数理解析研究所講究録
第 263 巻 1976 年 77-83

二セ金発見パズルについて

京大・数研　佐藤雅彦

『12枚の硬貨があり，うち1枚だけ二セ金で目方が違う．天秤を3回用いて，二セ硬貨を見つけ，軽重も決定せよ．』この問題は有名な問題で，一般化された問題について「情報理論」的方法をはじめ，色々な解法が知られている．そのような解法のひとつに，硬貨の測定方法を，測定を始める前に完全に指定するという，いわば，uniform な方法が存在する．ここでは Smith [1] による解法を少し整理して紹介する．

N枚（$N \geq 3$）の硬貨が与えられたとし，n 回の測定で二セ硬貨が決定できるか調べてみる．次のように記号を定める．

$I = \{1, 2, \cdots, N\}$ ：硬貨の番号

$T = GF(3) = \{0, \pm 1\}$ ：3元体

T^n ： T 上の n 次元 vector 空間

$G = T^{\times} = \{\pm 1\}$

$PG(T^n) = T^n - \{0\}/G$ ： T 上の $n-1$ 次元射影空間

Def. 1 $\mu : I \longrightarrow T^n$ が measure algorithm

$$\Longleftrightarrow \quad \forall i \in I \quad |\mu^{-1}(U_i^+)| = |\mu^{-1}(U_i^-)| .$$

ただし, $U_i^{\pm} = \{ (x_1, \cdots, x_n) \in T^n \mid x_i = \pm 1 \}$ (複号同順).

$\mu(i) = (\mu_1^i, \cdots, \mu_n^i)$ は1回目からn回目の測定で硬貨iをどのように測定するかを指定している. すなわち:

$$\mu_j^i = \begin{cases} -1 & \Longrightarrow \ j\text{回目には左の皿に乗せる} \\ 0 & \Longrightarrow \ 〃 \ \text{測定しない} \\ +1 & \Longrightarrow \ 〃 \ \text{右の皿に乗せる}. \end{cases}$$

毎回, 左右の皿に乗せる硬貨の数は同数であるべきだから Def. 1 が要請される.

Def. 2 $\nu : I \longrightarrow T$ が problem function

$$\Longleftrightarrow \quad |\nu^{-1}(0)| = N - 1$$

にせ金は一枚だけあるがその番号をjとするとき

$$\nu(i) = \begin{cases} -1 & \text{if } i = j \wedge j \text{ が他よりも軽い} \\ 0 & \text{if } i \neq j \\ +1 & \text{if } i = j \wedge j \text{ が他よりも重い} \end{cases}$$

で問題が与えられていると考えるのである.

νとμが与えられれば, 測定結果 $y \in T^n$ は次のようにな

る;　　$\Upsilon = \mathrm{sgn}(v)\cdot\mu(v^{-1}(\mathrm{sgn}(v)))$.

ただし，$\mathrm{sgn}(v) = \sum_{i=1}^{N} v(i)$. Υ のイミは次の通り.

$$r(i) = \begin{cases} -1 & \text{if } i \text{ 回目に右の皿が上る} \\ 0 & \text{if } \quad〃 \quad \text{釣合う} \\ +1 & \text{if } \quad〃 \quad \text{右の皿が下る} \end{cases}$$

Def. 3　　μがvに関して correct

$\Longleftrightarrow$　　$\Upsilon \neq 0 \ \wedge \ |\mu^{-1}(\{r, -r\})| = 1$.

このような場合に限って，ニセ金および軽重を決定できることはあきらかであろう.

Def. 4　　μが complete $\Longleftrightarrow$ $\forall v$ について correct.

complete な algorithm を見つけることが問題になる. $\mathrm{Im}\,\mu \not\ni 0$ ならば，自然に $\tilde{\mu} : I \longrightarrow PG(T^n)$ が定まる.

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\mu"] \arrow[dr, "\tilde{\mu}"'] & T^n - \{0\} \arrow[d, "\text{natural map.}"] \arrow[dl, phantom, "\circlearrowright"] \\ & PG(T^n) \end{tikzcd}$$

このとき，μが complete であることは次のように言い換えられる.

Prop. 5 μ : complete $\Longleftrightarrow$ $\tilde{\mu}$ が定ぎできて injective.

Cor. 6 $N \leqq (3^n - 1)/2$.

