数理解析研究所講究録
第266巻 1976年 59-74

汎函数と変分方程式

東大 教養学部 青本和彦

以下の議論は細部にわたって厳密とは云い難い。

§1 [定義1.1] $C_0^\infty(R^n)$ から R への写像 F（汎函数）が与えられた時 任意の変量 $\psi \in C_0^\infty(R^n)$ に対して

$$(1.1)\quad F(\varphi+\psi) = F(\varphi) + \int_{R^n} A(x;\varphi)\psi(x)\,dx + O(\|\psi\|_{m+1})$$

が満たされているものとする。ここに $A(x;\varphi)$ は x の高々(m)階超函数を表わし $\|\psi\|_{m+1}$ は

$$\|\psi\|^2_{m+1} = \sum_{p\le m+1}\int_{R^n}\sum_{\alpha}\left|\frac{\partial^p\psi}{\partial x_{\alpha_1}\partial x_{\alpha_2}\cdots\partial x_{\alpha_p}}\right|^2 dx$$

を意味する。我々はこの時 $A(x;\varphi)$ のことを F の φ における偏変分の x 成分と呼ぶ。
そして

$$A(x;\varphi) = \frac{\delta F(\varphi)}{\delta\varphi(x)}$$

とおく。

$A(x;\varphi)$ は Fréchet 微分 従って又 Gâteaux 微分に他ならない[5]。このような F は 1階微分可能 と呼ばれる[2]。さらに $A(x;\varphi)$ が x を固定した時 φ について連続ならば F は

C^1-級と呼ばれる. 同様にて

$$\frac{\delta^2 F}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)}, \quad \frac{\delta^3 F}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)\delta\varphi(x_3)}, \quad \cdots$$

が考えられるが, 一般に m 階偏変分がすべて連続ならば C^m-級と呼ばれる. こうして有限次元の微分演算の法則がさしたる変更もなく成立する. 特に

[命題1,1] $$\frac{\delta^2 F}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)} = \frac{\delta^2 F}{\delta\varphi(x_2)\delta\varphi(x_1)}$$

が $F \in C^2$-級で成り立つ.

[命題1,2] (平均値定理) $F \in C^m$-級ならば

$$F(\varphi+\psi) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}dx\right)^k + \frac{1}{m!}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}dx\right)^m F(\varphi+\theta\psi)$$

を満たす $0<\theta<1$ が存在する.

[系] 特に $\dfrac{\delta F}{\delta\varphi(x)} = 0$ ならば F は φ に依らない.

[定義1,2] $F(\varphi)$ が

$$F(\varphi+\psi)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\int_{R^n}\psi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}dx\right)^k F(\varphi)$$

と無限級数で表示される時 F は実解析的汎函数と呼ばれる. [命1, 2] から

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m!}\left\{\int_{R^n}\psi(x)\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}dx\right\}^m F(\varphi)=0$$

ならば F は実解析的である. 特に次の m 次多項式

$$F(\varphi)=\sum_{k=0}^{m}\int_{R^{nk}}A_k(x_1,x_2,\cdots x_k)\cdot$$

$$\cdot\,\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_k)\,dx_1\cdots dx_k$$

は実解析的である.

[注意] $C^\infty(R^n)$ の代わりに任意のパラコンパクト多様体 M 上の C^∞-函数 $C^\infty(M)$ 上の汎函数でも事情は同じである.

[例 1] $$\frac{\delta\varphi(x)}{\delta\varphi(y)}=\delta(y-x)$$

[例 2] $$F(\varphi)=\int_{R^n}A(x)\varphi(x)^2dx$$

ならば
$$\frac{\delta F(\varphi)}{\delta\varphi(x)} = 2A(x)\varphi(x)$$
$$\frac{\delta^2 F(\varphi)}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = 2A(x)\delta(x-y)$$

一般に $C^0(\mathbb{R}^n)$ 上の汎函数 F が
$$\frac{\delta^2 F(\varphi)}{\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)} = 2A(x;\varphi)\delta(x-y) + K(x,y;\varphi)$$
と書けて $K(x,y;\varphi)$ が x,y について連続ならば
$\int_{\mathbb{R}^n} A(x;\varphi)\,dx$ のことを Lévy の ラプラシアン
と云う．すなわち
$$\Delta F = \int_{\mathbb{R}^n} A(x;\varphi)\,dx$$

§2. 偏変分方程式（線型）

定義 2.1 F, $\dfrac{\delta F}{\delta\varphi(x)}$, $\dfrac{\delta^2 F}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)}$, ……

の間に次のような等式

(2.1) $$\sum_{\nu=0}^{m} \int_{\mathbb{R}^{n\nu}} \frac{\delta^\nu F(\varphi)}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)\cdots\delta\varphi(x_\nu)} \cdot A_\nu(x_1,\cdots,x_\nu;\varphi)\,dx_1\cdots dx_\nu$$

