のannihilatorと一致する事を導く。

Pontrjaginの双対性，命題1 (1)は，Σが$H(\Sigma)$のannihilatorと一致し，$H(\Sigma)$とΣ，又はHと$\Sigma(H)$を対応させる対応が，Aの閉部分群（可換だから正規）の全体と，Ωのsubalgebraの全体の間の1対1対応を与えるものとして置きかえられる。そして，命題1 (2)は，Ωの元のHへの制限を，Hの弱dual Ω_Hに埋めこんで考える時，Ω_H全体をはる（それを含む最小のsubalgebraがΩ_H全体である）事と同値で，命題1 (3)は$\Sigma(H)$をA/Hの表現の集りと見る時，A/Hの弱dual $\Omega_{A/H}$と$\Sigma(H)$が同型（積，和等を含め）である事に，等

しい。

§2. 一般の局所コンパクト群Gについて同様の事を考える。此の場合，補題6によりGの部分群としては，閉正規部分群のみを考える事となる。以下表現とは，ユニタリ表現の事とし，表現ωの表現空間を$\mathfrak{H}^\omega$で，表現作用素をT_g^ωで書き，$\omega \equiv \{\mathfrak{H}^\omega, T_g^\omega\}$と示す。$I^\omega$で$\mathfrak{H}^\omega$上の恒等作用素を示す事とする。

更に，Gの閉正規部分群Hによる商群G/Hの表現ωは，Gの元gにその属する coset の表現作用素T_{gH}^ωを対応させる対応で，H上で trivial なGの表現，すなわち$\Sigma(H)$の元と考えられる。又逆に，$\Sigma(H)$の元は同様の解釈で，G/Hの表現と見なせる。従ってG/Hの弱 dual をΩの中のHの annihilator $\Sigma(H)$と同一視し，Ωに埋め込んで考えられるから，以下断わらぬ限り，その様に考える事とする。

補題7. Gの閉正規部分群Hをとると，

$$H = H(\Sigma(H))$$

証明. $H \subset H(\Sigma(H))$は自明。今$H \neq H(\Sigma(H))$として，$g \in H(\Sigma(H)) - H$をとると，G/H内でのgの属する coset は単位元と異るから，表現が十分澤山ある事を保証する所の，I.M. Gel'fand - K. Raikov の結果により，$T_{gH}^\omega \neq I^\omega$となる

$\Omega_{G/H}$ の元 ω がある．ω を Ω に埋込んで考えると $\Sigma(H)$ に入るから，$H(\Sigma(H))$ の元 g に対し $T_{gH}^{\omega}=I^{\omega}$ でなくてはならず矛盾．┘

定義 8. Ω の subalgebra Σ の部分集合 Σ_0 が，

(1) Σ_0 は Ω の subalgebra である．

(2) $\forall\omega\in\Sigma$ $\forall\omega_0\in\Sigma_0$ について，$\omega\otimes\omega_0\in\Sigma_0$．

を満す時，Σ_0 は Σ の ideal であると云う．┘

補題 9. Ω の部分集合 Ξ と，$\omega_0\in\Omega$ に対して，

$$\omega_0\otimes\Xi\subset\Xi \text{ ならば，} H(\omega_0)\supset H(\Xi).$$ ┘

証明. $H(\omega_0)\not\supset H(\Xi)$ とし，$g\in H(\Xi)-H(\omega_0)$ をとると，$\forall\omega\in\Xi$ について $T_g^{\omega}=I^{\omega}$ であるが，$T_g^{\omega_0}\neq I^{\omega_0}$ である．従って，$T_g^{\omega_0\otimes\omega}=T_g^{\omega_0}\otimes T_g^{\omega}=T_g^{\omega_0}\otimes I^{\omega}\neq I^{\omega_0}\otimes I^{\omega}=I^{\omega_0\otimes\omega}$ であるが，此れは，$\omega_0\otimes\omega\in\Xi$，$g\in H(\Xi)$ の仮定に反する．

系 10. Ω の subalgebra Σ とその ideal Σ_0 に対して，

$$H(\Sigma)=H(\Sigma_0)$$ ┘

証明. $H(\Sigma)\subset H(\Sigma_0)$ は自明．逆は補題 9 による．┘

定義 11. G の正則表現 R に弱に含まれる Ω の元全体を，G の弱 reduced dual と呼び Ω_R で示す．

又商群 G/H の弱 reduced dual を前述の，$\Omega_{G/H}$ を $\Sigma(H)$ と同一視する対応によって，Ω に埋め込んだ像を $\Omega(H)$ で示す．┘

