数理解析研究所講究録
第 265 巻 1976 年 28-37

抽象ハーディ空間における共役化可能な有界函数について

東北大 理　薮田公三

1. ここで，$(0,2\pi)$ 上の有界函数の共役函数に対する色々な不等式が，抽象ハーディ空間の設定の下でも大体平行に成り立つことを見ると同時に，いくつか，古典的な場合の別証が与えられることを見てみたい。まず，空間の設定をもう一度与えておく。(X,Σ,m) は確率空間であって，$H=H(X,\Sigma,m)$ は抽象 H^∞ 空間とする。すなわち，H は $L^\infty(m)$ の自明でない weak* 閉な subalgebra で，かつ $1\in H$，$\int uv\,dm=\int u\,dm\int v\,dm$ $(\forall u,v\in H)$ が成り立つとする。m-可測函数の全体 $L(m)$ の元 u_n, u に対して，$u_n\to u$ は u_n が u に m-a.e. 収束することと約束する。古典的な時のクラス N_* に相当するクラス $H^\#$ を次のように導入する。

$$L^\# = \{ f\in L(m);\ {}^\exists u_n\in H \text{ s.t. } |u_n|<1,\ u_n\to 1,\ u_n f\in L^\infty(m)\}.$$

$$H^\# = \{ f\in L(m);\ {}^\exists u_n\in H,\ {}^\exists F\in L^\# \text{ s.t. } |u_n|\le F,\ u_n\to f\}.$$

$L^\#$ も $H^\#$ も algebra で $L^\infty\subset L^\#$, $H\subset H^\#\subset L^\#$, $H=H^\#\cap L^\infty$。

$\varphi : u\in H \to \int u\,dm \in \mathbb{C}$ とすると，φ は $H^\#$ 上の乗法的線形汎函数で，次の意味で連続なものとして，一意的に拡張される。
$u_n, u \in H^\#$ かつ $\exists F\in L^\#$, $u_n\to u$, $|u_n|\le F$ ならば $\varphi(u_n)\to\varphi(u)$。
又 $H^+=\{f\in L(m)\,;\ \mathrm{Re}\,f\ge 0,\ e^{-tf}\in H,\ \forall t>0\}$ とする。
$H^+\subset H^\#$。$f\in H$ かつ $\mathrm{Re}\,f\ge 0$ なら $f\in H^+$。$f_n\in H^+$, $f_n\to f$ ならば $f\in H^+$。$f\in H^+$ が null 函数でないなら $1/f\in H^+$。

さて共役函数は次のように定義する。

定義 1. $f\in L_{\mathbb{R}}(m)$ に対して，(1) $\exp t(f+ig)\in H^\#$ が $\forall t\in\mathbb{R}$ に対して成り立つような $g\in L_{\mathbb{R}}(m)$ が存在するとき，f は共役化可能であるという。この時，$\varphi(\exp t(f+ig)) = e^{\alpha t}$ $\forall t\in\mathbb{R}$ となる $\alpha\in\mathbb{R}$ と g は一意に定まる。それ(g)を f の共役函数と呼び $\tilde{f}$ で表わす。

$f\in L^\infty_{\mathbb{R}}(m)$ に対しては，(1) と $\exp t(f+ig)\in H$ $\forall t\in\mathbb{R}$ は同値である。$f\in L^\infty_{\mathbb{R}}(m)$ が共役化可能の時は $\varphi(\exp t(f+i\tilde{f})) = e^{t\int f dm}$ $t\in\mathbb{R}$ で $\tilde{f}\in L^p(m)$ $(0<p<\infty)$ で $\int \tilde{f}\,dm=0$ である。すべての $f\in L^\infty_{\mathbb{R}}(m)$ が共役化可能なら m は φ に対する Szegö measure ($\alpha\in L^1(m), \alpha\ge 0$ $\int u\alpha\,dm=\int u\,dm$ $\forall u\in H \Rightarrow \alpha=1$ 。又は，H が weak* Dirichlet といっても同値) であり，逆も正しい。
さらに次の近似定理が成り立つ。

補題 1. $f\in L^\infty_{\mathbb{R}}(m)$ が共役化可能とすると，次のような $h_n\in H$ が存在する。

i) $h_n \longrightarrow f+i\tilde{f}$

ii) $|h_n| \leqq |f+i\tilde{f}|$

iii) $|\mathrm{Re}\, h_n| \leqq |f|$

iv) $\int \mathrm{Im}\, h_n\, dm = 0$

v) $\int h_n\, dm \longrightarrow \int f\, dm$。

証明(König). $s=u+iv\in\mathbb{C}$, $\alpha>0$, $\alpha|u|<1$ ならば,

(2) $$\left|\frac{s}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha s}+\frac{1}{1-\alpha s}\right)\right| \leqq \frac{|s|}{1-(\alpha u)^2}$$