がみたされる時　$F(\varphi)$ は 線型の偏変分方程式 をみたすと云う．ここで $A_\nu(x_1,\cdots,x_\nu;\varphi)$ は $x_1,\cdots,x_\nu$ に依存する φ の汎函数である．

[定義 2,2]　$F(\varphi)$ が与えられた時　適当な自然数 N があって　$\nu \geqq N+1$ ならば

(2,2)
$$\frac{\delta^\nu F(\varphi)}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_\nu)} = \sum_{k=0}^{N} \int K(x_1,\cdots,x_\nu;y_1,\cdots,y_k;\varphi)\cdot \frac{\delta^k F(\varphi)}{\delta\varphi(y_1)\cdots\delta\varphi(y_k)}\,dy_1\cdots dy_k$$

と書ける時　$F(\varphi)$ は 極大過剰決定系 をみたすと云う．このような N の最小値を この方程式系の 階数 と云う．

以下 これらの例を列挙する．

[例 2,1]　$F(\varphi)$ が φ に依らない場合．

(2,3)
$$\frac{\delta F}{\delta\varphi(x)} = 0$$

逆も成立する．一般に

(2,4)
$$\frac{\delta^\nu F}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_\nu)} = 0$$

を満たす方程式系の解は φ の $(\nu-1)$ 次多項式である．

[例 2.2] Hermite 多項式 [7]

$$F(\varphi) = e^{-\frac{1}{2}\|\varphi\|_0^2}$$

$$\|\varphi\|_0^2 = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)^2 dx$$

を考えると

(2,5) $$\frac{\delta F}{\delta \varphi(x)} = F(\varphi)\cdot(-\varphi(x))$$

を満たす. $\dfrac{\delta^\nu F}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_\nu)}$ $(\nu \geq 2)$ はこの方程式

を繰り返し用いることにより

(2,6) $$\frac{\delta^\nu F}{\delta\varphi(x_1)\cdots\delta\varphi(x_\nu)} = F(\varphi)\cdot H_\nu(x_1,\cdots,x_\nu;\varphi)$$

と書ける. ここに $H_\nu(x_1,\cdots,x_\nu;\varphi)$ は $x_1,\cdots,x_\nu$ の多項式で これを ν次 エルミート多項式と云う.

(2,7) $$\langle\varphi,\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\psi(x)dx$$

とおくと

(2,8) $$e^{-\frac{\|\psi\|^2}{2} - \langle\psi,\varphi\rangle} = \sum_{m=0}^{\infty} \int \frac{H_m(x_1,\cdots,x_m;\varphi)}{m!}\psi(x_1)\cdots\psi(x_m)\cdot dx_1\cdots dx_m$$

故に $e^{-\frac{\|\varphi\|^2}{2}-\langle\psi,\varphi\rangle}$ は エルミート多項式列 $\{H_m(x_1,\cdots,x_m;\varphi)\}$ の母汎函数である.

[例2.3] 1次元 Ising 模型 [8°]

$\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ として その Fourier 変換を

$$\tilde{\varphi}(p)=\int_{\mathbb{R}} e^{\sqrt{-1}\,px}\varphi(x)dx$$ とおく.

今 自然数 n によって決まる超函数列

$$\frac{1}{p_1+m+i0}\,\frac{1}{p_1+p_2+i0}\cdots\frac{1}{p_1+\cdots+p_{2n-1}+m+i0}\,\frac{1}{p_1+\cdots+p_{2n}+i0}$$

($m>0$ 質量) $n=1,2,3,\cdots$

に対して母汎函数 $F(\varphi)$ を

(2,9) $$F(\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\int\frac{1}{p_1+m+i0}\,\frac{1}{p_1+p_2+i0}\cdots$$

$$\cdots\frac{1}{p_1+\cdots+p_{2n-1}+m+i0}\,\frac{1}{p_1+\cdots+p_{2n}+i0}\,\tilde{\varphi}(p_1)\cdots\tilde{\varphi}(p_{2n})\,.$$

