数理解析研究所講究録
第266巻 1976年 236-258

ある概均質ベクトル空間のHOLONOMY DIAGRAMについて

東京教育大学付属盲学校　　尾関 育三

まえがき

概均質ベクトル空間のb-多項式（b関数）$b(s)$を求めるためには、その空間のorbital decompositionを行ない、得られたorbitsの中からb-多項式の因子に対応すると考えられる、いわゆる"good orbit"[註1]を見いだして行なうという方法がとられていた。この方法は木村達雄氏によって有限個のorbitsに分解する可能性をもつ空間が確定されてからは、その範囲に属する空間に適用されて、かなりの成果を上げることができた。しかし、作用する群と表現空間とが複雑さを増すにつれて、orbital decompositionが完成しても、"good orbit"であることが確認できるorbitsが十分に得られなかったり、ある因子のベキで割れることの証明ができなかったりして、b-多項式の決定に困難をきたす例が現われるようになってきた。表1は筆者がorbital decompositionを完成し、昨年春の学会で報告した「GL(8)

が3次の skew tensor の空間に induce する表現」の orbits と、その代表点および、それらに対応することが確定、もしくは推定された b-多項式の因子等を示したものであるが、これでは b-多項式を決定することは困難であった。ところがその直後から "holonomy system" に関する理論が急速に進歩し、概均質ベクトル空間の相対不変式の holonomy diagram を決定することによって、b-多項式が確定できることがあることが明らかにされた。[註2] 図1は先に述べた $GL(8)$ の holonomy diagram であり、表1の結果から予想された b-多項式がそのまま事実として確定された。

図2は木村氏によって決定された $SL(5) \times GL(3)$ の holonomy diagram で各 holonomy manifold が G_0 prehomogeneous な交わりで、次々につながっており、b-多項式を決定するのに極めて好都合な例である。

さて、以上のような成功に促されて筆者は「有限個の orbits をもつと考えられる最後の既約概均質ベクトル空間」で orbital decomposition が極めて困難な $SL(5) \times GL(4)$ に、この方法を用い、b-多項式を決定してみようと試みた。その結果 holonomy diagram の主要な部分を決定することができたが、この空間の場合、従来の例に見られない種々の困難にも遭遇している。以下これについて述べることにする。

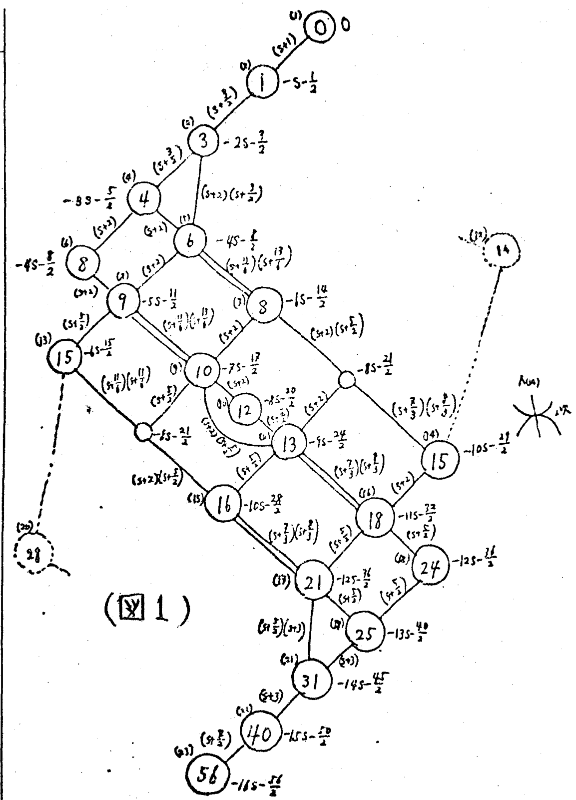
註: p.16〜19

表 1.

·	代表点	codim	$tr_V A$ ($tr\, ad_{\mathfrak{g}_{x_i}} A$)	$b(s)$の因子	G_{x_i} の構造	dual
1	x_0	0			$SL(3)$	23
2	x_1	1	$-\frac{5}{7}$	$s+1$	$(GL(1)\times SL(2))\cdot(G_a)^5$	22
3	x_3	3	$-\frac{4}{7}$	$s+\frac{3}{2}$	$(GL(1)^2\times SL(2))\cdot U(6)$	21
4	x_4	4	$-\frac{4}{7}$	$s+\frac{3}{2}$	$GL(1)^3\cdot U(9)$	19
5	x_6	6			$(GL(1)^2\times SL(2))\cdot U(9)$	17
6	x_8	8	$-\frac{3}{7}$	$s+2$	$(GL(1)\times SL(2))\cdot U(12)$	18
7	x_8'	8	$-\frac{10}{21}$	$s+\frac{11}{6}$	$(GL(1)\times SL(2)^3)\cdot(G_a)^6$	15
8	x_9	9	$-\frac{3}{7}$	$s+2$	$(GL(1)^2\times SL(2)^2)\cdot U(9)$	16
9	x_{10}	10			$(GL(1)^2\times SL(2))\cdot U(13)$	11
10	x_{12}	12	$-\frac{3}{7}$	$s+2$	$(GL(1)^2\times SL(2)^2)\cdot(G_a)^{12}$	10
11	x_{13}	13			$(GL(1)\times SL(2))\cdot U(17)$	9
12	x_{14}	14	$-\frac{1}{3}$	$s+\frac{7}{3}$	$(GL(1)\times G_2)\cdot(G_a)^7$	20
13	x_{15}	15	$-\frac{2}{7}$	$s+\frac{5}{2}$	$(GL(1)\times Sp(2)\times SL(3))\cdot(G_a)^4$	14
14	x_{15}'	15			$(GL(1)^2\times SL(2)^2)\cdot U(15)$	13
15	x_{16}	16			$(GL(1)^2\times SL(2)^2)\cdot U(16)$	7
16	x_{18}	18			$(GL(1)^3\times SL(2)^2)\cdot U(17)$	8
17	x_{21}	21			$(GL(1)^2\times SL(3))\cdot U(19)$	5
18	x_{24}	24	$-\frac{2}{7}$	$s+\frac{5}{2}$	$(SL(3)^2\times SL(2)\times GL(1))\cdot(G_a)^{12}$	6
19	x_{25}	25	$-\frac{2}{7}$	$s+\frac{5}{2}$	$(GL(1)^2\times SL(3)\times SL(2))\cdot U(20)$	4
20	x_{28}	28			$(GL(1)^2\times Sp(3))\cdot U(13)$	12
21	x_{31}	31			$(GL(1)^2\times Sp(2)\times SL(3))\cdot U(19)$	3
22	x_{40}	40	$-\frac{1}{7}$	$s+3$	$(GL(1)\times SL(3)\times SL(5))\cdot(G_a)^{15}$	2
23	x_{56}	56	0	$s+\frac{7}{2}$	$GL(8)$	1

但し 一般に $U(n)$ で n次元 ユニポテント群 を 表わす. (唯1つとは限らない!)

G_a は 1次元 additive group の 意味.



(図1)

$GL(8)$ 目 相対不変式 = 56元16次式

23-orbits

$$b(s)=(s+1)(s+\tfrac{3}{2})^2(s+\tfrac{11}{6})(s+2)^3(s+\tfrac{13}{6})\times(s+\tfrac{7}{3})(s+\tfrac{5}{2})^3(s+\tfrac{8}{3})(s+3)^2(s+\tfrac{7}{2})$$

(I. Ozeki June 1974)

1. $x_0 = (u_1\wedge u_4 + u_3\wedge u_6)\wedge u_8 + (u_1\wedge u_4 + u_2\wedge u_5)\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_4\wedge u_5\wedge u_6$

2. $x_1 = (u_1\wedge u_4 + u_3\wedge u_6)\wedge u_8 + (u_1\wedge u_4 + u_2\wedge u_5)\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_1\wedge u_5\wedge u_6 + u_2\wedge u_4\wedge u_6$

3. $x_3 = (u_1\wedge u_4 + u_3\wedge u_6)\wedge u_8 + (u_1\wedge u_4 + u_2\wedge u_5)\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_1\wedge u_5\wedge u_6$

4. $x_4 = (u_1\wedge u_4 + u_3\wedge u_6)\wedge u_8 + (u_1\wedge u_4 + u_2\wedge u_5)\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3$.

5. $x_6 = (u_1\wedge u_4 + u_2\wedge u_6)\wedge u_8 + (u_2\wedge u_5 + u_3\wedge u_6)\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3$

6. $x_8 = (u_1\wedge u_4 + u_3\wedge u_6)\wedge u_8 + (u_1\wedge u_4 + u_2\wedge u_5) u_7$

7. $x_8' = (u_1\wedge u_4 + u_2\wedge u_5 + u_3\wedge u_6)\wedge u_8 + (u_1\wedge u_5 + u_2\wedge u_6)\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3$

8. $x_9 = u_1\wedge u_4 u_8 + (u_2\wedge u_5 + u_3\wedge u_6)\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3$.