補題 12. (1) $\Omega(H)$ は $\Sigma(H)$ の ideal である．

(2) $\Omega(H)$ はそれ自身及び ϕ 以外の ideal を持たない．┘

証明. $\Sigma(H)$を$\Omega_{G/H}$にもどして考える事により，はじめから$H=\{e\}$であるとして，$\Omega(H)=\Omega(\{e\})=\Omega_{R}$と，$\Sigma(H)=\Omega$の場合について示せばよい。そして此の場合については，$\forall\omega\in\Omega$に対して，$\omega\otimes R$がRのmultipleとユニタリ同値となる事と，Fell位相に関し，テンソル積が連続である事より明らかである。 $\lrcorner$

系13. Ωの相異るsubalgebra Σ_1, Σ_2で，

$H(\Sigma_1)=H(\Sigma_2)$，となるものが存在するGがある。 $\lrcorner$

証明. G/Hをnon-amenableな群とすると，subalgebra $\Omega(H)\neq\Omega_{G/H}=\Sigma(H)$であるが系10，補題12より$H(\Omega(H))=H(\Sigma(H))$. $\lrcorner$

補題7は閉正規部分群と，そのannihilatorであるΩのsubalgebraとの間の1対1対応を保証するものであるが，系13は，Ωのsubalgebraが全て，ある閉正規部分群のannihilatorになるのではなく，特定の條件を満すものに限る事を示す。

定義14. Ωのsubalgebra Σ_0が自分自身とϕ以外のidealを持たない時，Σ_0はsmallであると云う。 $\lrcorner$

定義15. Ωのsubalgebra Σに対して，

$$\hat{\Sigma}\equiv\{\omega\in\Omega \,/\, \omega\otimes\Sigma\subset\Sigma\}$$

を，Σのideal closureと呼ぶ。 $\lrcorner$

定義16. Ωのsubalgebra Σが，Ωのあるsmall subalgebra Σ_0のideal closureになって居る時，Σをbigであると云う。 $\lrcorner$

補題17. Ωの2つのsmall subalgebra Σ_1, Σ_2 について,

$\tilde{\Sigma}_1 = \tilde{\Sigma}_2$ なら $\Sigma_1 = \Sigma_2$. ┘

証明. $\hat{\Sigma}_1 = \hat{\Sigma}_2 \supset \Sigma_1, \Sigma_2$ より $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ (Σ_1, Σ_2 の各元のテンソル積ではられる Ω の subalgebra) は, Σ_1, Σ_2 両方の ideal になるから, small 性の仮定により, $\Sigma_1 = \Sigma_1 \otimes \Sigma_2 = \Sigma_2$. ┘

補題18. Gの閉正規部分群Hに対して,

(1) $\Omega(H)$ は Ω の small subalgebra である.

(2) $\Sigma(H)$ は Ω の big subalgebra である. ┘

証明. (1) は補題12.(2) と定義14.から, 又 (2) は定義16.より $\Sigma(H) = \widehat{\Omega(H)}$ を示せばよいが, 補題12.(1) は, $\Sigma(H) \subset \widehat{\Omega(H)}$ を示し, 更に 系10. によって, $H = H(\Omega(H)) = H(\widehat{\Omega}(H))$ が導かれるから, $\widehat{\Omega(H)}$ の元は H 上 trivial で即ち $\widehat{\Omega(H)} \subset \Sigma(H)$. ┘

系19. Gの部分集合Sで, $\Sigma(S)$ は Ω の big subalgebra. ┘

証明. Sで生成されるGの閉正規部分群Hで $\Sigma(S) = \Sigma(H)$. ┘

定義14, 16 の言葉を用いると, Pontrjagin の双対性の一般化は次の様に与えられる.

主定理20. Gの任意の閉正規部分群Hに対して, HのΩの中での annihilator $\Sigma(H)$は, Ω の big subalgebra となるが,

(1) HはGの中で$\Sigma(H)$の annihilator であり, Hと$\Sigma(H)$を対応させる対応で, Gの閉正規部分群の全体は, Ωの big

subalgebra の全体と1対1に対応する．

(2)　Ω の元を H に制限したもの全体は，H の弱 dual を生成する．

(3)　商群 G/H の弱 dual $\Omega_{G/H}$ は $Z(H)$ と同型である．

補題17．の small subalgebra と big subalgebra の対応を考えると，

<u>主定理21.</u>　G の任意の閉正規部分群 H に対して，G/H の弱 reduced dual $\Omega(H)$ は，Ω の small subalgebra であるが，

(1)　H は G の中で $\Omega(H)$ の annihilator であり，H と $\Omega(H)$ を対応させる対応で，G の閉正規部分群の全体は，Ω の small subalgebra の全体と1対1に対応する．

(2)　Ω_R の元を H に制限したものの全体は，H の弱-reduced dual を生成する．

(3)　商群 G/H の弱 reduced dual は $\Omega(H)$ と同型である．

定理20 (1)，定理21 (1) の夫々の前半の H が annihilator となる事は，補題7と系10により示した．又両定理の(3)も§2の最初の説明により殆ど自明である．そして，定理21 (2)は次の良く知られた補題より明かである．

