数理解析研究所講究録
第 266 巻 1976 年 259-274

$SL(3;\mathbb{R})$の帯球函数について

名大理　関口次郎

§0　序

対称空間 $SL(2;\mathbb{R})/SO(2)$ 上の帯球函数が Legendre の函数 $P_\nu(z)$であらわされることは，よく知られている。一般に rank = 1 の対称空間上の帯球函数は 超幾何型特殊函数であらわされる．

ここでは rank = 2 の対称空間 $SL(3;\mathbb{R})/SO(2)$ 上の帯球函数を考える。それは２変数の函数であり Legendre の函数と似た解析的性質をもつと思われる．特殊なパラメータの場合には Appell の超幾何函数 $F_1(\alpha,\beta,\beta';\gamma;x,y)$ によってあらわすことができる．Legendre の函数の間には漸化式，昇降漸化式などが知られているが，この場合にもそれの類似が成立つ．

さらに 一般の$SL(n;\mathbb{R})/SO(n)$上の帯球函数についても 特殊なパラメータの場合には Lauricella の超幾何函数であらわせる，

§1 準備

Gを半単~~準~~純Lie群，Kをその極大コンパクト部分群，Aを極大輪環部分群とする． $\mathbb{D}(G/K)$ をG−不変微分作用素のなす環とする． $\dim A (=\ell)$ を対称空間 G/K の rank とよぶ． $\mathbb{D}(G/K)$ は ℓ コの基 $\Delta_1, \cdots, \Delta_\ell$ をもち，それらは可換で，しかも $\mathbb{D}(G/K) \cong \mathbb{C}[\Delta_1, \cdots, \Delta_\ell]$ が成立つ．

定義　$\varphi \in C^\infty(G/K)$ は

$$D\varphi = \lambda(D)\varphi \quad \text{for } \forall D \in \mathbb{D}(G/K)$$

$$\varphi(eK) = 1$$

が成立つとき，球函数とよぶ． ただし $\lambda \in \mathrm{Hom}(\mathbb{D}(G/K), \mathbb{C})$ eはGの単位元とする． さらに

$$\varphi(kx) = \varphi(x) \quad \text{for } \forall k \in K,\ x \in G/K$$

が成立つとき φを帯球函数とよぶ．

G/K 上の函数はG上の函数とみなせる． そのとき帯球函数は K−不変なG上の函数となる． さらに $G=KAK$ という Cartan 分解を考えれば，A上の函数とみてよい．

$D \in \mathbb{D}(G/K)$ の動径部分を $\mathfrak{R}(D)$ とかくとき 以上のことから 帯球函数を求めることは

$$\begin{cases} \mathfrak{R}(\Delta_i)\varphi = \lambda(\Delta_i)\varphi & i = 1, \cdots, \ell \\ \varphi(e) = 1 \end{cases}$$

をみたすA上の函数を求めることに帰着される.

§2 $G=SL(3;\mathbb{R})$の場合

$G=SL(n;\mathbb{R})$のとき $K=SO(n)$, $A=\left\{\begin{pmatrix} e^{t_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{t_n}\end{pmatrix}; t_i\in\mathbb{R}, t_1+\cdots+t_n=0\right\}$ である. この場合, 不変微分作用素の基は Cappelli の恒等式によって得られることが知られている.

$\mathfrak{g}$をGの Lie 環とする. $f\in C^\infty(G)$ に対して $X\in\mathfrak{g}$ は $(Xf)(g)=\frac{d}{dt}f(g\exp tX)\Big|_{t=0}$ として 左不変微分作用素と同一視できる.

$$X_{ij}:=\begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{c} j \\ \begin{pmatrix} & \vdots & 0 \\ \cdots & 1 & \cdots \\ 0 & & \end{pmatrix} i\end{array} \qquad X_i:=X_{ii}-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}X_{jj}$$

とすれば X_{ij}, $X_k\in\mathfrak{g}$ $(i\neq j)$ である.

$$\Delta(\lambda):=\overrightarrow{\det}\begin{vmatrix} \lambda+X_1+\frac{n-1}{2} & X_{12} & \cdots & X_{1n} \\ X_{21} & \lambda+X_2+\frac{n-3}{2} & \cdots & X_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & \lambda+X_n-\frac{n-1}{2}\end{vmatrix}$$

として $\Delta(\lambda)$ を定義する. ただし λはX_{ij} などとは無関係な文字, $\overrightarrow{\det}$ は 行列式を左から右へとかけて求めることを意味する(X_{ij}は非可換なのでこのように定義する)

$$\Delta(\lambda)=\lambda^n+\lambda^{n-1}\Delta_1+\lambda^{n-2}\Delta_2+\cdots+\Delta_n$$

とおく. 明らかに $\Delta_1=X_1+\cdots+X_n=0$

Prop. $G=SL(n;\mathbb{R})$ のとき $\Delta_2, \cdots, \Delta_n$ は $\mathbb{D}(G/K)$ の基である.

