数理解析研究所講究録
第 264 巻 1976 年 193-207

Navier-Stokes方程式の数値解法について

電気通信大学　情報数理工学科　中村正彰

Navier-Stokes方程式の差分法を用いた近似解法は、多くの人々によって研究されてきた。とくに Krževicki-Ladyzenskya は Energy method を用いて、Implicit scheme の安定と収束を示した。

From，高見は、流れの関数を用いて、div u=0 の部分の難しさを、克服しようとしたが、Temam は、div u ≠ 0 なる関数で解を近似しようとして Cauchy-Kowaleskya type の方程式を導入して、分数差分法によって安定と収束を示した。

ここでは、境界の動く場合について、処罰法を用いて解の存在と単独性を示した藤田の理論にならって、Penalty のついた方程式を、Caychy-Kowalerskya type にして、陽差分 scheme を用いて近似する。そしてその scheme の安定と収束を論ずることにしたい。

§§Notation

$T > 0$.

$\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域. $t \in [0, T]$, 境界は滑らか.

$\Gamma(t) = \partial\Omega(t)$, $\hat{\Gamma} = \bigcup_{t\in[0,T]} \Gamma(t)$, $\hat{\Omega} = \bigcup_{t\in[0,T]} \Omega(t)$

$B \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域. ∂B 滑らか. $\Omega(t) \subset B$.

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域. $\partial\Omega$ 滑らか.

$D_\sigma(\Omega) = \{ \varphi \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}\varphi \subset \Omega,\ \operatorname{div}\varphi = 0 \}$

$H_\sigma(\Omega) =$ $D_\sigma(\Omega)$ の $L_2(\Omega)$ norm に対する完備化

$V(\Omega) =$ $D_\sigma(\Omega)$ の $H_0^1(\Omega)$ norm に対する完備化

$\hat{G} \subset [0, T] \times \mathbb{R}^2$ 有界領域.

$\hat{D}_\sigma(\hat{G}) = \{ \varphi \in C^\infty(\hat{G}) \mid \operatorname{supp}\varphi \subset \hat{G},\ \operatorname{div}\varphi = 0 \}$

$\hat{V}(\hat{G}) =$ $\hat{D}_\sigma(\hat{G})$ の $\|\cdot\|_V$ norm に対する完備化

$$\|u\|_V = \iint_{\hat{G}} |\nabla u|^2 dx\, dt.$$

$\mathcal{D}_\sigma(\hat{G}) = \{ \varphi \in \hat{D}_\sigma(\hat{G}) \mid \varphi(T, x) = 0 \}$

$\mathcal{U}(\hat{\Omega}) = \{ u \in \hat{V}(\hat{G}) \mid \operatorname{ess.sup}_{t\in[0,T]} \|u(t,\cdot)\|_{L^2(\Omega(t))} < \infty \}$

§1.

まず問題と定理をあげておく.

領域に対する仮定.

(AI). $\forall t \in [0, T]$. $\Omega(t) \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域. $\Gamma(t) = \partial\Omega(t)$ 滑らか

(AII). $\exists B \subset \mathbb{R}^2$ 有界領域. ∂B 滑らか.

$$\Omega(t) \subset B \quad \forall t \in [0, T], \quad dist(\partial B, \Gamma(t)) > \delta_0 > 0 \quad \forall t.$$

(AIII) $\Omega(t)$ は t に関して滑らか.

問題I.

$u_0 \in H_\sigma(\Omega(0))$, $f \in L_2(0, T, H_\sigma)$ が与えられたとき.

$u \in L_2(0, T, V(\Omega(t))) \cap L_\infty(0, T, H_\sigma(\Omega(t)))$ で

$$\int_0^T \{-(u, \varphi'(t))_t + \nu((u(t), \varphi(t)))_t + b(u(t), u(t), \varphi(t))_t\} dt$$
$$= \int_0^T (f(t), \varphi(t))_t \, dt + (u_0, \varphi(0))_0 \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}_\sigma(\hat{Q})$$

を見つけよ.