9. $x_{10} = (u_1\wedge u_4 + u_2\wedge u_5 + u_3\wedge u_6)\wedge u_8 + (u_1\wedge u_5 + u_2\wedge u_6)\wedge u_7$.

10. $x_{12} = u_1\wedge u_4\wedge u_8 + u_2\wedge u_5\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_4\wedge u_5\wedge u_6$

11. $x_{13} = u_1\wedge u_4\wedge u_8 + u_2\wedge u_5\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_4\wedge u_5\wedge u_6 + u_2\wedge u_4\wedge u_6$

12. $x_{14} = (u_1\wedge u_4 + u_2\wedge u_5 + u_3\wedge u_6)\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_4\wedge u_5\wedge u_6$

13. $x_{15} = u_1\wedge u_4\wedge u_8 + (u_2\wedge u_5 + u_3\wedge u_6)\wedge u_7$

14. $x_{15}' = (u_1\wedge u_4 + u_2\wedge u_5)\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_4\wedge u_5\wedge u_6$

15. $x_{16} = u_1\wedge u_4\wedge u_8 + u_2\wedge u_5\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_1\wedge u_5\wedge u_6$

16. $x_{18} = u_1\wedge u_4\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_4\wedge u_5\wedge u_6$

17. $x_{21} = u_1\wedge u_4\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_1\wedge u_5\wedge u_6 + u_2\wedge u_4\wedge u_6$

18. $x_{24} = u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_4\wedge u_5\wedge u_6$

19. $x_{25} = u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_1\wedge u_5\wedge u_6 + u_2\wedge u_4\wedge u_6$

20. $x_{28} = u_1\wedge u_4\wedge u_7 + u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_1\wedge u_5\wedge u_6$

21. $x_{31} = u_1\wedge u_2\wedge u_3 + u_1\wedge u_5\wedge u_6$.

22. $x_{40} = u_1\wedge u_2\wedge u_3$

23. $x_{56} = 0$

(木村・June 1974)

SL(5) × GL(3)
日 ⊗ □

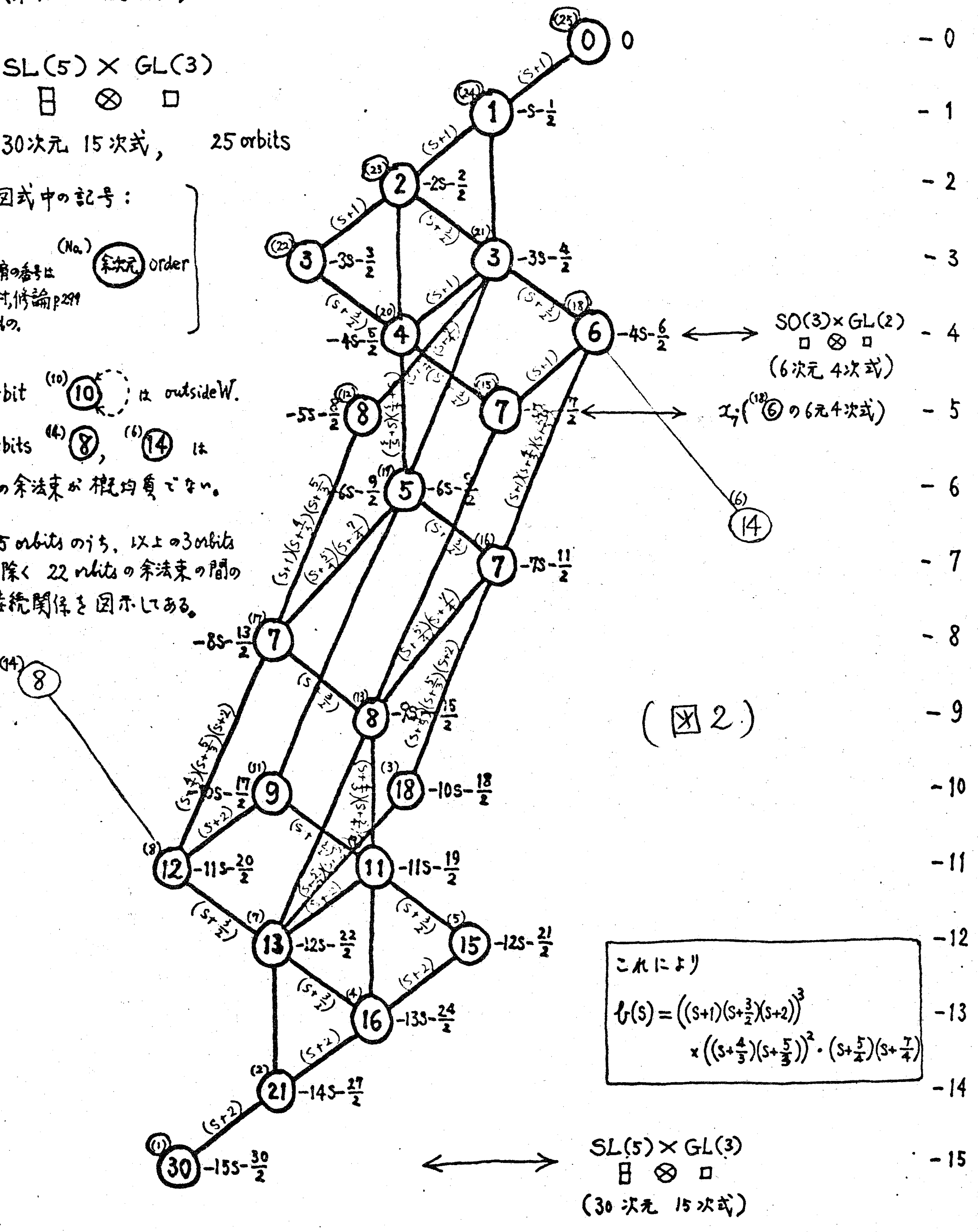
30次元 15次式， 25 orbits

［ 図式中の記号：
左肩の番号は木村,修論p.299のもの。
(No.) 余次元 order ］

orbit (10) 10 は outside W.

orbits (14) 8, (6) 14 は
その余法束が概均質でない。

25 orbits のうち、以上の3 orbitsを除く 22 orbits の余法束の間の接続関係を図示してある。



(図2)

これにより

$$b(s) = \left((s+1)(s+\tfrac{3}{2})(s+2)\right)^3 \times \left((s+\tfrac{4}{3})(s+\tfrac{5}{3})\right)^2 \cdot (s+\tfrac{5}{4})(s+\tfrac{7}{4})$$

注1　orbit Gx_i が"good orbit"であるとは

(1)　G が orbit Gx_i の conormal bundle

$\overline{\{(x,y)\in V\times V^* \mid x\in Gx_i,\ y\in V_x^*\}}\subset V\times V^*$ に概均質に作用すること。

(2)　orbit Gx_i の conormal bundle が characteristic variety

$W=\overline{\{(x,\ t\cdot \mathrm{grad}\log f(x)) \mid x\in V-S\}}\subset V\times V^*$　に含まれる。

であることをいう。ただし $f(x)$ は概均質ベクトル空間 (G,V) の既約相対不変多項式（既約正則ならば定数倍を除いて一通りに定まる）. V^* は V の dual. S は $f(x)$ の零点集合. V_x^* は $x\in V$ の conormal vector space $\{y\in V^* \mid 内積(y,\mathfrak{g}x)=0\}$ とする。但し $\mathfrak{g}$: G のリー環

b-多項式 $b(s)$ の因子について次の定理が成り立つ。

定理1（佐藤）

$x_i\in V$ に対し. Gx_i が good orbit でかつ

$\dfrac{tr_{ad\,\mathfrak{g}_{x_i}}A}{tr_V A}$　$(A\in\mathfrak{g}_{x_i},\ \ tr A\neq 0)$

の値が一定ならば　b-多項式 $b(s)$ は

$\left(s+\dfrac{\dim V}{\deg f}\cdot\dfrac{tr_V A+tr_{ad\,\mathfrak{g}_{x_i}}A}{tr_V A}\right)$ なる因子をもつ。ただし

$\mathfrak{g}_{x_i}$ は x_i における isotropy subalgebra, $tr_{ad\,\mathfrak{g}_{x_i}}A$ は $\mathfrak{g}_{x_i}$ の adjoint 表現の trace.

定理2（佐藤）

$b(s)$ が $s+\alpha$ で割り切れるならば $s+\dfrac{\dim V}{\deg f}+1-\alpha$ でも割り切れる。

1. 準備

Kを標数0の代数閉体.