(3) $$\left|\mathrm{Re}\ \frac{s}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha s}+\frac{1}{1-\alpha s}\right)\right| \leqq \frac{|u|}{1-(\alpha u)^2}$$。

$h=f+i\tilde{f}$

さて, $c=\|f\|_\infty$ とし, $\alpha>0$ は $\alpha c<1$ とする. $1-\alpha c>0$ から $\forall t>0$ に対して $\exp -t(1\pm\alpha h) \leqq \exp -t(1-\alpha c) \leqq 1$ であるから $\exp -t(1\pm\alpha h)\in H^\# \cap L^\infty = H$. よって

(4) $$\frac{1}{1\pm\alpha h} = \int_0^\infty e^{-t(1\pm\alpha h)} \in H.$$

$$h_\alpha = (1-(\alpha c)^2)\frac{h}{2}\left(\frac{1}{1+\alpha h}+\frac{1}{1-\alpha h}\right) = (1-(\alpha c)^2)\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{1-\alpha h}-\frac{1}{1+\alpha h}\right)$$

とおくと, $h_\alpha\in H$ である. さらに, (2)(3)より $|h_\alpha|\leqq|h|$, $|\mathrm{Re}\, h_\alpha|\leqq|f|$ となる。 $f\in L^\infty_{\mathbb{R}}$ で芸役可能ということから

$$\varphi\left(e^{-t(1\pm\alpha h)}\right) = \int e^{-t(1\pm\alpha h)}\,dm = \exp -t\left(1\pm\alpha\int f\,dm\right)$$ である。

よって(4)より $\int\frac{1}{1\pm\alpha h}\,dm$ は実数である。ゆえに $\int \mathrm{Im}\, h_\alpha\, dm = 0$。さて α_n を $\alpha_n\to 0$ となる勝手な $1-\alpha_n c>0$ となる正数列

と $h_n = h_{\alpha_n}$ とする。$|e^{th_n}| \leq e^{t|\mathrm{Re}\, h_n|} \leqq e^{t|f|} \in L^\infty(m) \subset L^\#$.

よって φ の連続性から

$$\varphi(e^{th_n}) = e^{t\varphi(h_n)} \longrightarrow \varphi(e^{th}) = e^{t\int f\,dm} \quad (t>0)。$$

よって $\varphi(h_n) = \int h_n\,dm \longrightarrow \int f\,dm$. ⌟

あと二つ補題を挙げておく。

補題2. $u \in H$, $|u| \leqq 1$, $\int u\,dm = b$, $|b| < 1$ とする。すると、すべてのルベーグ可測集合 $E \subset \mathbb{T} = \{|z| = 1\}$ に対して、

$$\int_E d\theta \int_{\{|u(x)|<1\}} \frac{1-|u|^2}{|e^{i\theta}-u|^2}\,dm = \int_E \frac{1-|b|^2}{|e^{i\theta}-b|^2}\,d\theta - 2\pi m\{u(x) \in E\}.$$

とくに、$|u| = 1$, $\int u\,dm = 0$ なら

$$m\{u(x) \in E\} = \frac{1}{2\pi}|E|.$$

[5, p.90] 又は [6, p.519]

補題3. u は上と同じとする。$f(z)$ は $U = \{|z| < 1\}$ で調和で $\underbrace{\sup_{0<r<1}\left(\int |f(re^{i\theta})|^p d\theta\right)^{1/p}}_{\|f\|_p} < +\infty$ $(1 \leqq p \leqq \infty)$ とする。すると合成函数 $f \circ u(x) = f(u(x))$ は well-defined で、

i) $\left(\int |f \circ u|^p dm\right)^{1/p} \leqq \left(\frac{1+|b|}{1-|b|}\right)^{1/p} \|f\|_p$,

ii) $\int f \circ u\,dm = f\left(\int u\,dm\right)$. [6, p.521]