<u>補題22.</u>　G の正則表現を，その閉部分群 L に制限したものは，L の正則表現の multiple とユニタリ同値である．

定理20(2)は，次の補題より直ちに出る．

<u>補題23.</u> Gの閉正規部分群Hの表現σからGに誘導した表現 $\omega \equiv \mathrm{Ind}\{\sigma \mid H \to G\}$を$H$に制限したものは$\sigma$を弱に含む。

<u>証明.</u> ωは，$\mathfrak{H}^{\sigma}$-ベクトル値函数$f(g)$で，$f(hg) = T_h^{\sigma} f(g)$を満すものの上に，$(T_{g_1}^{\omega} f)(g) \equiv f(gg_1)$として定義される。特に$H$が正規であるから，$T_{h_1}^{\omega} f(g) = f(gh_1) = f(gh_1g^{-1}g) = T_{gh_1g^{-1}}^{\sigma} f(g) = T_{h_1}^{g(\sigma)} f(g)$　$(h, h_1 \in H,\ g, g_1 \in G)$となる事から，$\omega$の$H$への制限は　$\int_{\widehat{G/H}} g(\sigma)\, d\tilde{g}$と直積分に分解される。$g \to g(\sigma)$は明かに弱位相に対し連続であるから，[1] P252 Lemma 3.1によりσは$\int_{\widehat{G/H}} g(\sigma)\, d\tilde{g}$に弱に含まれる．

従って残るのは，両定理の(1)の後半で，こゝで与えた対応がontoである事を示す丈であるが，此れは補題17, 18によって，任意のsmall subalgebra Σ_0がある閉正規部分群Hにより$\mathfrak{R}(H)$の形に書ける事，特に次を証せば十分である．

<u>補題24.</u>　$\mathfrak{R}$の任意のsmall algebra Σ_0で，$\mathfrak{R}(H(\Sigma_0)) = \Sigma_0$．

此の補題24.は，Σ_0のsmall性の仮定と，補題12(1)より，次の補題25が判れば，$G/H(\Sigma_0)$の正則表現からはられるsubalgebra $\mathfrak{R}(H(\Sigma_0))$が$\Sigma_0$のidealとなり，従って$\Sigma_0$と一致し，証了となる。

<u>補題25.</u> $\mathfrak{R}$の中の任意のsubalgebra Σに対し，$G/H(\Sigma)$の正則表現はΣに入る。

§3. 補題25 を証明する為に，次の定義をする．

定義26. G 上の正定符号函数の全体 Φ の部分集合 Ψ が次の(B-1)〜(B-4)を満す時，Ψ は Φ の subalgebra と云う．

(B-1) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Psi$ で $\varphi_1 + \varphi_2 \in \Psi$.

(B-2) $\forall a>0, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \Psi$ で $\varphi_1 \times \varphi_2 \in \Psi$, $a\varphi_1 \in \Psi$.

(B-3) $\forall \varphi \in \Psi$ で $\overline{\varphi} \in \Psi$.

(B-4) Ψ の有向集合 $\{\varphi_\alpha\}$ が，φ に広義一様に収束するならば，$\varphi \in \Psi$.

定義27. Φ の subalgebra Ψ の部分集合 Ψ_0 が，

(1) Ψ_0 は Φ の subalgebra である．

(2) $\forall \varphi \in \Psi, \forall \varphi_0 \in \Psi_0$ について，$\varphi \times \varphi_0 \in \Psi_0$.

を満す時，Ψ_0 は Ψ の ideal であると云う．

定義28. G の部分集合 S の(Φ での) annihilator とは，
$\Phi(S) \equiv \{\varphi \in \Phi \,/\, \varphi(g) = \varphi(e), \forall g \in S\}$, を云う．

定義29. Φ の部分集合 Λ の(G での) annihilator とは，
$H(\Lambda) \equiv \{g \in G \,/\, \varphi(g) = \varphi(e), \forall \varphi \in \Lambda\}$, を云う．
特に，$\Lambda = \{\varphi\}$ の時 $H(\{\varphi\})$ を H_φ と書く事とする．

補題30. (1) Λ の annihilator $H(\Lambda)$ は G の閉部分群．
(2) S の Φ での annihilator $\Phi(S)$ は Φ の subalgebra である．

証明. (2)は自明．(1)は正定符号函数 φ を，ある表現 $\omega = \{\mathfrak{H}^\omega, T_g^\omega\}$ と，$\mathfrak{H}^\omega$ のベクトル v によって，