$G = SL(5) \times GL(4)$

V^5をK上の5次元ベクトル空間

$\{ u_1, u_2 \text{------} u_5 \}$を$V^5$の base.

$\underset{\text{日}}{V^5}$ を $u_i \wedge u_j$ $(1 \leqq i < j \leqq 5)$ の張るK上の10次元ベクトル空間。

$V = \underset{\text{日}}{V^5} \oplus \underset{\text{日}}{V^5} \oplus \underset{\text{日}}{V^5} \oplus \underset{\text{日}}{V^5}$ とする。

このときGがVにinduceする表現が $\underset{\text{日}}{SL}(5) \underset{\otimes}{\times} \underset{\square}{GL}(4)$ であり、$G \ni (A, B)$ $(A \in \underset{\text{日}}{SL}(5),\ B \in \underset{\square}{GL}(4))$ がVに属する点.
$x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ $(x_i \in \underset{\text{日}}{V^5})$ におよぼす作用は
$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longmapsto (Ax_1, Ax_2, Ax_3, Ax_4)\,{}^tB$ である。

以上によって $\underset{\text{日}}{SL}(5) \underset{\otimes}{\times} \underset{\square}{GL}(4)$ は $GL(9)$ の部分群.

$$\left\{ \left[\begin{array}{ccccc|cccc} a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & & & & \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & & & & \\ a_{31} & a_{32} & a_3 & a_{34} & a_{35} & & 0 & & \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_4 & a_{45} & & & & \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_5 & & & & \\ \hline & & & & & a_6 & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ & & 0 & & & a_{76} & a_7 & a_{78} & a_{79} \\ & & & & & a_{86} & a_{87} & a_8 & a_{89} \\ & & & & & a_{96} & a_{97} & a_{98} & a_9 \end{array}\right] \right\} \quad \det \begin{vmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_3 & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_4 & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_5 \end{vmatrix} = 1 \quad \det \begin{vmatrix} a_6 & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ a_{76} & a_7 & a_{78} & a_{79} \\ a_{86} & a_{87} & a_8 & a_{89} \\ a_{96} & a_{97} & a_{98} & a_9 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{---}(1)$$

が $\underset{\text{日}}{GL}(9)$ の部分空間で $u_i \wedge u_j \wedge u_k$ $(1 \leqq i < j \leqq 5,\ k = 6, 7, 8, 9)$ で張られる空間にinduceする表現と同値であるので、以下では口述の便宜上, Gは(1)の形で. またVの元は

$\sum_{k=6}^{9}\{\sum_{1\leq i<j\leq 5} a_{ijk}(u_i\wedge u_j)\}\wedge u_k$ の形で表わすことにする。

2. $SL_{\boxminus}(5)\underset{\otimes}{\times}GL_{\square}(4)$ の holonomy diagram

$SL_{\boxminus}(5)\underset{\otimes}{\times}GL_{\square}(4)$ の orbital decomposition は全く未解決であるので、その holonomy diagram を既知の orbits の conormal bundle を用いて構成することはできない。そこで、まず、codim 1 の orbit の dual と考えられる orbit の generic point x_i をとり、その conormal vector space $V_{x_i}^*$ の generic point y_i を求めて、これが codim 1 の orbit に属するかどうかを調べる。

codim 1 の orbit の dual の generic point と考えられる点としては、$GL_{\boxminus}(8)$ や $SL_{\boxminus}(5)\underset{\otimes}{\times}GL_{\square}(3)$ の場合から類推して $u_1\wedge u_2\wedge u_6$ をとった。この点の isotropy subalgebra は式(2)に示す通りである。

$$\left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & & & & \\ a_{21} & a_2 & a_{23} & a_{24} & a_{25} & & & & \\ & & a_3 & a_{34} & a_{35} & & 0 & & \\ & 0 & a_{43} & a_4 & a_{45} & & & & \\ & & a_{53} & a_{54} & a_5 & & & & \\ & & & & & a_6 & a_{67} & a_{68} & a_{69} \\ & & 0 & & & & a_7 & a_{78} & a_{79} \\ & & & & & 0 & a_{87} & a_8 & a_{89} \\ & & & & & & a_{97} & a_{98} & a_9 \end{bmatrix}\right\} \quad \begin{aligned} &a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=0 \\ &a_1+a_2+a_6=0 \end{aligned} \qquad \text{----(2)}$$

これによって $u_1\wedge u_2\wedge u_6$ の属する orbit の codim は 30 であることが知られる。よって、この点を以下 x_{30}、また orbit Gx_{30} に対応する holonomy manifold を ㉚、isotropy subgroup を $G_{x_{30}}$、isotropy subalgebra を $\mathfrak{g}_{x_{30}}$、conormal vector space

(3)

$$\left[\begin{array}{cccccccccc}
\begin{matrix} w_1 & a_{34} & -a_{35} \\ a_{43} & w_2 & a_{45} \\ -a_{53} & a_{54} & w_3 \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{89} & 0 & 0 \\ 0 & a_{89} & 0 \\ 0 & 0 & a_{89} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{79} & 0 & 0 \\ 0 & a_{79} & 0 \\ 0 & 0 & a_{79} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{69} & 0 & 0 \\ 0 & a_{69} & 0 \\ 0 & 0 & a_{69} \end{matrix} &
0 & 0 &
\begin{matrix} 0 & -a_{15} & a_{14} \\ -a_{15} & 0 & a_{13} \\ -a_{14} & a_{13} & 0 \end{matrix} &
0 & 0 &
\begin{matrix} 0 & -a_{25} & a_{24} \\ -a_{25} & 0 & a_{23} \\ -a_{24} & a_{23} & 0 \end{matrix} \\
\begin{matrix} a_{98} & 0 & 0 \\ 0 & a_{98} & 0 \\ 0 & 0 & a_{98} \end{matrix} &
\begin{matrix} w_4 & a_{34} & -a_{35} \\ a_{43} & w_5 & a_{45} \\ -a_{53} & a_{54} & w_6 \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{78} & 0 & 0 \\ 0 & a_{78} & 0 \\ 0 & 0 & a_{78} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{68} & 0 & 0 \\ 0 & a_{68} & 0 \\ 0 & 0 & a_{68} \end{matrix} &
0 &
\begin{matrix} 0 & -a_{15} & a_{14} \\ -a_{15} & 0 & a_{13} \\ -a_{14} & a_{13} & 0 \end{matrix} &
0 & 0 &
\begin{matrix} 0 & -a_{25} & a_{24} \\ -a_{25} & 0 & a_{23} \\ -a_{24} & a_{23} & 0 \end{matrix} &
0 \\
\begin{matrix} a_{97} & 0 & 0 \\ 0 & a_{97} & 0 \\ 0 & 0 & a_{97} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{87} & 0 & 0 \\ 0 & a_{87} & 0 \\ 0 & 0 & a_{87} \end{matrix} &
\begin{matrix} w_7 & a_{34} & -a_{35} \\ a_{43} & w_8 & a_{45} \\ -a_{53} & a_{54} & w_9 \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{67} & 0 & 0 \\ 0 & a_{67} & 0 \\ 0 & 0 & a_{67} \end{matrix} &
\begin{matrix} 0 & -a_{15} & a_{14} \\ -a_{15} & 0 & a_{13} \\ -a_{14} & a_{13} & 0 \end{matrix} &
0 & 0 &
\begin{matrix} 0 & -a_{25} & a_{24} \\ -a_{25} & 0 & a_{23} \\ -a_{24} & a_{23} & 0 \end{matrix} &
0 & 0 \\
0 & 0 & 0 &
\begin{matrix} w_{10} & a_{34} & -a_{35} \\ a_{43} & w_{11} & a_{45} \\ -a_{53} & a_{54} & w_{12} \end{matrix} &
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\begin{matrix} w_{13} & a_{43} & a_{53} \\ a_{34} & w_{14} & a_{54} \\ a_{35} & a_{45} & w_{15} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{87} & 0 & 0 \\ 0 & a_{87} & 0 \\ 0 & 0 & a_{87} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{97} & 0 & 0 \\ 0 & a_{97} & 0 \\ 0 & 0 & a_{97} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} \end{matrix} &
0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\begin{matrix} a_{78} & 0 & 0 \\ 0 & a_{78} & 0 \\ 0 & 0 & a_{78} \end{matrix} &
\begin{matrix} w_{16} & a_{43} & a_{53} \\ a_{34} & w_{17} & a_{54} \\ a_{35} & a_{45} & w_{18} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{98} & 0 & 0 \\ 0 & a_{98} & 0 \\ 0 & 0 & a_{98} \end{matrix} &
0 &
\begin{matrix} a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} \end{matrix} &
0 \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\begin{matrix} a_{79} & 0 & 0 \\ 0 & a_{79} & 0 \\ 0 & 0 & a_{79} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{89} & 0 & 0 \\ 0 & a_{89} & 0 \\ 0 & 0 & a_{89} \end{matrix} &
\begin{matrix} w_{19} & a_{43} & a_{53} \\ a_{34} & w_{20} & a_{54} \\ a_{35} & a_{45} & w_{21} \end{matrix} &
0 & 0 &
\begin{matrix} a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & a_{21} & 0 \\ 0 & 0 & a_{21} \end{matrix} \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\begin{matrix} a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} \end{matrix} &
0 & 0 &
\begin{matrix} w_{22} & a_{43} & a_{53} \\ a_{34} & w_{23} & a_{54} \\ a_{35} & a_{45} & w_{24} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{87} & 0 & 0 \\ 0 & a_{87} & 0 \\ 0 & 0 & a_{87} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{97} & 0 & 0 \\ 0 & a_{97} & 0 \\ 0 & 0 & a_{97} \end{matrix} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\begin{matrix} a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} \end{matrix} &
0 &
\begin{matrix} a_{78} & 0 & 0 \\ 0 & a_{78} & 0 \\ 0 & 0 & a_{78} \end{matrix} &
\begin{matrix} w_{25} & a_{43} & a_{53} \\ a_{34} & w_{26} & a_{54} \\ a_{35} & a_{45} & w_{27} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{98} & 0 & 0 \\ 0 & a_{98} & 0 \\ 0 & 0 & a_{98} \end{matrix} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 &
\begin{matrix} a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{12} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{79} & 0 & 0 \\ 0 & a_{79} & 0 \\ 0 & 0 & a_{79} \end{matrix} &
\begin{matrix} a_{89} & 0 & 0 \\ 0 & a_{89} & 0 \\ 0 & 0 & a_{89} \end{matrix} &
\begin{matrix} w_{28} & a_{43} & a_{53} \\ a_{34} & w_{29} & a_{54} \\ a_{35} & a_{45} & w_{30} \end{matrix}
\end{array}\right]$$