問題II.

$u_0 \in H_\sigma(\Omega(0))$, $p_0 \in L_2(\Omega(0))$, $f \in L_2(0, T, H_\sigma)$ given.

Find. $u_{\varepsilon n} \in L_2(0, T, H_0^1(B)) \cap L_\infty(0, T, L_2 \quad)$

$p_{\varepsilon n} \in L_\infty(0, T, L_2(B))$ such that

$$\int_0^T \{-(u_{\varepsilon n}(t), \varphi'(t))_t - \varepsilon(p_{\varepsilon n}(t), \psi'(t))_t + \nu((u_{\varepsilon n}(t), \varphi(t)))_t$$
$$+ n(\chi u_{\varepsilon n}; \varphi(t))_t + b(u_{\varepsilon n}(t), u_{\varepsilon n}(t), \varphi(t))_t$$

$$-\varepsilon(p_{\varepsilon n}(t),\ \mathrm{div}\,\varphi(t))_t + (\psi,\ \mathrm{div}\,u_{\varepsilon n}(t))\}dt$$
$$= \int_0^T (f(t), \varphi(t))dt + (u_0, \varphi(0)) + \varepsilon(p_0, \psi(0))$$
$$\varphi \in C(0,T,\ \overset{\circ}{H}{}^1(B)),\ \varphi' \in L_2(0,T,L_2(B)),\ \varphi(T)=0$$
$$\psi \in C(0,T,L_2(B)),\ \psi' \in L_2(0,T,L_2(B)),\ \psi(T)=0$$

ここで

i) $b(u,v,w)_t = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\int u_i\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i}w_j - v_j\frac{\partial w_j}{\partial x_i}\right)dx$

ii) $\chi(t,x) = 1 \quad x \notin \Omega(t), x\in B \qquad 0.\ x \in \Omega(t)$

(注1). $b(u,u,v) = (u\cdot\nabla u + \frac{1}{2}(\mathrm{div}\,u)\cdot u,\ v)_t$

従って $\mathrm{div}\,u = 0$ ならば $b(u,u,v) = (u\cdot\nabla u,\ v)$

また $b(u,v,v) = 0$

(注2) 問題IIの方程式は

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + u\cdot\nabla u + \frac{1}{2}(\mathrm{div}\,u)\cdot u + n\chi u + \nabla p = f \\ \varepsilon\frac{\partial p}{\partial t} + \mathrm{div}\,u = 0 \\ u\,|\,\partial B = 0 \\ u(0,x) = \bar{u}_0 \qquad p(0,x) = \bar{p}_0 \end{cases}$$

を分きなおしたものである。

Theorem I.

$\forall\varepsilon>0.\ \forall n>0$ fixed とすると

$\exists 1.\quad \left.\begin{array}{l} u_{\varepsilon n} \in L_\infty(0,T,L_2(B)) \cap L_2(0,T,V) \\ p_{\varepsilon n} \in L_\infty(0,T,L_2(B)) \end{array}\right\}$ 問題IIの解.

その上に

$$|u_{\varepsilon n}(t)|^2 + \int_0^T \|u_{\varepsilon n}(t)\|^2 dt + n\int_0^T |\chi u_{\varepsilon n}(t)|^2 dt + \varepsilon |p_{\varepsilon n}(t)|^2 \leq C$$

$$C = \text{const.}(u_0,\ p_0,\ \nu,\ T,\ f)$$

Theorem II.