$\cdot\,dp_1\cdots dp_{2n}$ によって定義すると

Heaviside 函数 $Y(x)$ を用いて

$$Y(x) = \int e^{-\sqrt{-1}\,p_1 x} \cdot \frac{1}{p_1 + i0}\, dp_1$$

$$\frac{i}{p_1 + i0} = \int Y(x) e^{ixp_1}\, dx$$

を用いて

(2,10) $$F(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{1}{p_1 + m + i0} \frac{1}{p_1 + p_2 + i0} \cdots$$

$$\cdots \frac{1}{p_1 + \cdots + p_{2n-1} + m + i0} \frac{1}{p_1 + \cdots + p_{2n} + i0} \cdot dp_1 \cdots dp_{2n}$$

$$\cdot e^{\sqrt{-1}(p_1 x_1 + \cdots + p_{2n} x_{2n})} \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_{2n})\, dx_1 \cdots dx_{2n}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \int_{\mathbb{R}^2,\, x_2 \geq x_1} e^{im(x_2 - x_1)} \varphi(x_1) \varphi(x_2)\, dx_1 dx_2 \right\}^n$$

$$= \frac{K(\varphi)}{1 - K(\varphi)}$$

ここで $$K(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^2,\, x_2 \geq x_1} e^{im(x_2 - x_1)} \varphi(x_1) \varphi(x_2)\, dx_1 dx_2$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{im(x_2 - x_1)} Y(x_2 - x_1) \varphi(x_1) \varphi(x_2)\, dx_1 dx_2$$

でこれは2次の多項式である。だから $F(\varphi)$ が有理汎函数である。(2,10)より

(2,11) $$(1-K(\varphi))F(\varphi)=K(\varphi)$$

だから

(2,12) $$\frac{\delta^3\{(1-K(\varphi))F(\varphi)\}}{\delta\varphi(x_1)\delta\varphi(x_2)\delta\varphi(x_3)}=0$$

でこれは多項式を係数とする3階の極大決定系。

[例2,4] 流体模型 [8°]

$A(x,y)=e^{-\beta U(x,y)}$ を $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$ 上の函数として

$$A_\nu(x_1,\cdots,x_\nu)=\prod_{1\leq i<j\leq\nu}A(x_i,x_j)$$

とおく。$\xi_\nu(x_1,\cdots,x_\nu,t)$, $\tau_\nu(x_1,\cdots,x_\nu,t)$ を各々次のように定義する：

(2,13) $$\xi_\nu(x_1,\cdots,x_\nu,t)=A_\nu(x_1,\cdots,x_\nu)+\frac{t}{1!}\int A_{\nu+1}(x_1,\cdots,x_\nu,y_1)dy_1$$
$$+\frac{t^2}{2}\iint A_{\nu+2}(x_1,\cdots,x_\nu,y_1,y_2)dy_1dy_2+\cdots\cdots$$

(2,14) $$\tau_\nu(x_1,\cdots,x_\nu,t)=\frac{\xi_\nu(x_1,\cdots,x_\nu,t)}{\xi_0(x_1,\cdots,x_\nu,t)}$$

今汎函数 $\mathfrak{U}(\varphi)$, $F(\varphi)$ を

$$(2,15)\quad \mathfrak{A}(\varphi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{n\nu}} A_\nu(x_1,\cdots,x_\nu,t)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_\nu)\,dx_1\cdots dx_\nu$$

$$(2,16)\quad F(\varphi)=\sum_{\nu=0}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^{n\nu}} \tau_\nu(x_1,\cdots,x_\nu,t)\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_\nu)\,dx_1\cdots dx_\nu$$

によって定義すれば

$$(2,17)\quad F(\varphi)=\frac{\mathfrak{A}(\varphi+t)}{\mathfrak{A}(t)}$$

が成立する．ここで $\mathfrak{A}(\varphi)$ の収束性については不明．さらに $\mathfrak{A}(\varphi)$ が φ について適当な極大系を満たすであろうか？　これは有限次元の ϑ-函数に類似していると思われる．

§3. 場の理論の変分的特徴づけについての考察，Tomonaga-Schwinger 方程式 [10]

M を 4次元 Minkowski 空間としその座標を $x=(x^0,\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^3$ とする．

を満たす、ここに $H(x;\varphi)$ はエルミート作用素で

$$(3.1)\quad H(x;\varphi)=H_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int H_n(x,x_1,\cdots,x_n)\cdot$$

$$\cdot\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_n)\,dx_1\cdots dx_n\quad,$$

$$(3.2)\quad H_0(x)=-\mathcal{L}_{int}(x)$$

さて $S(\varphi)$ の公理系と呼ばれるものは

1° ユニタリ性 $S(\varphi)S(\varphi)^{\dagger}=1$

2° 共変性 $S(L\varphi)=U_L\,S(\varphi)\,U_L^{\dagger}$

ここに L は Lorentz 変換.

3° 因果律 $\dfrac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\dfrac{\delta S(\varphi)}{\delta\varphi(y)}S(\varphi)^{\dagger}\right)=0$

ここに $x^0<y^0$ 又は $(x^0-y^0)^2-(x^1-y^1)^2-\cdots-(x^3-y^3)^2<0$ なる x,y にわたる, すなわち $x\lesssim y$.

4° $S(\varphi+\psi)=S(\varphi)S(\psi)$

ここに $\mathrm{supp}\,\varphi>\mathrm{supp}\,\psi$ すなわち $\forall x\in\mathrm{supp}\,\varphi$ $\forall y\in\mathrm{supp}\,\psi$ に対して $x^0>y^0$ をみたす.