	$V^*_{x_{30}}$ の base
$w_1 = -\varepsilon_3+\varepsilon_9-4\alpha+\beta$	$u_4\wedge u_5\wedge u_9$
$w_2 = -\varepsilon_4+\varepsilon_9-4\alpha+\beta$	$u_3\wedge u_5\wedge u_9$
$w_3 = \varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_9-4\alpha+\beta$	$u_3\wedge u_4\wedge u_9$
$w_4 = -\varepsilon_3+\varepsilon_8-4\alpha+\beta$	$u_4\wedge u_5\wedge u_8$
$w_5 = -\varepsilon_4+\varepsilon_8-4\alpha+\beta$	$u_3\wedge u_5\wedge u_8$
$w_6 = \varepsilon_3+\varepsilon_4+\varepsilon_8-4\alpha+\beta$	$u_3\wedge u_4\wedge u_8$
$w_7 = -\varepsilon_3-\varepsilon_8-\varepsilon_9-4\alpha+\beta$	$u_4\wedge u_5\wedge u_7$
$w_8 = -\varepsilon_4-\varepsilon_8-\varepsilon_9-4\alpha+\beta$	$u_3\wedge u_5\wedge u_7$
$w_9 = \varepsilon_3+\varepsilon_4-\varepsilon_8-\varepsilon_9-4\alpha+\beta$	$u_3\wedge u_4\wedge u_7$
$w_{10} = -\varepsilon_3-10\alpha$	$u_4\wedge u_5\wedge u_6$
$w_{11} = -\varepsilon_4-10\alpha$	$u_3\wedge u_5\wedge u_6$
$w_{12} = \varepsilon_3+\varepsilon_4-10\alpha$	$u_3\wedge u_4\wedge u_6$
$w_{13} = \varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_8-\varepsilon_9+\alpha+\beta$	$u_1\wedge u_3\wedge u_7$
$w_{14} = \varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_8-\varepsilon_9+\alpha+\beta$	$u_1\wedge u_4\wedge u_7$
$w_{15} = \varepsilon_1-\varepsilon_3-\varepsilon_4-\varepsilon_8-\varepsilon_9+\alpha+\beta$	$u_1\wedge u_5\wedge u_7$
$w_{16} = \varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_8+\alpha+\beta$	$u_1\wedge u_3\wedge u_8$
$w_{17} = \varepsilon_1+\varepsilon_4+\varepsilon_8+\alpha+\beta$	$u_1\wedge u_4\wedge u_8$
$w_{18} = \varepsilon_1-\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_8+\alpha+\beta$	$u_1\wedge u_5\wedge u_8$
$w_{19} = \varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_9+\alpha+\beta$	$u_1\wedge u_3\wedge u_9$
$w_{20} = \varepsilon_1+\varepsilon_4+\varepsilon_9+\alpha+\beta$	$u_1\wedge u_4\wedge u_9$
$w_{21} = \varepsilon_1-\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_9+\alpha+\beta$	$u_1\wedge u_5\wedge u_9$
$w_{22} = -\varepsilon_1+\varepsilon_3-\varepsilon_8-\varepsilon_9+\alpha+\beta$	$u_2\wedge u_3\wedge u_7$
$w_{23} = -\varepsilon_1+\varepsilon_4-\varepsilon_8-\varepsilon_9+\alpha+\beta$	$u_2\wedge u_4\wedge u_7$
$w_{24} = -\varepsilon_1-\varepsilon_3-\varepsilon_4-\varepsilon_8-\varepsilon_9+\alpha+\beta$	$u_2\wedge u_5\wedge u_7$
$w_{25} = -\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_8+\alpha+\beta$	$u_2\wedge u_3\wedge u_8$
$w_{26} = -\varepsilon_1+\varepsilon_4+\varepsilon_8+\alpha+\beta$	$u_2\wedge u_4\wedge u_8$
$w_{27} = -\varepsilon_1-\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_8+\alpha+\beta$	$u_2\wedge u_5\wedge u_8$
$w_{28} = -\varepsilon_1+\varepsilon_3+\varepsilon_9+\alpha+\beta$	$u_2\wedge u_3\wedge u_9$
$w_{29} = -\varepsilon_1+\varepsilon_4+\varepsilon_9+\alpha+\beta$	$u_2\wedge u_4\wedge u_9$
$w_{30} = -\varepsilon_1-\varepsilon_3-\varepsilon_4+\varepsilon_9+\alpha+\beta$	$u_2\wedge u_5\wedge u_9$

を $V^*_{x_{30}}$ と記す。他の orbit に属する点についても同様とする。(codim の等しい互いに異なる orbit については ′ をつけて区別する。)

$V^*_{x_{30}}$ の base と、これにおける $\mathfrak{g}_{x_{30}}$ の image は (3) に示す通りである。これによれば $G^*_{x_{30}}$ と $V^*_{x_{30}}$ は概均質で、その generic point は

$u_4\wedge u_5\wedge u_6+(u_1\wedge u_3+u_2\wedge u_5)\wedge u_7+(u_1\wedge u_4+u_2\wedge u_3)\wedge u_8$
$+(u_1\wedge u_5+u_2\wedge u_4)\wedge u_9$ である。この isotropy subalgebra は

