数理解析研究所講究録
第264巻 1976年 212-218

非線型 Boltzmann 方程式の初期値問題について

阪市大工　鵜飼正二

§1　問題と結果

希薄気体の基礎方程式である Boltzmann 方程式の初期値問題;

$$(1.1)\quad \begin{cases} f = f(t,x,\xi), & (t,x,\xi)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \\ f_t = -\xi\cdot\nabla_x f + Q[f,f], & (t,x,\xi)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \\ f|_{t=0} = f_0, & (x,\xi)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3 \end{cases}$$

を考える。$Q[f,f]$ は非線形項であって気体の相互作用(衝突)を記述している。相互作用のポテンシャルについては謂ゆる cut-off hard potential を仮定する(詳しくは[1]参照)。

$g = g(\xi) = \alpha e^{-\gamma|\xi|^2}$, $\alpha>0$, $\gamma>0$ は気体の平衡状態を与える(Maxwell 分布)。そこで α,γ を任意に固定し, $f = g + g^{1/2}u$, とおけば, 新らしい未知関数 $u = u(t,x,\xi)$ について次の方程式を得る[1]。

$$(1.2)\quad \begin{cases} u_t = -\xi\cdot\nabla_x u + Lu + \Gamma[u,u], & (t,x,\xi)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = u_0, & (x,\xi)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

ここで $Lu = 2g^{-\frac{1}{2}}Q[g, g^{1/2}u]$, $\Gamma[u,u] = g^{-\frac{1}{2}}Q[g^{1/2}u, g^{1/2}u]$ であるが,

cut-off hard potential の仮定の下では

(1.3) $$(Lu)(x,\xi) = -\nu(\xi)u(x,\xi) + \int_{\mathbb{R}^3} K(\xi,\xi')u(x,\xi')d\xi'$$

となる（$\nu(\xi)$, $K(\xi,\xi')$, Γ の性質については [1],[2] 参照）。

$H^\ell(\mathbb{R}^3)$ を ℓ 次の Sobolev 空間（L^2 の意味で）として，

(1.4) $$\begin{cases} H_{\ell,\beta} = \{u(x,\xi);\ (1+|\xi|)^\beta u \in L^\infty_\xi(\mathbb{R}^3; H^\ell_x(\mathbb{R}^3))\}, \\ \|u\|_{\ell,\beta} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^3}(1+|\xi|)^\beta \|u(\cdot,\xi)\|_{H^\ell_x(\mathbb{R}^3)}, \end{cases}$$

(1.5) $$S_{\ell,\beta,\varepsilon} = L^\infty_t([0,\infty); H_{\ell+1+\varepsilon,\beta+1+\varepsilon}) \cap C^0_t([0,\infty); H_{\ell+1,\beta+1}) \cap C^1_t([0,\infty); H_{\ell,\beta})$$

(1.6) $$|\!|\!|u|\!|\!|_\gamma = \sup_{t\geq 0}(1+t)^\gamma \|u(t)\|_{\ell+1+\varepsilon,\beta+1+\varepsilon}, \quad u\in S_{\ell,\beta,\varepsilon},$$

(1.7) $$L^{p,2} = L^p_x(\mathbb{R}^3; L^2_\xi(\mathbb{R}^3))$$

と定義する。更に線型作用素 B を

(1.8) $$B = -\xi\cdot\nabla_x + L, \quad \mathcal{D}(B) = B\text{の定義域} = H_{\ell+1,\beta+1},$$

と定義すれば，我々の仮定の下では $B\mathcal{D}(B)\subset H_{\ell,\beta}$ かつ，$\ell>\frac{1}{2}$，

$\beta\geq 1$，$u,v\in\mathcal{D}(B)$ ならば $\Gamma[u,v]\in H_{\ell,\beta}$ が従う（[1],[2]）ので，

(1.2) を $H_{\ell,\beta}$，($\ell>\frac{1}{2}$，$\beta\geq 1$) での発展方程式

(1.9) $$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Bu(t) + \Gamma[u(t),u(t)], \quad t\geq 0 \\ u(+0) = u_0 \end{cases}$$

と見做せば次の定理が得られる。

定理 1. $\ell>\frac{1}{2}$，$\beta\geq\frac{3}{2}$，$\varepsilon>0$，$p\in[1,2]$，$\gamma=\frac{3}{4}-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})$ とする。

この時次の様な定数 $\alpha_1>0$，$\alpha_2>0$ が存在する；

$\|u_0\|_{\ell+1+\varepsilon,\beta+1+\varepsilon} + \|u_0\|_{L^{p,2}} < \alpha_1$ ならば，方程式 (1.9) は唯一つの解