$\mathcal{L}_0(x)$, $\mathcal{L}_{int}(x)$ を各々真空及び相互作用の Lagrangean とする。すると作用 A は

(3,3) $$A=\int_M \mathcal{L}_0(x)dx+\int_M \mathcal{L}_{int}(x)\varphi(x)dx$$

$\varphi\in C_0^\infty(M)$ によって与えられる。一方Schrödinger方程式はあるヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 H_0, H_1 を用いて

(3,4) $$i\frac{d\Phi}{dt}=(H_0+H_1)\Phi$$

によって与えられるものとすれば $H_1(t,x)=e^{-\frac{H_0t}{i}}\cdot H_1\cdot e^{\frac{H_0t}{i}}$
とおくことにより

(3,5) $$H_1(t,x)=-\mathcal{L}_{int}(x)$$

が成立する。対応する S 行列は $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ へのユニタリー作用素であって

(3,6) $$S(\varphi)=T\left(\exp\left(i\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{L}_{int}(x)\varphi(x)dx\right)\right)$$

(Tは年代順積)で与えられる。
この時 $S(\varphi)$ は

(3,7) $$i\frac{\delta S(\varphi)}{\delta\varphi(x)}=H(x;\varphi)S(\varphi)$$ [1)]

3° は　$x \lesssim y$ の時

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(H(y;\varphi)\right)=0$$

とも云い換えられる．方程式 (3,7) は $S(\varphi)$ の代わりにベクトル $\Phi(\varphi)$ についての方程式

$$i\frac{\delta\Phi}{\delta\varphi(x)}=H(x;\varphi)\Phi \tag{3,8}$$

と同等であり　これが <u>積分可能</u> である ための必要十分条件は

$$i\frac{\delta H(x;\varphi)}{\delta\varphi(y)}-i\frac{\delta H(y;\varphi)}{\delta\varphi(x)}=[H(x;\varphi),H(y;\varphi)] \tag{3,9}$$ 2)

である．[19] 故に　1°, 2°, 3° の代わりに次の公理系を考える：

1′° $H(x;\varphi)$ は エルミート 的

2′° $H(x;\varphi)$ は 共変

3′° 因果律　$\dfrac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(H(y;\varphi)\right)=0$

が $x \lesssim y$ で成り立つ．

4′° $H(x;0)=-\mathcal{L}_{int}(x)$

すると

[命題3,1] $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ をみたす実解析的汎函数 $H(x;\varphi)$ が一意に存在する.
それは (3,1) の形に書ける.

[命題3,2] $H(x;\varphi)$ が $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ を満たす時 方程式 (3,6) 又は (3,7) は各々 $S(\cdot,0)=1$, $\Phi(\cdot,0)$ を与えることによって一意に存在し それは公理 $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, 4^\circ$ を満たす.
φ について実解析的である.

証明は有限次元の Frobenius の定理[6]を拡張すればよい.

方程式 (3,6) 又は (3,7) は係数 $H(x;\varphi)$ の極大過剰決定系であり $S(\varphi)$ の性質を $H(x;\varphi)$ のそれから導き出すことが出来ると思われる. もっと具体的にわかるためには これは物理の問題である.

§4 結論

無限次元解析は筆者の知るかぎりでは数学では Volterra, Hadamard, Gateaux, Levy[2] 等によって始まり変分法と結びついて実り多い成果が得られている. 場の理論は変分法

か持ち込まれ定式化が行われているが これが単なる形式ではなく実体としてとらえうることを筆者は期待したいところである。[3)]

文献

1° N.N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, Introduction to the theory of quantized fields, '57

2° P. Levy, Problèmes concrets d'analyse fonctionnelle

3° V. Volterra -- Theory of functionals and of integral and integro-differential equations

4° N. Wiener, -- Differential space, quantum systems and prediction '66, M.I.T.

5° M.A. Zorn, Derivatives and Fréchet differentials, Bull. Amer. Math. Soc. Vol 52, '46

6° J. Dieudonné, Foundation of modern analysis

7° T. Hida, Complex white noise and infinite dimensional unitary group, Nagoya Math. J. '71

8° 佐藤, 柏原 and 三輪 Microlocal study of

infinite systems, '74

9° J. Hadamard Oeuvres completo II

註 1) は 微分幾何では 積分可能な接続と呼ばれている

2) は 接続の積分可能性の条件,

類似の例は [9°], [2°] にも見出される.

3) 物理学における Bose 粒子の第2量子化は このよい例である. 対応 $q \to \varphi$, $p = \frac{d}{dq} \to \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}$ によって 自然に 無限次元の Lagrange 多様体が定義される. それが Fock 空間に他ならぬ.