Δ_i の動径部分 $\mathfrak{l}(\Delta_i)$ を求めるには, $g \in SL(n;\mathbb{R})$ に対して $f(g) := \det(\lambda + {}^t g g)$ を考え $(\Delta_i f(g))|_A$ を計算すればよい. (あるいは [4] 9.1.2 に従ってもよい)

$n=3$ の時の計算を実行すると結果は次のようになる. 便宜上 $GL(3;\mathbb{R})=G$ とする. そのときは A に $t_1+\cdots+t_n=0$ という条件を除けばよい. また X_i として X_{ii} をそのままとて $\Delta(\lambda)$ を考える. すると $\Delta_1 \neq 0$ となることに注意しておく. $\tau_i = e^{2t_i}$ $i=1,\cdots,n$. $\vartheta_i = \tau_i \frac{\partial}{\partial \tau_i}$ $i=1,\cdots,n$

$$\mathfrak{l}(\Delta_1) = 2\vartheta_1 + 2\vartheta_2 + 2\vartheta_3$$

$$\mathfrak{l}(\Delta_2) = 4\vartheta_2\vartheta_3 + 4\vartheta_3\vartheta_1 + 4\vartheta_1\vartheta_2 + \frac{2(\tau_1^2-\tau_2\tau_3)}{(\tau_3-\tau_1)(\tau_1-\tau_2)}\vartheta_1 + \frac{2(\tau_2^2-\tau_3\tau_1)}{(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)}\vartheta_2 + \frac{2(\tau_3^2-\tau_1\tau_2)}{(\tau_2-\tau_3)(\tau_3-\tau_1)}\vartheta_3 - 1$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{l}(\Delta_3) = {} & 8\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 - \frac{4(\tau_1^2-\tau_2\tau_3)}{(\tau_3-\tau_1)(\tau_1-\tau_2)}\vartheta_2\vartheta_3 - \frac{4(\tau_2^2-\tau_3\tau_1)}{(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)}\vartheta_3\vartheta_1 \\ & - \frac{4(\tau_3^2-\tau_1\tau_2)}{(\tau_2-\tau_3)(\tau_3-\tau_1)}\vartheta_1\vartheta_2 - \frac{2\tau_1(\tau_2+\tau_3)}{(\tau_3-\tau_1)(\tau_1-\tau_2)}\vartheta_1 - \frac{2\tau_2(\tau_3+\tau_1)}{(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)}\vartheta_2 \\ & - \frac{2\tau_3(\tau_1+\tau_2)}{(\tau_2-\tau_3)(\tau_3-\tau_1)}\vartheta_3\end{aligned}$$

(今後は $\mathfrak{l}(\Delta_i)$ の代りに Δ_i とそのまま書くことにする.)

$$
(1)\quad \begin{cases} \Delta_1\varphi = 0 \\ \Delta_2\varphi = (\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)\varphi \\ \Delta_3\varphi = \lambda_1\lambda_2\lambda_3\varphi \end{cases} \qquad (\text{ただし } \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0)
$$

が帯球函数のみたす微分方程式系である.

Δ_2, Δ_3 を見やすい形にかきかえるために, 次の微分作用素を考える.

$$
L_{ij} := 4\left\{\partial_i\partial_j + \frac{1}{4}\frac{\tau_i+\tau_j}{\tau_i-\tau_j}\partial_j + \frac{1}{4}\frac{\tau_j+\tau_i}{\tau_j-\tau_i}\partial_i\right\} \quad (i \neq j)
$$

Lemma.

○ $\Delta_2 = L_{23} + L_{31} + L_{12} - 1$

○ $3\Delta_3 = 2\partial_1 L_{23} + 2\partial_2 L_{31} + 2\partial_3 L_{12} + \dfrac{2(\tau_2\tau_3-\tau_1^2)}{(\tau_3-\tau_1)(\tau_1-\tau_2)}L_{23}$
$\qquad + \dfrac{2(\tau_3\tau_1-\tau_2^2)}{(\tau_1-\tau_2)(\tau_2-\tau_3)}L_{31} + \dfrac{2(\tau_1\tau_2-\tau_3^2)}{(\tau_2-\tau_3)(\tau_3-\tau_1)}L_{12}$

次に新たに~~らしく~~以下の微分方程式系を考える.

$$
(2)\quad \begin{cases} \Delta_1\varphi = 0 \\ L_{23}\varphi = \left\{\left(\frac{4}{3}\nu+1\right)\partial_1 - \frac{4}{9}\nu\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\right\}\varphi \\ L_{31}\varphi = \left\{\left(\frac{4}{3}\nu+1\right)\partial_2 - \frac{4}{9}\nu\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\right\}\varphi \\ L_{12}\varphi = \left\{\left(\frac{4}{3}\nu+1\right)\partial_3 - \frac{4}{9}\nu\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\right\}\varphi \end{cases}
$$