$\varepsilon \downarrow 0$, $n \uparrow \infty$ のとき

$$u_{\varepsilon n} \longrightarrow w \quad \text{in} \quad L_2(0,T\ H_0^1(B)),\quad w^*\text{-}\ L_\infty(0,T\ L_2(B))$$

そして

$$u = w|\Omega(t) \quad \text{は 問題Iの解.}$$

注) Th 1. Th II の証明は省略するが、Th I は Galerkin 法で、存在を示し、単独性は $\mathbb{R}^2$ における Sobolev の補助定理を使う。Th II は、問題 I の解に対して Energy equality が成立することを利用して示す。

注) $\dfrac{\partial p_{\varepsilon n}}{\partial x_i} \longrightarrow \dfrac{\partial p}{\partial x_i}$ in $H^{-1}(B)$ $i=1,2$ も示すことができる。

§2. Explicit scheme.

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = h$, $\Delta t = k = T/N$,

$\Omega(h) = \{(ih, jh) \mid i, j \in \mathbb{Z},\ (ih, jh) \in \Omega\}$

$\Omega(h)^0 = \{(ih, jh) \in \Omega(h) \mid ((i\pm1)h, jh), (ih, (j\pm1)h) \in \Omega(h)\}$

$S(h) = \Omega(h) - \Omega(h)^0$

$B(h)$, $B(h)^0$, $B(h) - B(h)^0 = S(h)$ についても同じ

$$\tau(M,0) = \prod_{i=1}^{2} (\mu_i - \tfrac{1}{2}h,\ \mu_i + \tfrac{1}{2}h) \qquad M = (\mu_i h)$$

w_{hM} = $\tau(M,0)$ の定義関数

$$u_h(x) = \sum_{M \in B(h)} u_h(M)\, w_{hM}(x)$$

$$V_h = \{ u_h(x) \mid u_h(x) = \sum_{M \in B(h)^\circ} u_h(M)\, w_{hM}(x) \}$$

$$\nabla_i u_h(x) = \frac{1}{h}\{ u_h(x + h e_i) - u_h(x) \} \qquad e_i = (\delta_{ij})$$

$$\bar{\nabla}_i u_h(x) = \frac{1}{h}\{ u_h(x) - u_h(x - h e_i) \}$$

$$(u_h, v_h) = \int_B u_h(x) v_h(x)\, dx = h^2 \sum_{M \in B(h)} u_h(M) v_h(M)$$

$$|u_h|_h^2 = (u_h, u_h)$$

$$((u_h, v_h)) = h^2 \sum (\nabla_i u_h(M))(\nabla_i v_h(M)), \quad \|u_h\|_h^2 = ((u_h, u_h))$$

$$p_h : L_2(B) \longrightarrow V_h$$

$$(p_h u)(M) = \frac{1}{h^2} \int_{\tau(M,0)} u(x)\, dx. \qquad |p_h|_h \leq 1$$

$$f_h^m : L_2(0, T; L_2(B)) \longrightarrow V_h$$

$$p_h^m f = f_h^m = \frac{1}{k} \int_{(m-1)k}^{mk} (p_h f)(s)\, ds$$ とする.

Proposition 1.

1) $\forall u_h \in V_h$ に対して.

$$|u_h|_h \leq C_0 \|u_h\|_h \qquad C_0 = \text{diameter of } B.$$

2) $\forall u_h \in V_h$ に対して

$$\|u_h\|_h \leq S(h) |u_h|_h \qquad S(h) = \frac{2}{h}$$

(注) 1) は Poincare の不等式の差分化であり、2) は V_h が有限次元空間であることから簡単に示される。

Explicit scheme (I)

I-1) $\frac{1}{k}\{v_h^{m+1} - v_h^m\} - \nu\sum_{i=1}^{2}\bar{D}_i D_i v_h^m + g_h(v_h^m, v_h^m) + \frac{1}{2}(D_i+\bar{D}_i)p_h^m$

$$+ n\chi^m v_h^m = f_h^{m+1} \qquad B(h)^\circ$$

I-2) $\frac{1}{k}\{\varepsilon p_h^{m+1} - \varepsilon p_h^m\} + d_h(v_h^m) = 0 \qquad B(h)^\circ$