$\varphi(g) = \langle T_g^{\omega} v, v \rangle$ と書くと，$\varphi(g) = \varphi(e)$ より $T_g^{\omega} v = v$ を得る．即ち H_φ は v の isotropy 群として閉部分群であり，

$H(\Lambda) = \bigcap_{\varphi \in \Lambda} H_\varphi$ はその intersection として同様である． ┘

系 31. (1) Ω の subalgebra Σ に属する正定符号函数の全体 Φ_Σ は Φ の subalgebra である．

(2) Σ の ideal Σ_0 に属する正定符号函数の全体 Φ_{Σ_0} は又，Φ_Σ の ideal である． ┘

証明. (1) は補題 30,(2) より．(2)は，表現のテンソル積に属する正定符号函数は，夫々の函数の積なる事より従う． ┘

系 32. $\forall h_1, h_2 \in H_\varphi$, $\forall g \in G$ で $\varphi(h_1 g h_2) = \varphi(g)$. ┘

証明. H_φは，$\varphi(g) = \langle T_g^{\omega} v, v \rangle$ の v の isotropy 群であるから． ┘

補題 33. $\forall \varphi \in \Phi$ に対し，φ ではられる subalgebra Φ_φ の元 φ_0 で，(1) $\varphi_0(e) = 1$，(2) $H_\varphi = \{ g \in G \, / \, |\varphi_0(g)| = 1 \}$

(3) $\varphi_0 \geq 0$，　　となるものがある． ┘

証明. $\varphi_0 \equiv \{ (\varphi + \bar{\varphi})^2 + \varphi + \bar{\varphi} \}^2 / 4 \{ 2\varphi(e)^2 + \varphi(e) \}^2$ が上を満す． ┘

補題 34. Φ の可算部分集合 Λ のはる subalgebra Φ_Λ の元 φ_0 で $H_{\varphi_0} = H(\Lambda)$ となるものがある． ┘

証明. $\Lambda = \{ \varphi_j \}$ とする．補題 33 により，各 φ_j は，$\varphi_j \geq 0$, $\varphi_j(e) = 1$ としてよい．こゝで，$\varphi_0 \equiv \sum 2^{-j} \varphi_j$ と置くとよい． ┘

補題 35. G を σ-コンパクトとする．G の巡回表現 ω に属する正定符号函数の全体のはる subalgebra Φ_ω の元 φ_0 をとり

$$H(\{\omega\}) = H(\Phi_\omega) = H_{\varphi_0}$$ と出来る．

証明．G が σ-コンパクトの仮定から，ω の表現空間 $\mathfrak{H}^\omega$ は separable である．従って $\mathfrak{H}^\omega$ 中の可算な稠密集合 $\{v_j\}$ をとって，$\varphi_0(g) \equiv \sum_j 2^{-j} \|v_j\|^{-2} \langle T_g^\omega v_j, v_j \rangle$ とすればよい．

補題36. G の閉部分集合の族 $\{F_\alpha\}$ が $\bigcap_\alpha F_\alpha = \{e\}$ を満すとする．この時，G の任意のコンパクト集合 C と，e の近傍 U に対し，有限ケの F_j を $\{F_\alpha\}$ からとり $\bigcap_j F_j \cap C \subset U$ と出来る．

証明．U は開集合としてよい．$C - U$ はコンパクトで $\{e\}$ を含まないから，$\bigcup_\alpha F_\alpha^c \supset G - \{e\} \supset C - U$ で有限開被覆 $\{F_j^c\}$ をとり，$\bigcup_j F_j^c \supset C - U$．すなわち $\bigcap_j F_j \cap C \subset U$．

補題37. G を σ-コンパクト，$H(\Lambda) = \{e\}$ とする．この時 G 上の一様連続函数 f に対して，Λ の可算部分集合 $\{\varphi_j\}$ をとり，f は $\bigcap_j H_{\varphi_j}$-cosetwise の函数と出来る．

証明．f は一様連続だから，G の e の近傍の列 V_n を $V_n \supset V_{n+1}$ と取って，$g_1^{-1}g_2 \in V_n$ なら $|f(g_1) - f(g_2)| < 1/n$ と出来る．$G = \bigcup_n C_n$ を $C_n \subset C_{n+1}$ となるコンパクト被覆とすると，補題36.より各 n について，Λ の有限部分集合 $\{\varphi_{n,j}\}_{n,j}$ があり，$\bigcap_j H_{\varphi_{n,j}} \cap C_n \subset V_n$ と出来る．$\{\varphi_{n,j}\}_{n,j}$ を並べ直して $\{\varphi_j\}$ と書くと，$\bigcap_j H_{\varphi_j} = \bigcap_j H_{\varphi_j} \cap G \subset \bigcap_n V_n$ となる．即ち，$g_1^{-1} g_2 \in \bigcap_j H_{\varphi_j}$ なら $\forall n$ で $|f(g_1) - f(g_2)| < 1/n$ i.e. $f(g_1) = f(g_2)$ となる．