ここで $N = (3^n - 1)/2$ と仮定すれば、$\tilde{\mu}$ は bijection になるが、これは、$|\mu^{-1}(U_i^+)| + |\mu^{-1}(U_i^-)| = 3^{n-1} = \mathrm{odd}$ を意味し、μ の定ぎに反する。従って、$N \leqq (3^n - 3)/2$ でなければならない。以下 $N = (3^n - 3)/2$ の場合について議論する。μ が measure algorithm なら、次のようにして作った $\tau\circ\mu\circ\sigma$ もそうである。

$$I \xrightarrow{\sigma} I \xrightarrow{\mu} T^n \xrightarrow{\tau} T^n$$

ただし、$\sigma \in S_I$ (番号のつけ変え)、$\tau \in GL(T^n)$ で、τ は '立方体' $C_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid x_i \in G \ (i = 1, \cdots, n)\}$ を setwise に fix する。(τ は、皿の左右のとり変え、測定の順序の入れ変えで生成される多群 G_n の元である)

ところで、$N = (3^n - 3)/2$ のとき、μ を complete とすれば、$\mathrm{Im}(\tilde{\mu}) = PG(T^n) - [u]$ と書けるが、先と同様の論法で $u \in C_n$ であることが分る。

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & u_n \end{pmatrix}$$

とおけば、$\tau(u) = (u_1^2, \cdots, u_n^2)^t = (1, \cdots, 1)^t$ となるから、

μの変りに$\tau\circ\mu$を考えれば，$u=(1,\cdots,1)^t$としてよい．
更に，$\left|\mu^{-1}(U_i^{\pm})\right| = \frac{1}{2}(3^{n-1}-1) = \frac{N}{3}$であることも分る．すなわち，毎回左右の皿に$N/3$枚ずつ硬貨をのせるべきである．
$\Delta_n = \{(x_1,\cdots,x_n)\in T^n \mid x_1=\cdots=x_n\}$とおき，$\mu$に対して
$\varphi_\mu : T^n \longrightarrow T$ を次のように定める．

$$\varphi_\mu(x) = \begin{cases} -1 & \text{if} \quad -x\in \mathrm{Im}(\mu) \\ 0 & \text{if} \quad \pm x \notin \mathrm{Im}(\mu) \\ +1 & \text{if} \quad x\in \mathrm{Im}(\mu) \end{cases}$$

<u>Prop. 7</u>　μが complete $\Longleftrightarrow$ $\exists\tau\in G_n$　$\varphi=\varphi_{\tau\circ\mu}$が次の条件をみたす．

(i)　$\forall x\in T^n$　$\varphi(x) = -\varphi(-x)$

(ii)　$\varphi^{-1}(0) = \Delta_n$

(iii)　$\forall i$　$\left|\varphi^{-1}(1)\cap U_i^{\pm}\right| = \frac{1}{3}N$

問題は，このようなφが存在するかどうかであるが，次のようにして少くとも1つ作ることができる．

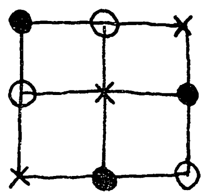
$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -1 \\ -1 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば $\mathrm{Ker}\,\delta = \Delta_n$ である。また、$x (\neq 0) \in T^n$ に対して $\#(x)$ を $x = (x_1, \cdots, x_n)$ の要素 x_i で 0 でない最初のものとする。

<u>Prop. 8</u>　$\varphi = \# \circ \delta$ は Prop. 7 の条件を満たす。

<u>問題. 9</u>　Δ_n を setwise に fix するような $\tau \in G_n$ に関しては、φ と $\varphi \circ \tau$ は本質的に同じものとみなせる。n が与えられたときに、prop. 7 を満たす φ で本質的に異なるものを決定せよ。

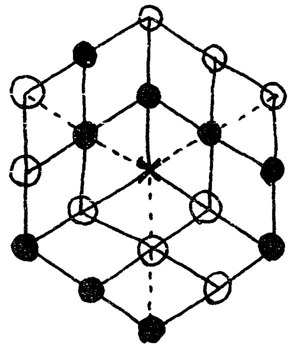
$n = 2$ のときは、明らかに解は次のように unique である。



(○ = −1 , ● = 1 , × = 0)

N = 3

Prop. 8 で与えた φ は一般に次の性質を持っている。すなわち、$d = (1, \cdots, 1)$ とおくとき、任意の $x \in T^n$ に対して $\varphi(x) = \varphi(x + d) = \varphi(x - d)$ となる。従って、解を図示するときに、Δ_n が1点に見えるような方向からの図ですませることができる。例えば $n = 3$ のときは次のようになる。



n = 3 の場合には、これ以外にも解があるが、全部で何通りになるかは調べていない。

文　献

[1]　C.A.B. Smith, The counterfeit coin problem, The Mathematical Gazette, vol.31 (1947), 31-39

[2]　M. Gardner, "Martin Gardner's Sixth Book of Mathematical Games from Scientific American," W.H Freeman and Company