I-3) $v_h^{m+1} | S(h) = 0$

I-4) $p_h^{m+1} | S(h) = p_h^{m+1}(M)$ 　MはS(h)の点に最短距離にある格子点

I-5) $v_h^0 = \bar{u}_{0h}$

$p_h^0 = \bar{p}_h$

ここで

6) $d_h(v_h) = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{2}(D_i + \bar{D}_i)v_h^i$

7) $g_h(u_h, v_h)^j = \frac{1}{2}\sum_{i}^{2}\{u_h^i \cdot D_i v_h^j + (D_i u_h^i)\cdot v_h^j + \overset{tk}{u}{}_h^i \cdot D_i v_h^j\}$

$$\overset{tk}{u}_h = u(x + he_k)$$

8) $G_h(u_h, v_h, w_h) = (g_h(u_h, v_h), w_h)_h$ とする

するとS(h)で0となるような u_h、v_h、w_h に対しては

9) $G_h(u_h, v_h, v_h) = 0$

10) $|G_h(u_h, v_h, w_h)| \leq C$

$$\leq |u_h|^{\frac{1}{2}}\|u_h\|^{\frac{1}{2}}\{\|v_h\||w_h|^{\frac{1}{2}}\|w_h\|^{\frac{1}{2}} + |v_h|^{\frac{1}{2}}\|v_h\|^{\frac{1}{2}}\|w_h\|\}$$

証明はTemam「　」参照.

注) $g_h(u_h, u_h)$ は $u\cdot\nabla u + \frac{1}{2}(\mathrm{div}\,u)\cdot u$ の差分化である.

A priori estimate for Scheme I.

Theorem III.

(h, k) を

(1) $\nu - 5k\left[S(h)^2\{\nu^2 + 2Me^{KT}\} + \frac{2k}{\varepsilon}\right] \geq \delta > 0$

(2) $2 - 5kn \geq \delta$

(3) $K\varepsilon \geq 10kS(h)^2$

ととると $0 \leq {}^{\forall}m \leq N$ に対して

(4) $|v^{m+1}|^2 + \varepsilon|p^m|^2 \leq C$ 　　Cはε, k, n, hによらない。

(5) $k\sum_{j=0}^{m}\|v_h^j\|^2 \leq C$

(6) $k\sum_{j=0}^{m} n|\chi^j v^j|^2 \leq C$

ここで

M, Kはε, n, k, hによらない定数である。

（証明）

I-1)と$2kv_h^m$との内積をとり

I-1′) $|v_h^{m+1}|^2 - |v_h^m|^2 - |v_h^{m+1} - v_h^m|^2 + 2\nu k\|v_h^m\|^2 + 2kn|\chi^m v_h^m|^2$

$+ 2kG_h(v_h^m, v_h^m, v_h^m) + 2k(\frac{1}{2}(\nabla_i + \overline{\nabla}_i)p_h^m, v_h^m) = 2k(f_h^{m+1}, v_h^m)$

I-2)と$2kp_h^m$の内積をとり

I-2′) $\varepsilon|p_h^{m+1}|^2 - \varepsilon|p_h^m|^2 - \varepsilon|p_h^{m+1} - p_h^m|^2 + 2k(d_h(v_h^m), p_h^m) = 0$

一方 $(d_h(v_h^m), p_h^m) = -(v_h^m, \frac{1}{2}(\nabla_i + \overline{\nabla}_i)p_h^m)$

よって I-1′) + I-2′) は

$|v_h^{m+1}|^2 + \varepsilon|p_h^{m+1}|^2 - |v_h^m|^2 - \varepsilon|p_h^m|^2 + 2\nu k\|v_h^{m+1}\|^2 + 2kn|\chi^m v_h^m|^2$

$$= |v_h^{m+1} - v_h^m|^2 + \varepsilon |p_h^{m+1} - p_h^m|^2 + 2k(f_h^{m+1}, v_h^m)$$