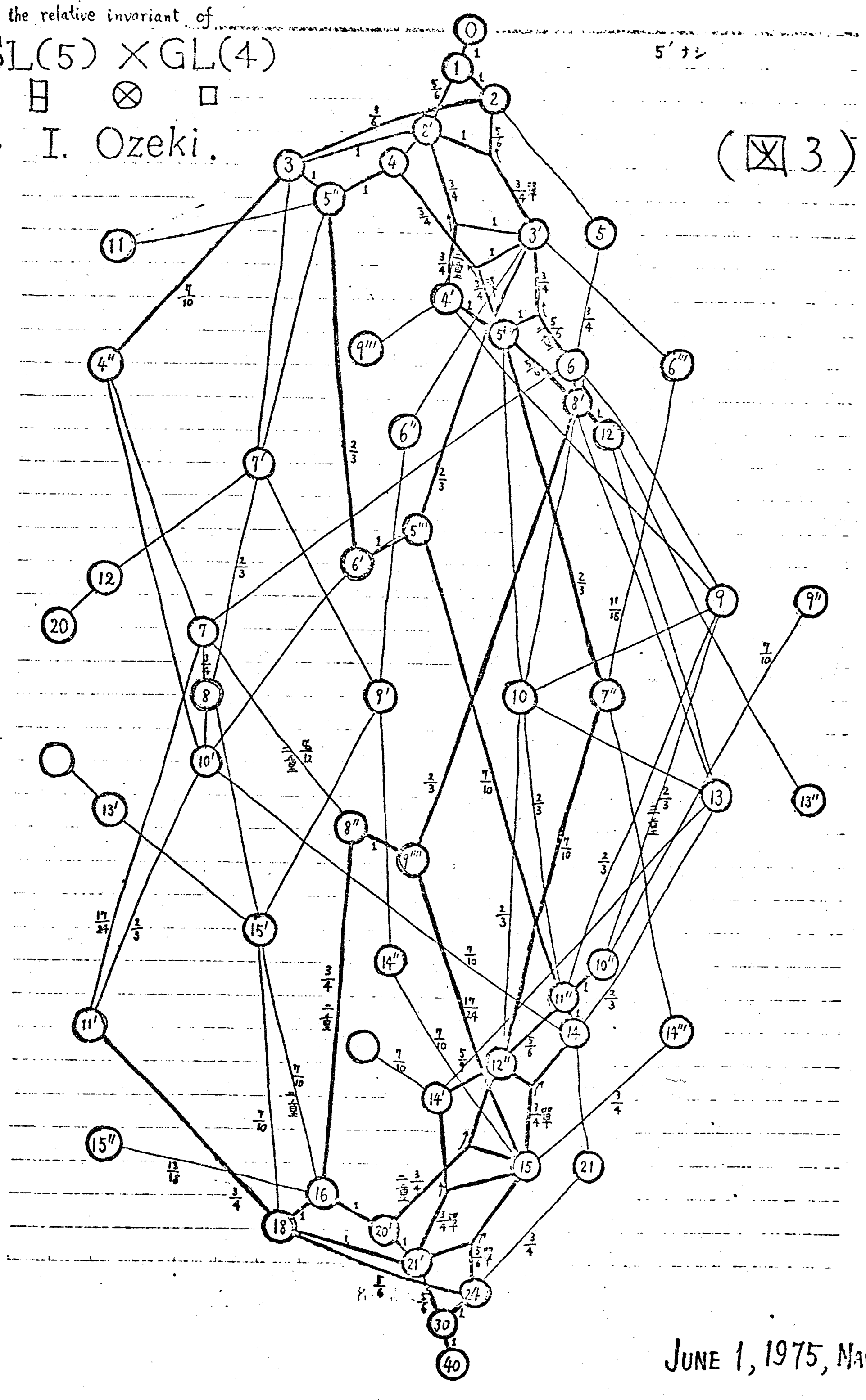
$$\left\{\begin{bmatrix} 3t & & & & & & & & \\ & 3t & & & & & & & \\ & & -2t & & & & & 0 & \\ & & & -2t & & & & & \\ & & & & -2t & & & & \\ & 0 & & & & 4t & & & \\ & & & & & & -t & & \\ & & & & & & & -t & \\ & & & & & & & & -t \end{bmatrix}\right\} \quad \text{-----(4)}$$

(4) であり、従ってこの点は codim 1 の orbit に属する。これによって、holonomy diagram の最上位には ⓪、次に ①、また最下位には ㊵、その上に ㉚ が位置することが確定した。

$(G^*_{x_{30}}, V^*_{x_{30}})$ の codim 1 の点としては、互いに異なる orbit に属する点として、$(u_4\wedge u_5+u_3\wedge u_4)\wedge u_6+u_1\wedge u_3\wedge u_7+(u_1\wedge u_4+u_2\wedge u_3)\wedge u_8+u_2\wedge u_5\wedge u_9$ および $(u_4\wedge u_5+u_3\wedge u_5)\wedge u_6+(u_1\wedge u_3+u_3\wedge u_4+u_2\wedge u_3)\wedge u_7+u_1\wedge u_4\wedge u_8+(u_2\wedge u_5+u_3\wedge u_4)\wedge u_9$ がとれる。これらの属する orbits の codim はいずれも 2 である。よって、前者を x_2、後者を $x_{2'}$ と記すことにする。これらの dual は $V^*_{x_2}$ および $V^*_{x_{2'}}$ の generic points で、codim 24 と 21 であ

HOLONOMY DIAGRAM
for the relative invariant of
SL(5) × GL(4)
日 ⊗ □
by I. Ozeki.

(図3)



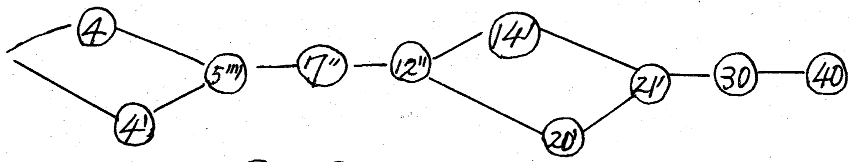
JUNE 1, 1975, NAGOYA

とじこみを参照せよ

ることが上と同様の方法で知られる。これによって holonomy diagram の①の下に② および ②', ㉚ の上に㉔ ㉑ (図3の中では㉑'とした) が位置づけられる. 以上の操作を反復して得られたのが図3である。

3. holonomy diagram の考察

$SL_{\boxminus}(5)\underset{\otimes}{\times}GL_{\square}(4)$ の holonomy diagram は ⓪—①—②'



------(5)

という経路で⓪と㊵が結ばれている。この経路は通過する holonomy manifold とそれらの交わりが全て G prehomogeneous になっている唯一の経路である。従って b-多項式の因子がこの経路から求められるのではないかと期待されるが、⑤'''—⑦''の間と、⑦''—⑫''の間には従来の b-多項式の因子を求める公式は全く適用できない。もっとも、⑫を見ると $G_{x_{12}}$ が $SL(3)\times GL(2)$ になっており、$(G^{*}_{x_{12}}, V^{*}_{x_{12}})$ は $SL_{\boxminus}(3)\underset{\otimes}{\times}GL_{\square}(2)$ と正則概均質になっている。

「一般に holonomy diagram 中に正則概均質な conormal vector space をもつ manifold があるとき、それより上に現われる subdiagram は、その正則概均質ベクトル空間の holonomy diagram に一致する」という事実が知られているが実際、今回も⓪と⑫の間の subdiagram は $SL_{\boxminus}(3)\underset{\otimes}{\times}GL_{\square}(2)$ の

holonomy diagram に一致している。従ってこの部分には図3に記した因子が対応する。よって(5)の経路のうち、

$$\begin{tikzcd} & & & 4 \arrow[dr, no head] & \\ 0 \arrow[r, no head] & 1 \arrow[r, no head] & 2' \arrow[ur, no head] \arrow[dr, no head] & & 5''' \\ & & & 4' \arrow[ur, no head] & \end{tikzcd}$$

および、そのdualの部分に対応するb-多項式の因子はそれぞれ $(s+1)^3(s+\frac{3}{4})^2(s+\frac{5}{4})^2(s+\frac{5}{6})(s+\frac{7}{6})$ である。

従って b-多項式の因子を全て決定することは、$5'''$—$7''$ およびそのdualの間のそれぞれ11個の因子を決定することに帰着する。もっとも$5'''$—$8'$ およびそのdualの部分にそれぞれ $(s+\frac{5}{6})(s+\frac{7}{6})$ が対応しているので、$5'''$—$7''$ およびそのdualの部分にそれぞれこの2個の因子が含まれていなければならない。また更に$4''$, $5'''$, $8''$は それから上にのびる線がいずれも一本ずつになっており、このことは、まえがき註1に記した定理1の $\frac{tr_{ad\,\mathfrak{g}_{x_i}} A}{tr_V A}$ の値が一定であることを示しているので、これから$(s+\frac{7}{10})$, $(s+\frac{2}{3})$ などの因子の存在が期待される。そこで3—$4''$, $3'$—$5'''$ および7—$8''$ の間の因子を調べる必要があるが、現在ではこれに好都合な簡単な方法は見つかっていない。ただ、相対不変式 $f(x)$ の $4''$, $5'''$ などにおける localization をそれぞれ計算し、それに対応する b-多項式の因子を算出することが考えられる。さいわい$4''$のlocalizationは $\mathfrak{g}^*_{x_{4''}}$ の $V^*_{x_{4''}}$ における imageから、「2元5次式 $\sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}x_i u^{5-i} v^i$ の判別式において $x_0=1$

$x_1=0$ とおいたものに等しい」という事実が最近の佐藤先生と矢野氏の研究によって明らかになった。このあたりに問題解決の糸口が得られることが期待されている。

$\mathfrak{g}_{x_4''}$ の $V^*_{x_4''}$ における image

$$\left\{ -\begin{bmatrix} 5t & 5a_{31} & \frac{5}{2}a_{21} & -5a_{41} \\ & 4t & -4a_{31} & -2a_{21} \\ & & 3t & -3a_{31} \\ & 0 & & 2t \end{bmatrix} \right\} \quad \text{----} \ (6)$$