2. Zygmund-Pichorides type の結果.

補題1から、次の Pichorides の不等式が示せる。

定理 1. $f\in L^\infty_{\mathbb{R}}(m)$ は共役化可能とする。かつ $|f|\le k<\frac{\pi}{2}$. すると、

$$\|\sinh \frac{\tilde f}{2}\|_2 \le (\cos k)^{-1/2}\|\sin\frac{f}{2}\|_2 .$$

証明 $h=f+i\tilde f$ として、h_n を補題1で保証された $h_n = u_n+iv_n \in H$ の列とする。すぐわかるように $\cos h_n\in H$ で $\int \cos h_n\, dm = \cos\int h_n\, dm\in\mathbb{R}$. よって

$$\int\cosh v_n\cos u_n\, dm = \int \mathrm{Re}\cos h_n\, dm = \int\cos h_n\, dm$$
$$= \cos\int h_n\, dm = \cos\int u_n\, dm \quad \left(\int h_n\, dm = \int u_n\, dm\right)。$$

したがって、$\cos u_n \ge \cos|f|\ge\cos k$ ($|f|>|u_n|$) であるから

$$\cos k\int \sinh^2\frac{v_n}{2}\, dm = \cos k\left(\int(\cosh v_n - 1)\, dm\right)$$
$$\le \int(\cosh v_n - 1)\cos u_n\, dm = \cos\int u_n\, dm - \int\cos u_n\, dm$$
$$= \int \sin^2\frac{u_n}{2} - \sin^2\left(\int\frac{u_n}{2}\, dm\right).$$

$n\to\infty$ として求める不等式を得る。 □

~~exp と sinh~~ exp および h に上と同じような議論をして、Zygmund の不等式を一般化できる。

定理 2. $f\in L^\infty_{\mathbb{R}}(m)$ は共役化可能とし、$|f|\le 1$, $0<k<\frac{\pi}{2}$ とすると、

$$\int \exp k|f|\, dm \le \frac{2}{\cos k}.$$

注意. 定理1から $f\in L^\infty_{\mathbb{R}}(m)$ が共役化可能で $|f|<1$ ならば、

$0<h<\frac{\pi}{2}$ に対して

$$m\{x\in X;\ |\tilde{f}(x)|>y\} \leqq 2\pi \sin^2\frac{h}{2}\cos^{-1}h\,\sinh^{-2}\frac{h}{2}y \quad ,\ y>0$$

となるが、実は 左辺 $\leqq$ const. $\exp-\frac{\pi}{2}y$ であることが示せる。それについては、又後程にしたい。

3. Stein-Weiss 型の結果

補題1, 2を使って次の命題が示せる。

定理3. $E\subset X$ は m 可測集合で、χ_E が共役化可能であるとする。すると、すべての $\{i\mathbb{R}\}\cup\{1+i\mathbb{R}\}$ 上のルベーグ可測集合 F に対して

$$(*)\quad m\{x;\ (\chi_E+i\tilde{\chi}_E)(x)\in F\} = \frac{1}{2\pi}|h(F)|,$$

ここで、$h(z)$ は $\{z\in\mathbb{C};\ 0<\mathrm{Re}\,z<1\}$ から単位円板 $\{|z|<1\}$ への等角写像で、$h(z)=\left[\tan\frac{\pi}{2}(z-\frac{1}{2})-\tan\frac{\pi}{2}(m(E)-\frac{1}{2})\right]\Big/\left[1-\tan\frac{\pi}{2}(m(E)-\frac{1}{2})\times\tan\frac{\pi}{2}(z-\frac{1}{2})\right]$ で与えられる。又 $|\ \ |$ は $\mathbb{T}=\{|z|=1\}$ 上の $|\mathbb{T}|=2\pi$ となるルベーグ測度で、$h(F)=\{z\in\mathbb{T};\ z=h(w);\ w\in F\}$。特に(*)の左辺は $m(E)$ だけによることがわかる。

これの系として Stein-Weiss の一般化など、従来への別証が得られる。

系1. E は上と同じとする。$\lambda_E(y)=m\{x:\ |\tilde{\chi}_E(x)|>y\}$ とすると、

$$\boxed{e^{\pi i \lambda_E(y)} = \frac{\sinh \pi y + i \sin \pi m(E)}{\sinh \pi y - i \sin \pi m(E)}\ .}$$

<u>定理3の証明</u>　$0<m(E)<1$ としてよい。$\alpha = \tan\frac{\pi}{2}\left(m(E)-\frac{1}{2}\right)$ とおくと，$-1<\alpha<1$。さて，$g = \chi_E + i\tilde{\chi}_E$，$f = \frac{\pi}{2}\left(g-\frac{1}{2}\right)$ とおく．

$\tan\frac{\pi}{2}\left(z-\frac{1}{2}\right)$ は $\{0<\operatorname{Re} z<1\}$ を $\{|w|<1\}$ に等角に写像する．