一方

$$\left(\frac{\varepsilon}{k}\{p_h^{m+1} - p_h^m\},\ p_h^{m+1} - p_h^m\right) + (d_h(v_h^m),\ p_h^{m+1} - p_h^m) = 0$$

$$\begin{aligned} 2\varepsilon |p_h^{m+1} - p_h^m|^2 &= -2k(d_h(v_h^m),\ p_h^{m+1} - p_h^m) \\ &\leqq 2k\,|d_h(v_h^m)|\,|p_h^{m+1} - p_h^m| \\ &\leqq 2k\sqrt{2}\,\|v_h^m\|\,|p_h^{m+1} - p_h^m| \\ &\leqq \varepsilon |p_h^{m+1} - p_h^m|^2 + \frac{2k}{\varepsilon}\|v_h^m\|^2 \end{aligned}$$

また　（以後 v_h^m の h を省くことがある）

$$\begin{aligned} 2|v^{m+1} - v^m|^2 = &-2k\nu((v_h^m,\ v_h^{m+1} - v_h^m)) - 2kG_h(v_h^m, v_h^m, v_h^{m+1} - v_h^m) \\ &- 2kn(\chi v_h^m,\ v_h^{m+1} - v_h^m) - 2k(d_h(v^{m+1} - v^m),\ p^m) \\ &+ 2k(f^{m+1},\ v^{m+1} - v^m) \end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned} 2k\nu|((v^m,\ v^{m+1} - v^m))| &\leqq 2k\nu\|v^m\|\,\|v^{m+1} - v^m\| \\ &\leqq 2k\nu\, S(h)\|v^m\|\,|v^{m+1} - v^m| \\ &\leqq \frac{1}{5}|v^{m+1} - v^m|^2 + 5k^2\nu^2 S(h)^2\|v^m\|^2 \end{aligned}$$

$$2k|G_h(v_h^m, v^m, v^{m+1} - v^m)| \leqq \frac{1}{5}|v^{m+1} - v^m|^2 + 10k^2 S(h)^2|v_h^m|^2\|v_h^m\|^2$$

$$\begin{aligned} |2k(f^{m+1},\ v^{m+1} - v^m)| &\leqq 2k|f^{m+1}|\,|v^{m+1} - v^m| \\ &\leqq \frac{1}{5}|v^{m+1} - v^m|^2 + 5k^2|f^{m+1}|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |2kn(\chi^m v^m,\ v^{m+1} - v^m)| &\leqq 2kn|\chi v^m|\,|v^{m+1} - v^m| \\ &\leqq \frac{1}{5}|v^{m+1} - v^m|^2 + 5k^2n^2|\chi^m v^m|^2 \end{aligned}$$

$$|2k(d_h(v^{m+1} - v^m),\ p^m)| \leqq 2k\sqrt{2}|p^m|\,\|v^{m+1} - v^m\|$$

$$\leqq 2\sqrt{2}kS(\ell)|p^m||v^{m+1}-v^m|$$
$$\leqq \frac{1}{5}|v^{m+1}-v^m|^2+10k^2S(\ell)^2|p^m|^2$$

$$|2k(f^{m+1}, v^m)| \leqq 2k|f^{m+1}||v^m| \leqq 2kC_0|f^{m+1}|\|v^m\|$$
$$\leqq k\nu\|v^m\|^2+\frac{kC_0^2}{\nu}|f^{m+1}|^2$$

よってまとめると

$$|v^{m+1}|^2+\varepsilon|p_h^{m+1}|^2-|v^m|^2-\varepsilon|p^m|^2+(2-5kn)kn|\chi v^m|^2$$
$$+\left[\nu k-5k^2\nu^2S(\ell)^2-10k^2S(\ell)^2|v^m|^2-\frac{2k^2}{\varepsilon}\right]\|v^m\|^2$$
$$\leqq 10k^2S(\ell)^2|p^m|^2+\left(\frac{kC_0^2}{\nu}+5k^2\right)|f^{m+1}|^2$$