<u>系38.</u> 補題37の$\{\varphi_j\}$は，Λのある subalgebra Φ_Λの1つの元φ_0でおきかえられる．すなわち f は G/H_{φ_0} 上の函数となる．

<u>証明.</u> 補題37に補題34を適用すればよい．

<u>系39.</u> 補題37で $^\exists\varphi\in\Phi/H_\varphi$ は正規且 $f\in C(G/H_\varphi)$．

<u>証明.</u> 系38に補題35を適用すれば $H_{\varphi_0}=H(\{\omega\})$ としてよい．

<u>補題40.</u> Ωの subalgebra Σに属する正定符号函数の全体Φ_Σの元φと，Gの有限ヶの元$\{g_j\}$，有限ヶの数の組$\{a_j\}$に対して，$\sum_{j,k} a_j\bar{a}_k\varphi(g_j g g_k^{-1})$ は又Φ_Σに入る．

<u>証明.</u> φをΣの元ωと$\mathfrak{H}^\omega$のベクトルvとで $\varphi(g)=\langle T_g^\omega v, v\rangle$ と示せば，$\sum_{j,k} a_j\bar{a}_k\varphi(g_j g g_k^{-1})=\langle T_g^\omega(\sum_k a_k T_{g_k^{-1}}^\omega v), (\sum_j a_j T_{g_j^{-1}}^\omega v)\rangle$ は又ωに属する正定符号函数である．

<u>系41.</u> $^\forall\varphi\in\Phi_\Sigma$, $^\forall f\in C_0(G)$ について，

$$f^* * \varphi * f(g) \equiv \iint f(g_1)\overline{f(g_2)}\,\varphi(g_2 g g_1^{-1})\,d_r g_1\,d_r g_2$$ は又Φ_Σに入る．

証明. Gの任意のコンパクト部分集合Cと$^\forall\varepsilon>0$に対し，eの近傍Vを，$^\forall g\in G$, $^\forall g_1\in V$ で $|f(g_1 g)-f(g)|<\varepsilon$ 及び，$^\forall g_1, g_2\in V$，$^\forall g\in[f]C[f]^{-1}$で $|\varphi(g_1 g g_2^{-1})-\varphi(g)|<\varepsilon$ を満す様にとる．コンパクト集合$[f]$を $g_j\in[f]$をとって，$[f]\subset\bigcup_j Vg_j$ と有限被覆し，それにより $[f]=\sum E_j$ (disjoint) と $E_j\subset Vg_j$ なる可測集合の有限和に分割する。この時

$$\varphi_\varepsilon^C(g)\equiv\sum_{j,k}(\mu(E_j)f(g_j))\overline{(\mu(E_k)f(g_k))}\,\varphi(g_k g g_j^{-1})$$ はΦ_Σに入り，C上で一様に $f^* * \varphi * f$ に近い．

<u>補題42.</u>　$\varphi(e)=1$ なる正定符号函数 φ で $H_\varphi=\{e\}$ であったとする.　$\Pi_n \equiv \{g\in G \mid |1-\varphi(g)| \leqq 1/n\}$ とおけば, 任意の e のコンパクト近傍 C に対して, $\{C\cap\Pi_n\}_n$ は e の基本近傍系となる.　┘

<u>証明.</u>　Π_n は e を内点として含み, 又 $H_\varphi=\bigcap_n \Pi_n=\{e\}$ であるから, 補題36. より任意の e の近傍 V で $\exists n \,/\, C\cap\Pi_n\subset V$.

<u>補題43.</u>　Ω の subalgebra Σ が $H(\Sigma)\,(=H(\Phi_\Sigma))=\{e\}$ であったとすれば, Φ_Σ は G の正則表現 $\mathcal{R}$ に属する正定符号函数を全て含む.　┘

<u>証明.</u> (1) $\mathcal{R}$ に属する正定符号函数は, $\langle R_g v, v\rangle$ $(v\in L^2(G))$ の形の函数の広義一様極限である. そして $C_0(G)$ が $L^2(G)$ で稠密である事から, v としては $C_0(G)$ の元 f としてよい. つまり $\forall f\in C_0(G)$ で $\langle R_g f, f\rangle\in\Phi_\Sigma$ を示せば十分である. そしてその為には, G の任意のコンパクト集合 C について, $\forall\varepsilon>0$ で, C 上で $f^* * f$ に一様に ε 以下の差で近い Φ_Σ の元の存在を云えばよい.