補題1より $f_n = u_n + i v_n \in H$ で $f_n \to f$，$|u_n| \leqq \frac{\pi}{2}|\chi_E|$，$\varphi(f_n) = \int f_n dm = \int u_n dm \to \int \operatorname{Re} f dm = \frac{\pi}{2}\left(m(E)-\frac{1}{2}\right) = \alpha$ となる列が存在する。各 f_n に対して，$e^{if_n} \in H$，$\operatorname{Re} e^{if_n} = e^{-v_n}\cos u_n \geqq 0$ となるから，$e^{if_n} \in H^+$。よって $e^{if} \in H^+$ となる。従って $e^{if}+1 \in H^+ \subset H^\#$ で $(e^{if}+1)^{-1} \in H^+ \subset H^\#$．よって

$$\tan\frac{f}{2} = -i\,\frac{e^{if}-1}{e^{if}+1} \in H^\#.$$

さらに $\left|\tan\frac{f}{2}\right| = 1$ であるから $\tan\frac{f}{2} \in H^\# \cap L^\infty = H$．$-1<\alpha<1$ であったから

$$h(g) = \frac{\tan\frac{f}{2} - \alpha}{1 - \alpha\tan\frac{f}{2}} \in H$$

となる。又 $\left|\tan\frac{f}{2}\right| = 1$ より $|h(g)| = 1$ となる。さらに $\left|\tan\frac{f_n}{2}\right| \leqq 1$，$f_n \to f$ であるから ~~φ の連続性により~~

$$\varphi\left(\tan\frac{f}{2}\right) dm = \lim_{n\to\infty} \varphi\left(\tan\frac{f_n}{2}\right) dm = \lim \tan\frac{\varphi(f_n)dm}{2} = \cancel{\tan}\,\alpha\ \cancel{\frac{\tan \int \operatorname{Re} f dm}{2}}$$

$$\cancel{= \tan\frac{\pi}{2}\left(m(E)-\frac{1}{2}\right) =}\ \int h(g)\,dm = \left(\int \tan\frac{f}{2}dm - \alpha\right)\Big/\left(1-\alpha\int\tan\frac{f}{2}dm\right) = 0.$$

$\{x : (\chi_E + i\widetilde{\chi_E})(x) \in F\} = \{x : h(g)(x) \in h(F)\}$ であるから、補題2によって

$$m\{x : (\chi_E + i\widetilde{\chi_E})(x) \in F\} = \frac{1}{2\pi}|h(F)|.$$ □

系1の証明　$\alpha = \tan\frac{\pi}{2}(m(E) - \frac{1}{2})$ とおくと $\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} = \sin\pi m(E)$。
$\lambda_E^+(y) = m\{\widetilde{\chi}_E(x) > y\}$ とおくと、定理3から、

$$\lambda_E^+(y) = \frac{1}{2\pi}\left|\left[\frac{\frac{1}{i}\frac{1-ie^{\pi y}}{1+ie^{\pi y}} - \alpha}{1-\frac{\alpha}{i}\frac{1-ie^{\pi y}}{1+ie^{\pi y}}}, \frac{\frac{1}{i}\frac{1+ie^{\pi y}}{1-ie^{\pi y}} - \alpha}{1-\frac{\alpha}{i}\frac{1+ie^{\pi y}}{1-ie^{\pi y}}}\right]\right|.$$

よって

$$e^{2\pi i\lambda_E^+(y)} = \frac{(1+\alpha^2)\sinh\pi y + (1-\alpha^2)i}{(1+\alpha^2)\sinh\pi y - (1-\alpha^2)i} = \frac{\sinh\pi y + i\sin\pi m(E)}{\sinh\pi y - i\sin\pi m(E)}.$$

同様に $\lambda_E^-(y) = m\{\widetilde{\chi}_E(x) < -y\}$ として、同じ評価を得るから、合せて結論を得る。 □

4. (より一般な) weak type の結果 (B. Davis の結果の拡張)

定理4.　$f \in L^\infty_{\mathbb{R}}(m)$ は共役化可能で $0 \leqq f \leqq 1$ とする。$a = \int f dm$ とし、$g(z)$ は $\{|z|<1\}$ から $\{w \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\, w < 1\}$ への等角写像で $g(0) = a$ をみたすものとする。すると $\lambda > 0$ に対して

$$m\{x : \tilde{f}(x) \geqq \lambda\} \leqq \frac{1}{\pi}|\{0 \leqq \theta < 2\pi ; \mathrm{Im}\, g(e^{i\theta}) \geqq \lambda\}| \leqq C e^{-\pi\lambda}$$