$L_m = k\left[\nu-5kS(\ell)^2\{\nu^2+2|v^m|^2\}-\frac{2k}{\varepsilon}\right]$ とおき

$m=0$ から m まで加えると

$$|v^{m+1}|^2+\varepsilon|p^{m+1}|^2+k\sum_{\ell=0}^{m}L_\ell\|v^\ell\|^2+k\sum(2-5kn)n|\chi^\ell v^\ell|^2$$
$$\leqq k\sum_{\ell=0}^{m}10kS(\ell)^2|p^\ell|^2+k\left(\frac{C_0^2}{\nu}+5k\right)\sum_{\ell=0}^{m}|f^{\ell+1}|^2+|v^0|^2+\varepsilon|p^0|^2$$

$M_m=|v^0|^2+\varepsilon|p^0|^2+k\left(\frac{C_0^2}{\nu}+5k\right)\sum^{m}|f^{\ell+1}|^2$ とおくと

$$M_0\leq M_1\leq\cdots\leq M_m\leq\cdots\leq M=|v^0|^2+\varepsilon|p^0|^2+\left(\frac{C_0^2}{\nu}+5T\right)\int_0^T|f(t)|^2dt$$

よって

もし $m=0,\dots,m<N$ まで , $2-5kn\geqq\delta$

$L_m\geq\delta>0$, $10kS(\ell)^2/\varepsilon\leq K$ 　 K（任意に大きい数）

ならば

$$|v^{m+1}|^2+\varepsilon|p^m|^2\leq C=Me^{KT}$$
$$k\sum\|v_\ell^\ell\|^2<C$$
$$k\sum n|\chi^m v^m|^2\leq C$$

C は ε, k, n, ℓ によらない

lemma 1.

$U^m \geq 0$ が $\quad U^{m+1} \leq k \sum_{\ell=0}^{m} U^\ell + M_1, \quad U^0 \leq M_2$

$\Rightarrow \quad U^{m+1} \leq C \qquad C = C(M_1, M_2) \quad {}^\forall m.$

（証明終り）

従って

Theorem IV

$\kappa_h u_h(x) \subset L_\infty(0, T, L_2(B))$ stable., $L_2(0, T, L_2(B))$ stable

$\pi_{ih} u_h \subset L_2(0, T, L_2(B))$ stable

If. (1), (2), (3) が満たされている、つまり

(1) $\nu - 5k[S(h)^2 \{ \nu^2 + 2M e^{KT} \} + \frac{2k}{\varepsilon}] \geq \delta > 0$

(2) $2 - 5kn \geq \delta > 0$, (3) $K\varepsilon \geq 10 k S(h)^2$

ここで

$\kappa_h : V_h \longrightarrow L_2(B)$, $\pi_{ih} : V_h \longrightarrow L_2(B)$

$\kappa_h u_h = u_h | B \qquad \pi_{ih} u_h = (\nabla_i u_{h1}, \nabla_i u_{h2}) | B$

$u_h(t) = v_h^m \qquad mk \leq t \leq (m+1)k$

Theorem V

$\varepsilon \downarrow 0$, $n \uparrow \infty$, $k, h \downarrow 0$

ただし. (1), (2), (3) を満すものとすると

$\kappa_{h'} u_{h'} \longrightarrow u \qquad L_2(0, T, L_2(B))$; w^*-$L_\infty(0, T, L_2(B))$

$\pi_{ih'} u_{h'} \longrightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i} \quad w$-$L_2(0, T, L_2(B))$

(証明) Th IV から

$\exists\ \kappa_{\ell'} u_{\ell'}$ で

$\kappa_{\ell'} u_{\ell'} \longrightarrow u \quad$ w-$L_2(0,T; H_0^1(B))$, w*-$L_\infty(0,T; L_2(B))$

あとは次の lemma

lemma 2.