(2) C と $[f]$ により生成される G の開部分群 G_0 を考える. G_0 は σ-コンパクトであるから, 補題37, 系39 により Φ_Σ の一つの元 φ によって, $f\in C_0(G_0/G_0\cap H_\varphi)$ としてよい. こゝで $H_0\equiv G_0\cap H_\varphi$ は G_0 の閉正規部分群にとれる. $(\varphi\geqq 0)$

(3) 以下適当に $a_n>0$ をとれば, C 上で $\{a_n(f^* * \varphi^n * f)\}_n$

が $f^* * f$ に一様に近付く事を示す。系41より $f^* * \varphi * f$ は Φ_Σ に入り、これより補題43.は直ちに従う。先ず、C, $[f]$ は G_0 に入って居るから、φ^n も G_0 に制限して G_0 上の正定符号函数と考えれば、元々 $G=G_0$ であったとしてよい。

(4) 又 G_0 の閉正規部分群 H_0 の coset 上で、f も φ も一定値をとるから、G_0/H_0 上の函数として考えて、すなわち $H_0=\{e\}$ として証明すれば十分である。

(5) $\forall \varepsilon>0$ を固定し、e のコンパクト近傍 V を、$\forall g\in G$, $\forall g_1\in V$ で $|f(g_1 g)-f(g)|<\varepsilon$ となる様にとる。

$C_1 \equiv [f]\,C^{-1}[f]^{-1}$, $a_n \equiv \left(\int_V (\varphi(g))^n d_r g\right)^{-1}$ とおく。

補題42.より $\exists m \,/\, U_m \cap C_1 \subset V$, 但し $U_m \equiv \{g\in G \,/\, 1-\varphi(g)\leqq 1/m\}$, こゝで $b\equiv \mu(U_{m+1}\cap C_1)>0$ とおく。 $M_f \equiv \max_{g\in G}|f(g)|$, $\|f\|_1 \equiv \int |f(g)|\,d_r g$ とする。

$$\int_V \varphi^n(g)\,d_r g \geqq \int_{U_{m+1}\cap C_1}\left(1-\left(\frac{1}{m+1}\right)\right)^n d_r g = b\left(\frac{m}{m+1}\right)^n.$$

従って、$a_n \leqq b^{-1}\left(\frac{m+1}{m}\right)^n$. 一方 $\forall g\in C_1-V$ で

$(\varphi(g))^n < \left(1-\left(\frac{1}{m}\right)\right)^n = \left(\frac{m-1}{m}\right)^n$ より、

$$a_n(\varphi(g))^n < b^{-1}\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right)^n, \quad \forall g\in C_1-V.$$

さて、

$$|\langle R_g f, f\rangle - a_n(f^* * \varphi^n * f)(g)| \leqq$$

$$\leqq \left|\int f(g_2 g)\overline{f(g_2)}\,d_r g_2 - a_n \iint f(g_1)\overline{f(g_2)}\,(\varphi(g_2 g g_1^{-1}))^n d_r g_1 d_r g_2\right|$$

$$\leqq \int |f(g_2)|\,d_r g_2 \left\{\left| f(g_2 g) - a_n\int f(g_1 g_2 g)(\varphi(g_1^{-1}))^n d_r g_1\right|\right\}$$

$$\leqq \int |f(g_2)|\, dr g_2 \left\{ \left| \int_V a_n f(g_2 g)(\varphi(g_1))^n dr g_1 - a_n \int_V f(g_1 g_2 g)(\varphi(g_1))^n dr g_1 - a_n \int_{V^c} f(g_1 g_2 g)(\varphi(g_1))^n dr g_1 \right| \right\}$$

$$\leqq \int |f(g_2)|\, dr g_2 \left\{ a_n \int_V |f(g_2 g) - f(g_1 g_2 g)| (\varphi(g_1))^n dr g_1 + a_n \int_{C_1 \cap V^c} M_f (\varphi(g_1))^n dr g_1 \right\}$$

$$\leqq \|f\|_1 \left\{ \varepsilon\, a_n \int_V (\varphi(g))^n dr g + \int_{C_1 \cap V^c} M_f\, b^{-1} \left(\frac{m^2-1}{m^2} \right)^n dr g \right\}$$

$$= \|f\|_1 \left\{ \varepsilon + M_f \mu(C_1)\, b^{-1} \left(\frac{m^2-1}{m^2} \right)^n \right\}.$$

$\left(\frac{m^2-1}{m^2}\right) < 1$ より，n を十分大にとれば，右辺の第2項は十分小となり，ε は任意であったから求める結果を得た。

補題25. の証明．　閉正規部分群 $H(\Sigma)$ に対して，Σ 及び $\Omega(H(\Sigma))$ は，$\Sigma(H(\Sigma)) \equiv \Omega_{G/H(\Sigma)}$ に入りその subalgebra と考えてよい。$\Omega_{G/H(\Sigma)}$ での Fell位相は，Ω に埋め込んだ時の相対位相と一致するから，$\Omega_{G/H(\Sigma)}$ の中丈で話をしてよい。すなわち，G を元々 $G/H(\Sigma)$ と考え，$H(\Sigma)$ は $\{e\}$ であったとしてよいが，此の形にすれば，補題25. は補題43. の直接の結果である。