$\mathfrak{g}_{x_5'''}$ の $V^*_{x_5'''}$ における image

$$\left\{ -\begin{bmatrix} 6a_4 & -a_{53} & 3a_{51} & -2a_{32} & -3a_{52} \\ & 5a_4 & -a_{53} & -a_{51} & -a_{32} \\ & & 4a_4 & 3a_{53} & 2a_{51} \\ & 0 & & 3a_4 & 4a_{53} \\ & & & & 2a_4 \end{bmatrix} \right\} \quad \text{----} \ (7)$$

holonomy diagramによるb-多項式の求め方

1. holonomy diagramのつくり方

概均質ベクトル空間(G, V)の各orbit Gx_iに対し、そのconormal bundle $T^*_{Gx_i}V \overset{\mathrm{def}}{=} \{(x, y) \mid x \in Gx_i, y \in V^*_x\} \subset V \times V^*$ （V^*はVのdual space、V^*_xはorbit Gx_iの点xにおけるconormal vector space）をとり、その各々に次のようにconormal bundlesを対応させる。すなわちorbit Gx_iにconormal bundle $T^*_{Gx_i}V$で対応するV^*のorbit G^*y_iをとり、これをVのorbit $Gx_{i'}$と同一視する。そして、$Gx_{i'}$のconormal vector space $V^*_{x_{i'}}$をとり、$(G_{x_{i'}}, V^*_{x_{i'}})$のcodim.1の各singular set $\overbrace{S_j}^{\text{の既約成分}}$のgeneric point y_jを求める。各y_jについて、それが属する(G^*, V^*)のorbitを求め、それを(G, V)のorbitと見なし、$T^*_{Gx_i}V$の下にそのconormal bundle $T^*_{Gy_j}V$を置き、$T^*_{Gx_i}V$と線でつなぐ。

以上の操作によって得られるdiagramをholonomy diagramといい、各conormal bundleをholonomy manifoldとよぶ。

2. holonomy diagramによるb-多項式の求め方。

(1) holonomy manifoldのorder

各holonomy manifoldに$-\delta\chi(A_0)s - \mathrm{tr}_{V^*_{x_i}} A_0 + \frac{1}{2}\dim V^*_{x_i}$

（但し．$A_0 \in \mathfrak{g}_{x_i}$，${}^{-t}A_0 y_i = y_i$，$y_i$ は $V_{x_i}^*$ の generic point，δx は (G, V) の既約な相対不変多項式の character の微分）なる量を対応させる。これを．その holonomy manifold の order という。

(2) $m : n$ なる比．

$(G_{x_i}, V_{x_i}^*)$ の codim. 1 の各 singular set の既約成分 S_j から．その generic point y_j をとり．$A_1 \in \mathfrak{g}_{x_i}$ で．${}^{-t}A_1 y_j = y_j$ となる A_1 をとる。$\mathfrak{g}_{x_i} y_j$ に属さない元 y をとり．$A_1 y$ を mod. $\mathfrak{g}_{x_i} y_j$ で考えると．スカラー倍となるから．そのスカラーを a とする。

$$A_1 y \equiv a y \quad \text{mod.}\ \mathfrak{g}_{x_i} y_j$$

ここで $a = \frac{m}{m+n}$ なる等式をみたす互いに素な自然数 m, n が存在するとき．その比 $m : n$ を考える。holonomy manifold $T^*_{Gx_i}V$ のすぐ上に．y_j を $(G_{x_j}, V_{x_j}^*)$ の generic point とする holonomy manifold $T^*_{Gx_j}V$ が存在する。$m : n$ なる比をこの二つの holonomy manifold を結ぶ線に対応させる。

(3) order と m, n による b-多項式の因子の決定．

holonomy diagram の線は．これによって結ばれる二つの holonomy manifolds の間に codim. 1 の交わりがあることを意味する。1 の方法では、二つの holonomy manifolds

の間の交わりしか見いだせないが、三つ以上の holonomy manifolds が交わることもある。holonomy manifoldsの交わり方が次の場合について、その交わりに対応する b-多項式の因子を order と $m:n$ を用いて決定することができる。

(i) 二つだけが交わる場合

holonomy manifold Λ_0の上にΛ_1があり、線でつながれているものとする。Λ_0の一つの相対不変式の character を $\delta\rho_1$，order を $-m_0 s-\frac{\mu_0}{2}$，Λ_1の order を $-m_1 s-\frac{\mu_1}{2}$．Λ_0とΛ_1 の間の線に $m:n$ なる比が対応しているものとする。

Λ_0に関する相対不変式の characterが

$-\delta\chi = c_1\delta\rho_1+\cdots$，（$c_1$は整数）

$tr_{V^*_{\Lambda_0}} = a_1\delta\rho_1+\cdots$，（$a_1$は半整数）となっているとき、

(a). 交わりが transversal な場合

(2)における a が不定のとき、交わりはtransversalとなる。

$c_1 = m_0-m_1$，$a_1=\frac{\mu_0-\mu_1+1}{2}$ なる関係が成り立つ。このとき

Λ_0 —— Λ_1 の間の b-多項式の因子 $b_{\Lambda_0}(s)$は

$$b_{\Lambda_0}(s) = \left[(m_0-m_1)s+\frac{\mu_0-\mu_1+1}{2}\right]^{(m_0-m_1)} \qquad [\alpha]^m = \frac{\Gamma(\alpha+m)}{\Gamma(\alpha)}$$

（mは整数）

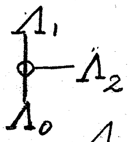
(b). 交わりが transversal でない場合、

$$c_1=\frac{(m_0-m_1)(n+m)}{n+1}, \quad a_1=\frac{1}{2}\left\{m+\frac{(\mu_0-\mu_1)(n+m)}{n+1}\right\}$$

なる関係が成り立つ。このとき、Λ_0—Λ_1 の間に

$$b_{\Lambda_0}(s)=\prod_{k=0}^{n}\left[\ell s+\frac{a_1+k}{m+n}\right]^{\ell},\ 但し\ \ell=\frac{m_0-m_1}{n+1}=\frac{c_1}{n+m}\in Z$$

(ii) 三つが交わる場合.

holonomy manifolds $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$ が 

のように交わる(Λ_0—Λ_1 の交わりは transversal, Λ_2 が Λ_0—Λ_1 と交わりに接する)場合.

Λ_j の order を $-m_j s-\frac{\mu_j}{2}$, $j=0,1,2$.

Λ_0—Λ_1 の交わりに $m:n$ の比が対応する。このとき、

$$\ell_0=\frac{(1+m)m_0-m_1-mm_2}{mn+m+n}\in Z$$

$$\ell_1=\frac{m_0+nm_2-(1+n)m_1}{mn+m+n}\in Z$$

$$\ell_2=\frac{(m+n)m_2-mm_0-nm_1}{mn+m+n}\in Z$$

とする。このとき

Λ_1——$\ominus$ の間に

$$\prod_{\nu=0}^{m-1}\left[\ell_1 s+\frac{\mu_0+n\mu_2-(1+n)\mu_1}{2(mn+m+n)}+\frac{1+n+2\nu}{2(m+n)}\right]^{\ell_1}$$

$\ominus$——Λ_0 の間に

$$\prod_{\nu=0}^{n-1}\left[\ell_0 s+\frac{(1+m)\mu_0-\mu_1-m\mu_2}{2(mn+m+n)}+\frac{1+m+2\nu}{2(m+n)}\right]^{\ell_0}$$

Λ_2——$\ominus$ の間に.

$$\left[\ell_2 s+\frac{(m+n)\mu_2-\mu_0-n\mu_1}{2(mn+m+n)}+\frac{1}{2}\right]^{\ell_2}$$

が対応する。

(4) 以上のように、b-多項式の因子が対応した holonomy diagram の線を最上位から最下位まで辿り、対応する因子の積をつくれば、道筋に関係なく、その積が b-多項式となる。

1975. 8. 15

$SL_{\text{日}}(5) \underset{\otimes}{\times} GL_{\square}(4)$ の orbits の generic point.

$u_i \wedge u_j \wedge u_k$ を以下 $\langle i,j,k\rangle$ と記す。〜は G-equivalent
n.ph は not prehomogeneous

⓪ $\langle 2,4,6\rangle+\langle 3,5,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 4,5,7\rangle+\langle 2,5,8\rangle+\langle 3,4,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle+\langle 2,3,9\rangle$

$\sim\langle 1,2,6\rangle+\langle 3,4,6\rangle+\langle 2,3,7\rangle+\langle 4,5,7\rangle+\langle 1,3,8\rangle+\langle 2,5,8\rangle+\langle 2,4,9\rangle$
$+\langle 3,5,9\rangle$ 40次元.