$\kappa_{\ell'} u_{\ell'} \to u \quad$ in $L_2(0,T; L_2(B))$

(証) $\chi_k(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & [-k, 0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$

$\chi_k^T(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & [T-k, T) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$ とおくと

$$\frac{1}{k}\{u_\ell(t+k) - u_\ell(t)\} = \frac{d}{dt}\chi_k(t) * u_\ell(t)$$

よって

$$\frac{d}{dt}(\chi_k * u_\ell(t), v_\ell) + \nu((u_\ell(t), v_\ell)) + B(u_\ell(t), u_\ell(t), v_\ell) + (n\chi u_\ell(t), v_\ell) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}(D+\bar{D})p_\ell(t), v_\ell\right)$$
$$= (f_\ell(t), v_\ell) + (u_\ell^0, v_\ell)\chi_k(t) - (u_\ell^N, v_\ell)\chi_k^T(t)$$

ところで

$L : V_\ell \longrightarrow V_\ell$ を

$$((Lw_\ell, v_\ell)) = (f_\ell, v_\ell) - \nu((u_\ell, v_\ell)) - B(u_\ell, u_\ell, v_\ell) + (n\chi u_\ell, v_\ell) + \varepsilon\left(\frac{1}{2}(D+\bar{D})p_\ell(t), v_\ell\right)$$

で定めると線型はあきらか

$$|((Lw_\ell, v_\ell))| \leqq |f_\ell||v_\ell| + \nu\|u_\ell\|\|v_\ell\| + C\|u_\ell\|\|u_\ell\|\|v_\ell\|$$

$$+ n|\chi u_k|\|v_k\| + \varepsilon|p_k|\|v_k\|$$

$$\leqq \{C_0|f_k| + \nu\|u_k\| + \varepsilon|p_k| + n|\chi u_k| + C\|u_k\||u_k|\}\|v_k\|$$

よって

$$\exists\, g_k(t) \in V_k \quad \text{such that} \quad \int_0^T \|g_k(t)\|^2 dt \leq C$$

$$\tilde{g}_k' = \begin{cases} g_k & t \in [0, T] \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

すると

$$\frac{d}{dt}(\chi_k u_k, v_k) = ((\tilde{g}_k, v_k)) + (u_k^0, v_k)\chi_k(t) - (u_k^N, v_k)\chi_k^T(t)$$

Fourier 変換をとると

$$-2\pi i\tau(\hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau), v_k) = ((\hat{\tilde{g}}_k, v_k)) + (u_k^0, v_k)\hat{\chi}_k(\tau) - (u_k^N, v_k)\hat{\chi}_k^T(\tau)$$

$v_k = \hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau)$ とおくと

$$-2\pi i\tau|\hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau)|^2 \leqq ((\hat{\tilde{g}}_k, \hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau))) + |u_k^N||\hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau)| + |u_k^0||\hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau)|$$

よって

$$2\pi|\tau||\hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau)|^2 \leqq \|\hat{\tilde{g}}_k(\tau)\|\|\hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau)\| + (|u_k^0| + |u_k^N|)|\hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau)|$$

よって

$$2\pi|\tau||\hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau)|^2 \leq C\|\hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau)\| + C|\hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau)|$$

$$\therefore |\tau||\hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau)|^2 \leq C\|\hat{\chi}_k(\tau)\hat{u}_k(\tau)\|$$

そして

$0 < \gamma < 1/4$ として

$$(v^{m+1}-v^m,\ \psi^m w_\ell)+k\nu((v^m,\ \psi^m w_\ell))+kn(\chi^m v^m,\ \psi^m w_\ell)$$
$$+kg_\ell(v^m,v^m,\psi^m w_\ell)-k\left(\tfrac{1}{2}(D_i+\bar{D}_i)p^m,\ \psi^m w_\ell\right)$$
$$=k(f^{m+1},\psi^m w_\ell)$$