$u=u(t)\in S_{\ell,\beta,\epsilon}$ を持ち，かつ $|u|_\gamma\leq\alpha_2$．

注意1．初期値 $u_0=u_0(x,\xi)$ が更に条件

(1.10) $$\int_{\mathbb{R}^3}\psi_i(\xi)u_0(x,\xi)d\xi=0,\ \text{a.a}\ x\in\mathbb{R}^3,\ 1\leq i\leq 5,$$

但し $\psi_i=k_i g^{1/2}$，$\{k_i\}_{i=1}^5=\{1,\xi_1,\xi_2,\xi_3,|\xi|^2\}$，を満せば $\gamma=\frac{5}{4}-\frac{3}{2}(1-\frac{1}{p})$ として定理1が成り立つ。

注意2。$p=2$ ならば $H_{\ell,\beta}\subset L^{p,2}$，$(\ell\geq0,\beta>\frac{3}{2})$ であるが，この時，[3] に於て $\|u(t)\|_{0,3}\to 0\ (t\to+\infty)$ が示された。実は $H_{\ell+1+\epsilon,\beta+1+\epsilon}$ でもこのことは成り立つ([4])。

注意3。定理1から半空間に於ける解の存在定理が導びかれる([5])。$x=(x_1,x_2,x_3)$，$\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)$，$\mathbb{R}^3_+=\{x\in\mathbb{R}^3;\ x_3>0\}$ とする。

(1.11) $$\begin{cases} u_t=-\xi\cdot\nabla_x u+Lu+\Gamma[u,u], & (t,x,\xi)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^3_+\times\mathbb{R}^3,\\ u|_{t=0}=u_0, & (x,\xi)\in\mathbb{R}^3_+\times\mathbb{R}^3,\\ u(t,x_1,x_2,0,\xi_1,\xi_2,\xi_3)=u(t,x_1,x_2,0,\xi_1,\xi_2,-\xi_3), & (t,x_1,x_2,\xi)\in[0,\infty)\times\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^3. \end{cases}$$

この境界条件は完全反射境界条件と呼ばれるものである。$\tilde{u}$，$\tilde{u}_0$ を次の様に定義する。

(1.12) $$\tilde{u}(t,x,\xi)=\begin{cases} u(t,x,\xi), & x_3\geq0,\\ u(t,x_1,x_2,-x_3,\xi_1,\xi_2,-\xi_3), & x_3<0, \end{cases}$$

(1.13) $$\tilde{u}_0(x,\xi)=\begin{cases} u_0(x,\xi), & x_3\geq0,\\ u_0(x_1,x_2,-x_3,\xi_1,\xi_2,-\xi_3), & x_3<0. \end{cases}$$

L及びΓは変換 $\xi_3\to-\xi_3$ に関して不変，更に一般には

(1.14) L及びΓは ξ の任意の回転に関して不変

である([1])ので、u が (1.11) の解であれば $\tilde{u}$ は (u_0 を $\tilde{u}_0$ で置き代えた) (1.2) の解でもある。逆に (1.13) を初期値とする (1.2) の解 u (この存在と一意性は定理1で保証される)は、(1.14) と解の一意性から、

(1.15) $\qquad u(t, x_1, x_2, -x_3, \xi_1, \xi_2, -\xi_3) = u(t, x, \xi), \quad (t, x, \xi) \in [0, \infty) \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$

を満していることがわかる。(1.15) で $x_3 = 0$ とおけば結局この解 u は (1.11) の境界条件を満していることがわかる。

注意 4. 条件 (1.10) 及び仮定

(1.16) $\qquad \exists \nu_0 > 0, \quad \nu_0(1+|\xi|) \leq \nu(\xi)$,

(謂ゆる hard ball model に対して成り立つ)、の下での定理1は [5] で、これと独立に、同じ時期に一般の cut-off hard potential に対する定理1は Nishida [3] で、与えられた。[3] は B のスペクトルに関する [6] の結果を利用している。

§2. 定理1の証明

[2] と同じ逐次近似法によって (1.9) の解を構成するのであるが、この時次の定理が重要である。

定理 2. $H_\ell = L^2_\xi(\mathbb{R}^3; H^\ell_x(\mathbb{R}^3))$ とする。$u_0 \in H_\ell \cap L^{p,2}$ ならば

(2.1) $\qquad \exists C \geq 0, \ \|e^{tB} u_0\|_{H_\ell} \leq C(1+t)^{-\gamma}(\|u_0\|_{H_\ell} + \|\hat{u}_0\|_{L^{p',2}}), \quad 1 \leq p \leq 2, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$,