§4.　§3 での正定符号函数の議論は，φ を $\varphi(g)=\langle T_g v, v\rangle$ $(\forall g \in G)$ なる全てのベクトルの族と対応させる事により，表現空間のベクトルの集合の話におきかえる事が出来る。只こゝで，Φ の subalgebra の定義に次の条件を加えておく。

(B－5)　$\varphi_1 \in \Phi$ で，$\varphi \in \Phi$ が $\varphi_1 > \varphi$ なら $\varphi \in \Phi$.

定義44. $\tilde{\omega} \equiv \sum_{\omega\in\Omega}\oplus\, \omega \equiv \{\sum_{\omega\in\Omega}\oplus\, \mathfrak{H}^{\omega}, \sum_{\omega\in\Omega} T_g^{\omega}\} \equiv \{\mathcal{V}, \tilde{T}_g\}$ と書き，natural に $\oplus, \otimes, *$ を導入して考える。

定義45. $\mathcal{V}$ の部分集合 $\mathcal{M}$ が，subalgebra であるとは，

(C-1) $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{M}$ で $v_1 \oplus v_2 \in \mathcal{M}$.

(C-2) $\forall a \in \mathbb{C}$, $\forall v_1, v_2 \in \mathcal{M}$ で $v_1 \otimes v_2 \in \mathcal{M}$, $a v_1 \in \mathcal{M}$.

(C-3) $\forall v \in \mathfrak{H}^{\omega} \cap \mathcal{M}$ なら $\mathfrak{H}^{\omega^*}$ の対応ベクトル $v^* \in \mathcal{M}$.

(C-4) $\{v_\alpha\} \subset \mathcal{M}$ で，$\langle \tilde{T}_g v_\alpha, v_\alpha \rangle$ が $\langle \tilde{T}_g v, v \rangle$ に広義一様に収束するならば，$v \in \mathcal{M}$.

(C-5) $w \in \mathcal{V}$ に $\exists v \in \mathcal{M}$ で $\langle \tilde{T}_g v, v \rangle \succ \langle \tilde{T}_g w, w \rangle$ なら $w \in \mathcal{M}$.

定義46. $\mathcal{M}$ の部分集合 $\mathcal{M}_0$ が ideal であるとは，

(1) $\mathcal{M}_0$ は $\mathcal{V}$ の subalgebra である。

(2) $\forall v \in \mathcal{M}$, $\forall v_0 \in \mathcal{M}_0$ について $v \otimes v_0 \in \mathcal{M}_0$.

定義47. $S (\subset G)$ の ($\mathcal{V}$ での) annihilator とは，

$\mathcal{M}(S) \equiv \{ v \in \mathcal{V} \,/\, \tilde{T}_g v = v, \forall g \in S \}$.

定義48. $\gamma (\subset \mathcal{V})$ の (G での) annihilator とは，

$H(\gamma) \equiv \{ g \in G \,/\, \tilde{T}_g v = v, \forall v \in \gamma \}$.

特に $\gamma = \{v_0\}$ なら，$H_{v_0} \equiv H(\{v_0\})$ と示す。

此れ等は，定義26～29の云い替えに過ぎないが，記述が簡便になるので以下此の言葉を用いる。補題30以下の命題も此の用語で置き替えられる事は，容易に示される。

補題49. $\mathcal{M}$ を $\mathcal{V}$ の subalgebra とする。この時，

(1) $\mathfrak{M}$ は $\mathfrak{H}$ の閉部分空間である。

(2) $v \in \mathfrak{H}^{\omega} \cap \mathfrak{M}$ とすれば，$\mathfrak{H}^{\omega}$ と $\mathfrak{H}^{\omega_1}$ の間の intertwining 作用素によって v の像となる $\mathfrak{H}^{\omega_1}$ のベクトル w は $\mathfrak{M}$ に入る。┘

証明. (1) $v_1, v_2 \in \mathfrak{H}^{\omega} \cap \mathfrak{M}$ として示せばよいが、更に (C-2) よりスカラー倍してよいから，$v_1 + v_2 \in \mathfrak{M}$ を示す。$\mathfrak{H}^{\omega\oplus\omega} \cong \mathfrak{H}^{\omega} \oplus \mathfrak{H}^{\omega} \ni w_1 \oplus w_2 = \frac{1}{2}\{[(w_1+w_2)\oplus(w_1+w_2)] + [(w_1-w_2)\oplus(w_2-w_1)]\}$ と書くと，$\mathfrak{H}^{\omega\oplus\omega}$ の直交分解に対応し，

$$\langle T_g^{\omega\oplus\omega}(v_1\oplus v_2), (v_1\oplus v_2)\rangle \succ \frac{1}{4}\langle T_g^{\omega\oplus\omega}[(v_1+v_2)\oplus(v_1+v_2)], [(v_1+v_2)\oplus(v_1+v_2)]\rangle$$