$m=0,\cdots,N-1$ まで加えると

$$\sum_{m=0}^{N-1}(v^{m+1}-v^m,\ \psi^m w_\ell)+\nu k\sum((v^m,\ \psi^m w_\ell))$$
$$+k\sum^{N-1} g_\ell(v^m,v^m,\psi^m w_\ell)+k\sum^{N-1} n(\chi v^m,\psi^m w_\ell)$$
$$-k\sum^{N-1}\left(\tfrac{1}{2}(D_i+\bar{D}_i)p^m,\ \psi^m w_\ell\right)-k\sum^{N-1}(f^{m+1},\ \psi^m w_\ell)$$

これは

$$-\sum(v^{m+1},(\psi^{m+1}-\psi^m)w_\ell)+\nu k\sum((v^m,\ \psi^m w_\ell))$$
$$+k\sum n(\chi v^m,\ \psi^m w_\ell)+k\sum g_\ell(v^m,v^m,\psi^m w_\ell)$$
$$-k\sum\left(\tfrac{1}{2}(D_i+\bar{D}_i)p^m,\ \psi^m w_\ell\right)$$
$$=(v_h^0,\ \psi^0 w_\ell)+k\sum(f^{m+1},\ \psi^m w_\ell)$$

また

$$-\sum\left(\tfrac{1}{2}(D_i+\bar{D}_i)p^m,\ \psi^m w_\ell\right)=\sum\left(p_\ell^m,\ \tfrac{1}{2}(D_i+\bar{D}_i)\psi^m w_\ell\right)$$

これは

$$\int_0^T\Big\{-\Big(u_\ell(t),\ \frac{\psi_k(t+k)-\psi_k(t)}{k}P_\ell w\Big)+\nu((u_\ell(t),\ \psi_k(t)P_\ell w))$$
$$+b_\ell(u_\ell(t),u_\ell(t),\psi_k(t)P_\ell w)+n(\chi u_\ell,\ \psi_k(t)P_\ell w)$$
$$+\left(p_\ell^m,\ \tfrac{1}{2}(D_i+\bar{D}_i)\psi_k P_\ell w\right)\Big\}dt$$
$$=(u_h(0),\ \psi_k(0)P_\ell w)+\int_0^T(f_h(t),\ \psi_h(t)P_\ell w)\,dt$$

である.

従って k, ε, n, ℓ を極限にもってゆくと

$$\int_0^T \{ -(u, \varphi') + \nu((u, \varphi)) + b(u, u, \varphi) \} dt = \int_0^T (f, \varphi)\, dt + (u_0, \varphi(0))$$

ここで $\psi_k P_\ell w \to \varphi \in \mathcal{D}_\sigma$ とする。

一方、

$$-\varepsilon \sum_{n=1}^{N} (p_\ell^n, (\psi^n - \psi^{n-1}) q_\ell) + k \sum^{N-1} (d_\ell(u_\ell), \psi^n q_\ell) = 0$$

$$q_\ell = \frac{1}{\ell^2} \int_{\tau(M,\rho)} q\, dx \qquad q \in \mathcal{D}(B)$$

ところで

$$\left| -\varepsilon \sum (p^\ell, (\psi^\ell - \psi^{\ell-1}) q_\ell) \right| \leqq C\sqrt{\varepsilon}\, k \sum \left| \frac{\psi^\ell - \psi^{\ell-1}}{k} q_\ell \right|$$

よって $\varepsilon \downarrow 0$ とすると $\leqq$

$$\int_0^T (\operatorname{div} u, \psi q)\, dt = 0 \qquad \forall \psi q \in \mathcal{D}(0,T) \otimes \mathcal{D}(B)$$

$$\therefore \quad \operatorname{div} u = 0 \qquad \text{a.e. } (t, x)$$

ところで $\operatorname{div} u \in L_2(0, T, L_2(B))$

$$\therefore \quad \operatorname{div} u = 0$$

（証明終り）