が $\gamma = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{p})$ として成り立つ。但し $\hat{u}_0$ は u_0 の x に関するフーリエ変換である。u_0 が更に (1.10) を満せば $\gamma = \frac{5}{4} - \frac{3}{2}(1 - \frac{1}{p})$ として (2.1) が成り立つ。

他方 $\Gamma[u,u]$ に対する [1] の評価から

(2.2) $\qquad \|\hat{\Gamma}[u,u]\|_{L^{p}, 2} \le C\|u\|^2_{\ell,\beta+1}, \qquad \beta>1.5,\ 1\le p\le 2,\ \ell\ge \frac{3}{2}(1-\frac{1}{p}),$

が従う。更に $\Gamma[u,u]$ は任意の u に対して (1.10) を満している [1]。

評価 (2.1) (2.2) から [2] の逐次近似法が (1.9) に対して収束することが [2] と同様にして証明できる。

§3 定理2の証明

$\hat{u}(\eta,\xi)$, $\eta,\xi\in\mathbb{R}^3$, を $u(x,\xi)$ の x に関するフーリエ変換とする。$(\widehat{Bu})(\eta,\xi) = -i\eta\cdot\xi\hat{u} + L\hat{u}$ であるので、B_η を

(3.1) $\qquad B_\eta = -i\eta\cdot\xi + L, \qquad \mathcal{D}(B_\eta) = \{u=u(\xi)\in L^2(\mathbb{R}^3),\ B_\eta u\in L^2(\mathbb{R}^3)\},$

と定義する。$\eta\in\mathbb{R}^3$ はパラメーターである。Plancherel より、

(3.2) $\qquad \|e^{tB}u\|^2_{H_\ell} = \int_{\mathbb{R}^3}(1+|\eta|)^{2\ell}\,\|(e^{tB_\eta}\hat{u})(\eta,\cdot)\|^2_{L^2_\xi(\mathbb{R}^3)}\,d\eta, \qquad u\in H_\ell$

が成り立つ。

$A_\eta = -i\eta\cdot\xi - \nu(\xi)$, $\mathcal{D}(A_\eta)=\mathcal{D}(B_\eta)$, $\quad K=\int_{\mathbb{R}^3}K(\xi,\xi')\cdot d\xi'$ と定義すれば [2] と同様にして

補題 1. $\mathrm{Re}\lambda \ge -\nu_0 = \inf \nu(\xi) > 0$ ならば

(i) $K(\lambda-A_\eta)^{-1}$ は $L^2=L^2_\xi(\mathbb{R}^3)$ から L^2 へのコンパクト作用素,

(ii) $\exists C\ge 0,\ \exists\delta_1>0,\ \exists\delta_2>0, \quad \|K(\lambda-A_\eta)^{-1}\| \le \dfrac{C}{(\mathrm{Re}\lambda+\nu_0)^{1/2}(1+|\mathrm{Im}\lambda|^{\delta_1}+|\eta|^{\delta_2})},$

が得られる。$\sigma(B_\eta)$ を B_η のスペクトル、$\sigma_d(B_\eta)$ を B_η の重複度有限の離散固有値の全体とする。上の補題より、$\sigma(B_\eta)\cap\{\mathrm{Re}\lambda>-\nu_0\}\subset\sigma_d(B_\eta)$ であるが更に

補題 2. $\forall\eta_0>0, \exists\varepsilon>0, \forall\eta, |\eta|\geq\eta_0, \sigma(B_\eta)\subset\{\mathrm{Re}\lambda<-\varepsilon\}$,

が示せる。この二つの補題より [2]の定理3.3と同様にして

補題 3. $\forall\eta_0>0, \exists\varepsilon>0, \forall\eta, |\eta|\geq\eta_0, \|e^{tB_\eta}u\|_{L^2}\leq Ce^{-\varepsilon t}\|u\|_{L^2}$,

を得る。ここで $L^2=L^2_\xi(\mathbb{R}^3)$。

$|\eta|<\eta_0$ に対する e^{tB_η} の評価を求めよう。$\omega_0\in S^2$ を固定して

(3.3) $B(\kappa)=-\kappa\,\omega_0\cdot\xi+L$, $\mathcal{D}(B(\kappa))=\mathcal{D}(B_\eta)$, $\kappa\in\mathbb{C}^1$,

と定義する。$\omega\in S^2$に対し、$\tilde{R}_\omega\in O(3)$, $\omega_0=\tilde{R}_\omega\omega$, $(R_\omega u)(\xi)=u(R_\omega\xi)$