で (C-5) により $(v_1+v_2)\oplus(v_1+v_2) \in \mathfrak{M}$ だが (C-4) により，同じ正定符号函数に対応する v_1+v_2 も又 $\mathfrak{M}$ に入る。

(2) intertwining 作用素が部分等長なら (C-4) (C-5) により明らか。そうでない時は極分解して，正定値自己共役としてよい。スペクトル分解を考えると，分解の射影写像による v の像は全て (C-5) により $\mathfrak{M}$ に入るから，(1) によってその和の極限も $\mathfrak{M}$ に入る。 ┘

扨て，$H\varphi$ や Hv が正規とは限らぬ閉部分群となる事から，§2 の主定理を正規閉部分群のみではなく，一般の閉部分群に迄拡大出来ぬかという問題が生じる。主定理の (2) は補題22. がある意味で肯定的結論を与えて居ると考えられる。又 (3) については，G/H の dual の意味が明確でないので，適切な定式化を要する。此処では (1) をとり上げて見る。

例 50. $G = SL(2,\mathbb{C}) \equiv \{g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} / ad-bc=1,\ a,b,c,d\in\mathbb{C}\}$,
$H = \{h = \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \in G\}$ とすると，Gの任意の既約ユニタリ表現のHへの制限は，Hの表現として又既約である。(cf. I.M. Gelfand - M.A. Naimark [2]).

例50は，補題7の閉部分群への拡張を否定するものであり，従って一般の閉部分群を $\mathcal{U}$ のある subalgebra の annihilator として特長づける事は出来ない。しかし特別な閉部分群については次の結果がある。

定義 51. Gの正則表現の multiple の部分表現 ω の表現空間 $\mathfrak{H}^{\omega}$ 全体からはられる $\mathcal{U}$ の部分空間を $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ と書く。$\mathcal{U}$ の subalgebra と $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ の積集合を $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ の subalgebra という。

命題 52. (竹崎-辰馬) ([3] Theorem 9).

(1) Gの任意のコンパクト部分群Hに対して，

$$H = H(\mathcal{M}(H) \cap \mathcal{U}_{\mathcal{R}}).$$

(2) $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ の任意の subalgebra $\mathcal{M}_{\mathcal{R}}$ に対し，$H(\mathcal{M}_{\mathcal{R}})$ はコンパクト群であり，$\mathcal{M}(H(\mathcal{M}_{\mathcal{R}})) \cap \mathcal{U}_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_{\mathcal{R}}$.

(3) 上の対応によりGのコンパクト部分群の全体と，$\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ の subalgebra の全体は 1-1 に対応する。

[注意] 上記の[3] Theorem 9 は少し異った形で与えられて居るが，$\mathcal{M}_*(G)$ は $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ と対応し，定義45 の subalgebra の条件 (C-4) は right invariant, (C-3) は self-adjoint, (C-1)(C-2)

が subalgebra である事を夫々導く事から命題5.2が出る。」

従って次にどの様なGの閉部分群や，又どの様な$\mathcal{W}$の sub-algebra に対して，同様な事が成立するか？と云った問題が生じるが，此の解決はまだ判って居ない。

たとえば，Gの閉部分群Hについて，$\mathrm{Ind}\{1/H\to G\}|_H$ に入るH-不変ベクトルの全体の弱閉包は$\mathcal{W}(H)$の ideal を作る事は簡単に云えるが，此の事はこの様なH-不変ベクトルが十分多くある事を保証するものではない。そして§3の主定理の証明を真似て，$\mathrm{Ind}\{1/H\to G\}$ に対応する正定符号測度 $(J(h))^{1/2}d_rh$ を考え，測度の弱収束の意味でこれを極限とする正定符号函数より作られる測度の列 $\varphi_j(g)d_rg$ をとって，更に $c_n>0$ を $c_n(\varphi_j(g))^n d_rg$ が弱収束する様に定める様な事を考えても，その極限としてGの正則表現が表われる例もある。

文　献

[1] J.M.G. Fell, Weak containment and induced representations of groups, Can. J. Math., 14 (1962), 237-268.

[2] I.M. Gel'fand & M.A. Naimark, Unitary representations of the classical groups, Trudy Math. Inst. Steklov 36 (1950), (Russian)

[3] M. Takesaki & N. Tatsuuma, Duality and subgroups, Ann. of Math. 93 (1971), 344-364.