「39次元
① $\langle 4,5,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 2,5,7\rangle+\langle 1,4,8\rangle+\langle 2,3,8\rangle+\langle 1,5,9\rangle+\langle 2,4,9\rangle$

② $\langle 4,5,6\rangle+\langle 3,4,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 1,4,8\rangle+\langle 2,3,8\rangle+\langle 2,5,9\rangle$ 38次元

②' $\langle 4,5,6\rangle+\langle 3,5,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 2,3,7\rangle+\langle 1,4,8\rangle+\langle 2,5,9\rangle+\langle 3,4,9\rangle$
$\sim\langle 2,3,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle-\langle 4,5,7\rangle+\langle 2,5,8\rangle+\langle 3,4,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle-\langle 3,5,9\rangle$ 38次元

③ $\langle 4,5,6\rangle+\langle 1,5,7\rangle+\langle 3,4,7\rangle+\langle 2,3,8\rangle+\langle 2,4,9\rangle-\langle 1,3,9\rangle$ 37次元

③' $\langle 1,5,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 4,5,7\rangle+\langle 2,5,8\rangle+\langle 3,4,8\rangle+\langle 1,4,8\rangle+\langle 2,3,9\rangle$ 37次元

④ $\langle 4,5,6\rangle+\langle 1,5,7\rangle+\langle 1,4,8\rangle+\langle 2,3,8\rangle+\langle 2,4,9\rangle-\langle 1,3,9\rangle$ 36次元

④' $\langle 4,5,6\rangle+\langle 1,5,7\rangle+\langle 3,4,7\rangle+\langle 2,3,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle+\langle 2,5,9\rangle$ 36次元

④'' $\langle 2,5,6\rangle+\langle 2,4,7\rangle+\langle 3,5,7\rangle-\langle 1,5,8\rangle-\langle 3,4,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle-\langle 2,3,9\rangle$ 36次元

⑤ $\langle 1,5,6\rangle+\langle 3,4,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 4,5,7\rangle+\langle 1,4,8\rangle+\langle 3,5,8\rangle+\langle 2,5,9\rangle$ 35次元 n.ph

⑤' $\langle 3,5,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 2,4,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle+\langle 1,5,9\rangle+\langle 2,3,9\rangle$ 35次元, 最初⑤''''としたもの

⑤'' $\langle 4,5,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 1,4,8\rangle+\langle 2,5,8\rangle+\langle 2,3,9\rangle$ 35次元

⑤''' $\langle 3,5,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle-\langle 4,5,7\rangle+\langle 2,5,8\rangle+\langle 3,4,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle+\langle 2,3,9\rangle$ 35次元

⑥ $\langle 1,5,6\rangle+\langle 3,5,7\rangle+\langle 4,5,7\rangle+\langle 1,4,8\rangle+\langle 2,3,9\rangle$ 34次元

⑥' $\langle 3,5,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 1,5,8\rangle+\langle 2,4,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle+\langle 2,3,9\rangle$ 34次元

⑥'' $\langle 1,5,6\rangle+\langle 3,5,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 4,5,7\rangle+\langle 2,5,8\rangle+\langle 3,4,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle$ 34次元 n.ph

⑥''' $\langle 1,3,6\rangle-\langle 3,5,6\rangle+\langle 1,5,7\rangle+\langle 2,5,8\rangle-\langle 3,4,8\rangle-\langle 1,4,9\rangle+\langle 2,3,9\rangle$ 34次元 n,ph

⑦ $\langle 2,5,6\rangle+\langle 2,4,7\rangle+\langle 3,5,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle-\langle 2,3,9\rangle$ 33次元 n.ph

⑦' $\langle 3,5,6\rangle+\langle 1,5,7\rangle+\langle 2,4,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle+\langle 2,5,9\rangle$ 33次元 n.ph

⑦'' $\langle 1,2,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 2,5,8\rangle+\langle 3,4,8\rangle+\langle 1,5,9\rangle+\langle 2,4,9\rangle$
$\sim\langle 3,5,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 1,2,8\rangle+\langle 4,5,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle+\langle 2,3,9\rangle$ 33次元

⑦''' $\langle 1,3,7\rangle-\langle 4,5,7\rangle+\langle 2,5,8\rangle+\langle 3,4,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle+\langle 2,3,9\rangle$ 33次元 n.ph

⑧ $\langle 2,5,6\rangle+\langle 3,4,7\rangle-\langle 1,5,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle\sim\langle 2,5,6\rangle+\langle 3,4,7\rangle+\langle 2,4,8\rangle+\langle 1,5,9\rangle$ 32次元

⑧' $\langle 2,3,6\rangle+\langle 2,5,7\rangle+\langle 2,4,8\rangle+\langle 3,5,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle$ 32次元

⑨ $\langle 3,5,7\rangle+\langle 2,4,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle+\langle 1,5,9\rangle+\langle 2,3,9\rangle$ 31次元 n.ph

⑨′ $\langle 2,5,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 1,2,8\rangle+\langle 2,4,9\rangle+\langle 3,5,9\rangle$ 31次元 n.ph

同一 orbit

⑨″ $\langle 1,2,6\rangle+\langle 3,5,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 1,4,8\rangle+\langle 2,3,8\rangle+\langle 1,5,9\rangle+\langle 3,4,9\rangle$ 31次元 n.ph

⑨‴ $\langle 4,5,6\rangle+\langle 1,4,7\rangle+\langle 2,5,8\rangle+\langle 3,4,9\rangle+\langle 3,5,9\rangle$ 31次元 n.ph

⑩ $\langle 2,5,7\rangle+\langle 2,4,8\rangle+\langle 3,5,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle+\langle 2,3,9\rangle$ 30次元 n.ph

⑪ $\langle 3,5,6\rangle+\langle 2,5,7\rangle+\langle 4,5,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle+\langle 2,3,9\rangle$ 29次元 n.ph

⑫ $\langle 2,3,6\rangle+\langle 2,5,7\rangle+\langle 3,5,8\rangle+\langle 1,4,9\rangle$ 28次元

⑫′ $\langle 2,3,6\rangle+\langle 2,4,7\rangle-\langle 1,5,8\rangle+\langle 1,2,9\rangle$ 28次元 n.ph

⑳ $\langle 1,2,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 1,4,8\rangle+\langle 1,5,9\rangle$ 20次元 n.ph

Nov. 4 現在, 下記のorbitsが追加された. 又, 上記 ⑨″と⑨‴が同一orbitであることもわかった.

(全て not prehomogeneous)

⑧‴ $\langle 1,4,6\rangle+\langle 2,5,6\rangle+\langle 3,4,7\rangle+\langle 1,5,7\rangle+\langle 2,3,8\rangle$ 32次元 codim 8

⑮″ $\langle 1,2,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 2,4,7\rangle+\langle 3,4,8\rangle$ 25次元 codim 15

⑱′ $\langle 1,4,7\rangle+\langle 2,3,6\rangle+\langle 1,5,6\rangle$ 22次元 codim 18

㉒ $\langle 1,2,6\rangle+\langle 1,3,7\rangle+\langle 2,3,8\rangle$ 18次元 codim 22

㉗ $\langle 1,3,6\rangle+\langle 2,4,6\rangle$ 13次元 codim 27

⑥⁗ $\langle 1,3,6\rangle+\langle 1,4,7\rangle+\langle 1,5,8\rangle+\langle 2,3,7\rangle+\langle 2,4,8\rangle+\langle 2,5,9\rangle$ 34次元

⑧‴* = ⑱′

⑥⁗* = ㉒

- i^* は i の dual。
- ? は generic point が不明。

$40 = 0^*$ 　 0 　 40次元 　 codim 0

$30 = 1$ 　 $\langle 1,2,6\rangle$ 　 10次元 　 codim 30

$24 = 2^*$ 　 $\langle 1,2,6\rangle + \langle 2,4,7\rangle$ 16次元 codim 24

$21' = 2'^*$ 　 $\langle 1,3,6\rangle + \langle 2,4,6\rangle - \langle 1,2,7\rangle$ 19次元 codim 21

$18 = 3^*$ 　 $\langle 1,4,6\rangle + \langle 2,3,6\rangle + \langle 1,2,7\rangle + \langle 1,3,8\rangle$ 22次元 codim 18

$15 = 3'^*$ 　 $\langle 2,5,6\rangle - \langle 3,4,6\rangle + \langle 2,4,8\rangle - 2\langle 1,2,7\rangle$ 25次元 codim 15

$20' = 4^*$ 　 $\langle 1,2,6\rangle + \langle 3,4,7\rangle$ 20次元 codim 20

$14 = 4'^*$ 　 $\langle 2,4,6\rangle - \langle 3,5,6\rangle + \langle 1,2,7\rangle + \langle 1,3,8\rangle$ 26次元 codim 14

$11' = 4''^*$ 　 $\langle 1,4,7\rangle + \langle 2,3,7\rangle - \langle 1,2,8\rangle - \langle 1,3,9\rangle - 2\langle 1,5,6\rangle - 2\langle 3,4,6\rangle$ 29次元 codim 11

