数理解析研究所講究録
第 265 巻 1976 年 115-121

Basis Problem について

北大理　　越　昭三

Separable reflexive Banach space で Schauder basis が存在しない例が Enflo によって示されて以来，多くの反例が与えられてきた。したがって，separable な topological linear space に多少，位相的にきつい条件だけでは basis の存在が示されない。もともとこの問題は，Grothendieck の問題 すなわち

compact operator が finite rank operator で一様近似できるか？

に端を発している。

代表的な反例の作り方の概要と basis の存在すべき条件について考えてみたい。

Enflo の反例 ： l_p $(p>2)$ の closed linear subspace で approximation property をもたない example を作ること。

approximation property とは：

単位 operator が任意の compact set 上で finite rank の operator で近似できることである。

approximation property をもたなければ当然 Schauder basis は存在しない。

さて反例は approximation property をもたないようにするために可附番個の数列をえらんで，その生成する closed linear subspace を E とし，bounded operator on E の全体 B(E) に compact set 上一様収束の位相で連続な linear functional で finite rank operator で 0，単位 operator では 0 でないものをみつけることである。そのために，有限次元空間をつみあげて行う方法である。

すなわち，座標をある程度切って先は自由に細工できるようにし，その自由さを確率ではかって positive になるようにすればよい。この方法では少くとも連続の濃度の異なり方が出来る。

この方法を使えば，separable Schwartz space において，Schauder basis の存在しない例を作ることは容易に出来る。

つぎに nuclear space で basis の存在しない例を示したい。

Mityagin-Zobin の方法：これについて簡単に紹介する。すなわち，nuclear F-space E でしかも basis のないものを作ることである。その方法は Köthe の空間を作るのに似た方法である。

すなわち有限次元空間 S（2次元以上）の positive def. 正方行列の class $A_{p,n}$ $(p, n = 0, 1, 2, \cdots\cdots)$ について，

$$\{x \in l^2(S);\ \text{すべての}\ p\ \text{について}\ \|x\|_p = \{\sum_n \|A_{n,p}x_n\|^2\}^{\frac{1}{2}} < +\infty,\ \ x = (x_n)\}$$

は適当に $A_{n,p}$ をえらぶことにより，上の空間が $\overbrace{\|\cdot\|_p}^{\text{semi-norm系}}$ で nuclear F-space となって，しかも basis をもたないように出来る。この $A_{n,p}$ の作り方の特長も Enflo の例のように十分先の方を自由に細工出来る構成法である。

この構成法のうまくいく Key point は すべての basis は absolute であるという（Mityagin）結果を使うことであるが，考え方としては，Enflo のような continuous linear functional を作っているのと対比すると，同じように natural な方法である。また，この方法の特長は所謂 diametrical dimension の概念（isomorph で変らない）を用いると互に isomorphic でない basis のない nuclear F space が連続の濃度だけ存在すること

なる。

Enflo と Mityagin－Zobin の結果の間に数多くの本質的でない類似の結果が得られている。

このように，topological structure をかなり制限しても，basis の問題あるいは approximation property をもたないものが割合多く発見されていることとなったが，しかし，いづれも example が数列空間で作れることに特長がある。

しかも，basis をもたない subspace を数列空間の中で求めるには，いわゆる order の意味で normal にならないように工夫すればよいこととなる。

したがって，Banach space 或いは nuclear space において basis の存在が示されるようにするには，何等かの意味で order とか或いは別の structure の存在の仮定が必要となる。

この意味で nuclear vector lattice は base の存在が示される空間である。（[6] 参照）

この場合，Köthe space と isomorphic になる。

Banach lattice について このような問題を考えてみたい。この場合表現定理が有効のように思われる。

つまり，たとへば，よく知られた空間とisomorphになることが示されると，その空間にbasisがあるかどうか調べ易いということがあるからである。

つぎに，これらに関する筆者の得られたいくつかの結果のうち，代表的なもの（basisの存在する）を以下に述べる。

定理 Eをseparable Banach latticeとする。
$x_n \in E$，$x_n \to 0$ (weak) ならば $|x_n| \to 0$ (weak) $\Longrightarrow$ Eにbasisが存在する。

定理 Banach lattice E が L^p $(p \geqq 1)$ とisomorph
$\Longleftrightarrow$ (1) $\| \sum x_n \|^p \leqq C \sum \| x_n \|^p$

(2) weakly summable sequence of positive elements $\Longrightarrow$ absolutely summable sequence.

しかしながら，orderの導入による分類やbasisの存在はもともと，orderを考えるのは函数空間が前提となるのであまり好ましいものではない。

なお，これからの問題としては，Mityagin (1961) が行ったように，$C^{\infty}(-\infty, \infty)$ のような具体的な空間において，basis を作ることが必要であろう。

一方任意の無限次元 Banach 空間には Schauder basis をもつ無限次元 closed linear subspace が存在することが知られているので，つぎの予想が成立する。

E が Banach space で如何なる closed linear subspace にも basis が存在すれば，Hilbert space に isomorphic になる。

ただし，l^1 について，Enflo の方法が使えないので，この問題は l^1 にも basis をもたない closed linear subspace が作れるかという問題を解決しないと無理のように思われる。

なお，近似の問題として，basis の存在が本質的かどうか疑問な点もある。

具体的な函数空間で例えば Haar の basis が存在するか？（Haar 系が basis になり得るか？）のような問題は，空間の特性で或る程度知られる。

References

[1] Enflo : A counterexample to the approximatin problem,
Acta Math. 130(1973)309-317

[2] A.M.Davie: The approximation problem for Banach spaces,
Bull. London Math.5(1973)

[3] B.Mityagin:Approximate dimension and bases in nuclear spaces,
Uspechi Math.12(1961)

[4] B.Mityagin & N.Zobin: Contre exemple a l'existence d'une base dans un espace de Frechet nucleaire, C.R.Acad.Sc.Paris
279(1974) 255-256

[5] ....: ....,
C.R.Acad. Sc. Paris
279(1974)325-327

[6] Y.Komura & S.Koshi : Nuclear vector lattices, Math. Ann.
163(1966)105-110

[7] A.Pietsch : Nukleare lokalkonvexe Räume, Berlin(1966)

[8] A.Grothendieck : Produits tensoriels topologiques et espaces nucleares, Memoires A.M.S.,16(1955)

[9] .... : Topological vector spaces,
Gordon and Breach (1973)

[10] I.Singer : Bases in Banach spaces I, Springer(1970)

[11] C.Bessaga & A.Pelcynski : On bases and unconditional convergence of series in Banach spaces, Studia Math.17(1958)

[12] H.F.Bohnenblust : An axiomatic characterization of L^p-space, Duke Math. J.,6(1940) 627-640