が成り立つ。

証明. $v(x)=f(x)+i\hat{f}(x)$ とおくと，前定理の証と同じで，

$g^{-1}(v)\in H$，$|g^{-1}(v)|\leqq 1$ となる。$u=g^{-1}(v)$ とおく。

さて，$\zeta=\rho e^{i\alpha}\in U=\{|z|<1\}$ で $\mathrm{Im}\, g(\zeta)\geqq\lambda$ とする．$\mu_{g(\zeta)}$ は $\{0<\mathrm{Re}\, z<1\}$ の境界上の $g(\zeta)$ に関する調和測度とする．

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{\{\mathrm{Im}\, g(e^{i\theta})\geqq\lambda\}}\frac{1-\rho^2}{|e^{i\theta}-\rho e^{i\alpha}|^2}\,d\theta$$ とおくと

A は ∂U 上の ζ に関する $\{\mathrm{Im}\, g(e^{i\theta})\geqq\lambda\}$ の調和測度である．g は等角写像であり，調和測度は等角写像で不変であるから，

$$A=\mu_{g(\zeta)}(\{iy\,;\,y\geqq\lambda\}\cup\{1+iy\,;\,y\geqq\lambda\})。$$

$\mathrm{Im}\, g(\zeta)\geqq\lambda$ であるから，$\{0<\mathrm{Re}\, z<1\}$ での調和測度の対称性から $A\geqq\frac{1}{2}$ を得る．よって，$\mathrm{Im}\, v(x)=\hat{f}(x)\geqq\lambda$，$0<f(x)<1$ ならば

$$(オ)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{\{\mathrm{Im}\, g(e^{i\theta})\geqq\lambda\}}\frac{1-|u(x)|^2}{|e^{i\theta}-u(x)|^2}\,d\theta\geqq\frac{1}{2}$$ を得る。

又，$\int u(x)\,dm=\int g^{-1}(v(x))\,dm=g^{-1}\left(\int v(x)\,dm\right)=g^{-1}(a)=0$ であるから，(オ)の両辺を $\{\mathrm{Im}\, v(x)=\hat{f}(x)\geqq\lambda,\ 0<\mathrm{Re}\, v(x)=f(x)<1\}$ 上で m について積分して，補題2を使えば

$$\frac{1}{2\pi}|\{\mathrm{Im}\, g(e^{i\theta})\geqq\lambda\}|-m\{x: u(x)\in\{\mathrm{Im}\, g(e^{i\theta})\geqq\lambda\}\}$$
$$\geqq\frac{1}{2}m\{x:\hat{f}(x)\geqq\lambda,\ 0<f(x)<1\}。$$

よって

$$m\{x:\hat{f}(x)\geqq\lambda\}+m\{x:\hat{f}(x)\geqq\lambda,\ f(x)=0\text{ or }1\}\leqq\frac{1}{\pi}|\{\mathrm{Im}\, g(e^{i\theta})\geqq\lambda\}|。$$

最後の評価は系1より従う。 □

最後に証明なしで，補題2と，補題2の中のuに対しては，$0<r<1$で

$\int \frac{1-|ru(x)|^2}{|e^{i\theta}-ru(x)|^2}dm = \frac{1-|rb|^2}{|e^{i\theta}-rb|^2}$ となることから，次が出ることを注意しておきたい。定理2も次から直ちに従う。

> 定理5. f, gは定理4と同じとする。すると，Φが$(-\infty,\infty)$上の非負値凸函数ならば
>
> $$\int \Phi(\tilde{f})\,dm \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Phi(\mathrm{Im}\, g(e^{i\theta}))\,d\theta 。$$

参考文献

1. B. Davis, On the distributions of conjugate functions of nonnegative measures, Duke Math. J. 40(1973), 695-700.
2. S.K. Pichorides, On the conjugate of bounded functions, Bull. Amer. Math. Soc. 81(1975), 143-144.
3. E. Stein and G. Weiss, An extension of a theorem of Marcinkiewicz and some of its applications, J. Math. Mech. 8(1959), 263-284.
4. Y. Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, Wiley, New York, 1968.
5. K. Yabuta, On the distribution of values of functions in some function classes in the abstract Hardy space theory, Tohoku Math. J. 25(1973), 89-102.
6. K. Yabuta, On bounded functions in the abstract Hardy space theory II, Tohoku Math. J. 26(1974), 513-533.
7. A. Zygmund, Trigonometric series, 2nd ed., Cambridge Univ. Press, New York, 1968.
8. 薮田公三，抽象H^p空間について，数学(論説)，27(1975)，221-230.
9. ———，抽象ハーディ空間について，数学(論説)，近刊.