$21 = 5^*$ 　 $\langle 1,2,6\rangle + \langle 1,3,7\rangle + \langle 1,4,8\rangle$ 19次元 codim 21 n.ph

$12'' = 5'^*$ 　 $\langle 1,2,6\rangle + \langle 4,5,6\rangle - \langle 1,4,7\rangle + \langle 2,3,7\rangle - \langle 2,5,9\rangle$ 28次元 codim 12

$16 = 5''^*$ 　 $\langle 1,2,6\rangle + \langle 3,4,7\rangle + \langle 1,3,8\rangle$ 24次元 codim 16

$9''' = 5'''^*$ 　 $2\langle 1,3,6\rangle + 2\langle 4,5,6\rangle - \langle 1,4,7\rangle + \langle 2,3,7\rangle - \langle 2,4,9\rangle - 3\langle 1,2,8\rangle$ 21次元 codim 9

$14 = 6^*$ 　 $\langle 4,5,6\rangle + \langle 1,2,7\rangle + \langle 1,3,8\rangle$ 26次元 codim 14

$8'' = 6'^*$ 　 $\langle 2,5,6\rangle + \langle 3,4,6\rangle + \langle 1,4,7\rangle + \langle 1,3,8\rangle - \langle 2,3,8\rangle + \langle 1,2,9\rangle$ 32次元 codim 8

$14' = 6''^*$ 　 $\langle 2,5,6\rangle + \langle 3,4,6\rangle + \langle 1,2,7\rangle + \langle 2,4,8\rangle + \langle 2,3,9\rangle$ 26次元 codim 14 n.ph

$14''' = 6'''^*$ 　 $\langle 2,3,6\rangle - \langle 1,4,6\rangle - \langle 1,2,7\rangle + \langle 4,5,7\rangle + \langle 2,4,8\rangle$ 26次元 codim 14 n.ph

$10' = 7^*$ 　 $\langle 1,5,6\rangle + \langle 4,5,7\rangle + \langle 3,4,8\rangle - \langle 1,4,9\rangle + \langle 2,5,9\rangle$ 30次元 codim 10 n.ph

$15' = 7'^*$ 　 $\langle 1,5,6\rangle + \langle 1,4,7\rangle + \langle 3,4,8\rangle + \langle 4,5,9\rangle$ 25次元 codim 15 n.ph

$7''^* \sim 7''$

$27 = 7'''^*$

$8^* \sim 8$

$11'' = 8'^*$ 　 $\langle 4,5,6\rangle + \langle 1,2,7\rangle + \langle 3,4,7\rangle - \langle 1,3,8\rangle$ 29次元 codim 11

$13 = 9^*$ 　 $\langle 4,5,6\rangle + \langle 1,3,7\rangle + \langle 2,4,7\rangle + \langle 2,5,9\rangle$ 27次元 codim 13 n.ph

$9'^* \sim 9'$

$13' = 9''^*$ 　 $\langle 1,4,7\rangle + \langle 2,3,7\rangle + \langle 2,4,8\rangle + \langle 2,5,9\rangle$ 27次元 codim 13 n.ph

$10^* \sim 10$, $11^* = 15''$

$10'' = 12^*$ 　 $\langle 1,2,6\rangle + \langle 1,5,8\rangle + \langle 3,5,8\rangle + \langle 3,4,9\rangle$ 30次元 codim 10

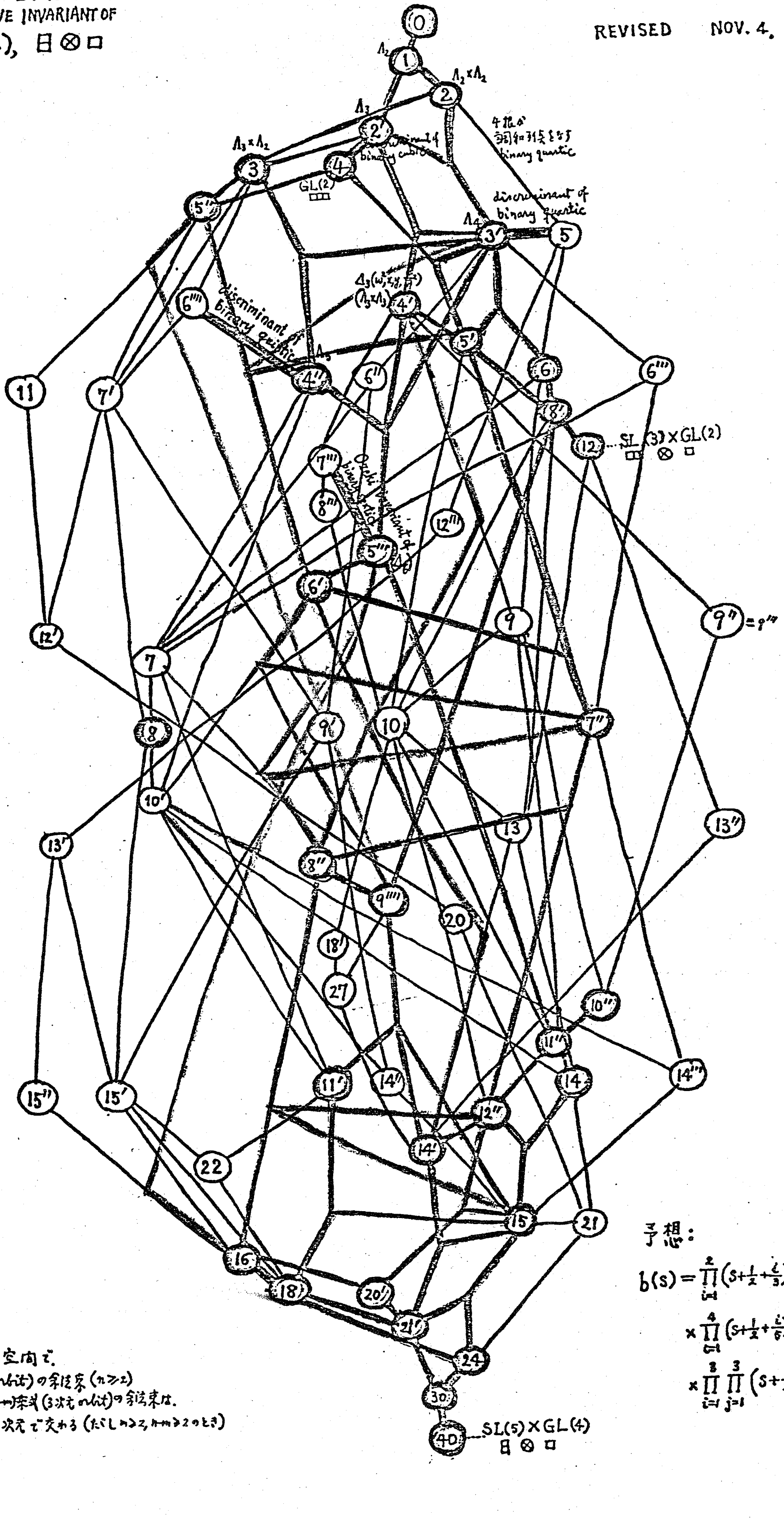
$13' = 12'^*$ 　 $\langle 4,5,6\rangle + \langle 3,5,7\rangle + \langle 1,4,7\rangle + \langle 3,4,8\rangle + \langle 1,3,9\rangle$ 27次元 codim 13 n.ph

$12'' = 20^*$ 　 $\langle 1,3,6\rangle + \langle 2,3,7\rangle + \langle 1,4,8\rangle + \langle 2,4,9\rangle$

HOLONOMY DIAGRAM
OF THE RELATIVE INVARIANT OF
SL(5)×GL(4), 日⊗ロ

I. OZEKI, MAY 1975

REVISED NOV. 4, 1975



◎ binary n次式の空間で、
完全n乗式（2次元のorbit）の余法束（n≧2）
および m乗式×(n−m)乗式（3次元のorbit）の余法束は、
原点のfiberと1余次元で交わる（ただしm≧2, n−m≧2のとき）

予想：

$$b(s)=\prod_{i=1}^{2}\left(s+\frac{1}{2}+\frac{i}{3}\right)^2\cdot\prod_{i=1}^{3}\left(s+\frac{1}{2}+\frac{i}{4}\right)^3$$
$$\times\prod_{i=1}^{4}\left(s+\frac{1}{2}+\frac{i}{5}\right)^2\cdot\prod_{i=1}^{5}\left(s+\frac{1}{2}+\frac{i}{6}\right)^2$$
$$\times\prod_{i=1}^{3}\prod_{j=1}^{3}\left(s+\frac{1}{2}+\frac{7i-j}{24}\right)$$