と定義すれば (1.14) より,

(3.4) $$e^{tB_\eta}=R_\omega e^{tB(i|\eta|)}R_\omega^{-1},\quad \omega=\eta/|\eta|,$$

が成り立つ。故に $e^{tB(\kappa)}$の評価より e^{tB_η}の評価が得られる。

命題 1. $\mu\in\sigma_d(B(0))$, μの代数的重複度 $=m$ とする。

(i) $\exists j_0\leq m$, $\exists\lambda_j(\kappa)\in\sigma_d(B(\kappa))$, $1\leq j\leq j_0$, $\lambda_j(\kappa)=\mu+\lambda_j^{(1)}\kappa+\lambda_j^{(2)}\kappa^2+O(\kappa^3)$, $\kappa\to0$,

(ii) $\lambda_j(\kappa)$の eigenprojection $=P_j(\kappa)=P_j^{(0)}+\kappa P_j^{(1)}+O(\kappa^2)$, $\kappa\to0$,

かつ $P=\sum_{j=1}^{j_0}P_j^{(0)}$ は $\mu\in\sigma_d(B(0))$の eigenprojection,

(iii) $\lambda_j(\kappa)$の幾何学的重複度と代数的重複度は一致する。

注意 1. この命題は[6]に依る。一般に $\lambda_j(\kappa)$, $P_j(\kappa)$ は C^∞ であるが (1.16)が成り立てば解析的である ~~[4]~~[5][6].

[1][2]より $\sigma_d(B(0))=\sigma_d(L)\subset(-\nu_0,0]$, かつ $0\in\sigma_d(L)$ でその固有空間は $\{\psi_i\}_{i=1}^5$ ((1.10)参照) であることがわかっている。$\lambda_j(\kappa)$, $P_j(\kappa)$を $\mu=0\in\sigma_d(B(0))$ に対する命題1のものとする。故に $j_0\leq5$.

補題1と命題1から、[2]の定理3.3と同様にして

補題 4. $\exists C \geq 0, \exists \alpha > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall \kappa, |\kappa| < \eta_0,$

$$e^{tB(\kappa)} = \sum_{j=1}^{j_0} e^{\lambda_j(\kappa)t} P_j(\kappa) + Z(\kappa, t), \quad \|Z(\kappa,t)u\|_{L^2} \leq C e^{-\alpha t} \|u\|_{L^2},$$

が得られる。 他方 L は nonpositive self-adjoint ([1][2]) なることより $\lambda_j^{(2)} < 0$ が容易に示せるので命題1,(i)より

(3.5) $\exists \delta > 0, \exists \eta_0 > 0, \forall |\eta| < \eta_0, \quad \mathrm{Re}\lambda_j(i|\eta|) \leq -\delta |\eta|^2,$

を得る。故に Hölder の不等式より

(3.6) $$\int_{|\eta|<\eta_0} (1+|\eta|)^{2\ell} \| e^{\lambda_j(i|\eta|)t} P_j(i|\eta|) \hat{u}(\eta, \cdot) \|_{L^2}^2 d\eta$$

$$\leq C \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{-\delta|\eta|^2 t q'} d\eta \right)^{\frac{1}{q'}} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \|\hat{u}(\eta,\cdot)\|_{L^2}^{2p'} \right)^{\frac{1}{p'}}, \quad \frac{1}{q''} + \frac{1}{p''} = 1$$

$$\leq C t^{-2\gamma} \|\hat{u}\|_{L^{p'}_2}^2, \quad p = 2p'', \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1. \quad \gamma = \frac{3}{4} - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

を得る。もし u が (1.10) を満せば $\|P_j i|\eta| \hat{u}(\eta,\cdot)\|_{L^2} \leq C|\eta| \|\hat{u}(\eta,\cdot)\|_{L^2}$ (命題1,(ii)) であるから,同様の計算で $\gamma = \frac{5}{4} - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$ を得る。

(3.2),補題 3, (3.4), 補題 4, (3.6) を合せれば定理 2 を得る。

参考文献

[1] Grad, H ; Proc, Sym. in Appl. Math. 17, 154-183 (1965)

[2] Ukai, S ; Proc, Japan Acad. 50, 179-184 (1974)

[3] Nishida, T and Imai, K. ; (to appear)

[6] Ellis, S. and Pinsky, M.A. ; J. Math. Pures et Appl. 54, 125-156 (1975)

[5] Ukai, S ; (to appear)

[4] Shizuta, Y ; (to appear)