Prop. 方程式系 (2) の解に対して

$$
\Delta_2\varphi = -\frac{4}{3}\left(\nu^2+\frac{3}{2}\nu+\frac{3}{4}\right)\varphi
$$

$$
\Delta_3\varphi = 4\cdot\frac{\nu}{3}\left(\frac{\nu}{3}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\nu+1\right)\varphi
$$

proof.) $(L_{23}+L_{31}+L_{12})\varphi = -\frac{4}{3}\nu(\nu+\frac{3}{2})\varphi$

$$
\begin{aligned}
3\Delta_3\varphi &= \left\{2\left(\tfrac{4}{3}\nu+1\right)(\vartheta_1^2+\vartheta_2^2+\vartheta_3^2)\right.\\
&\quad \left.+\left(\tfrac{4}{3}\nu+1\right)\left(\frac{2(\tau_2\tau_3-\tau_1^2)}{(\tau_3-\tau_1)(\tau_1-\tau_2)}\vartheta_1+\cdots\right)\right\}\varphi\\
&=\left(\tfrac{4}{3}\nu+1\right)\left\{-4(\vartheta_2\vartheta_3+\vartheta_3\vartheta_1+\vartheta_1\vartheta_2)+\frac{2(\tau_2\tau_3-\tau_1)^2}{(\tau_3-\tau_1)(\tau_1-\tau_2)}\vartheta_1+\cdots\right\}\varphi\\
&=-\left(\tfrac{4}{3}\nu+1\right)(\Delta_2+1)\varphi\\
&=\tfrac{4}{3}\nu\left(\nu+\tfrac{3}{2}\right)\left(\tfrac{4}{3}\nu+1\right)\varphi \qquad //
\end{aligned}
$$

このことから $\lambda_1=\frac{2}{3}\nu$, $\lambda_2=\frac{2}{3}\nu+1$, $\lambda_3=-\frac{4}{3}\nu-1$ としたとき (2) の解は (1) の解であることがわかる.

方程式系(2) を解く. φは3変数の函数である. これは $SL(3;\mathbb{R})$ の代りに $GL(3;\mathbb{R})$で計算したためにそうなったのであった. そこで A の変数 τ_1, τ_2, τ_3 の間に $\tau_1\cdot\tau_2\tau_3=1$ として $SL(3;\mathbb{R})$に"もどす". そして $y_1=\tau_1/\tau_3$, $y_2=\tau_2/\tau_3$ という変数をつかって 方程式系(2) を書きかえると 次のようになる.

$$
(2')\left\{
\begin{aligned}
&\left\{\vartheta_1(\vartheta_1+\vartheta_2)-\tfrac{1}{2}\vartheta_1+\tfrac{\nu}{3}\vartheta_2-\tfrac{\nu}{3}\left(\tfrac{\nu}{3}+\tfrac{1}{2}\right)\right\}\varphi\\
&\qquad=y_1\left\{\vartheta_1(\vartheta_1+\vartheta_2)+\tfrac{1}{2}\vartheta_1+\left(\tfrac{\nu}{3}+\tfrac{1}{2}\right)\vartheta_2-\tfrac{\nu}{3}\left(\tfrac{\nu}{3}+\tfrac{1}{2}\right)\right\}\varphi\\
&\left\{\vartheta_2(\vartheta_1+\vartheta_2)+\tfrac{\nu}{3}\vartheta_1-\tfrac{1}{2}\vartheta_2-\tfrac{\nu}{3}\left(\tfrac{\nu}{3}+\tfrac{1}{2}\right)\right\}\varphi\\
&\qquad=y_2\left\{\vartheta_2(\vartheta_1+\vartheta_2)+\left(\tfrac{\nu}{3}+\tfrac{1}{2}\right)\vartheta_1+\tfrac{1}{2}\vartheta_2-\tfrac{\nu}{3}\left(\tfrac{\nu}{3}+\tfrac{1}{2}\right)\right\}\varphi\\
&y_1\left\{\vartheta_1\vartheta_2+\tfrac{\nu}{3}\vartheta_1+\left(\tfrac{\nu}{3}+\tfrac{1}{2}\right)\vartheta_2+\tfrac{\nu}{3}\left(\tfrac{\nu}{3}+\tfrac{1}{2}\right)\right\}\varphi\\
&\qquad=y_2\left\{\vartheta_1\vartheta_2+\left(\tfrac{\nu}{3}+\tfrac{1}{2}\right)\vartheta_1+\tfrac{\nu}{3}\vartheta_2+\tfrac{\nu}{3}\left(\tfrac{\nu}{3}+\tfrac{1}{2}\right)\right\}\varphi
\end{aligned}\right.
$$

ただし　$\vartheta_i = y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$　$i=1,2$（前のϑ_iでない!!）．$\Delta_1\varphi=0$ はEulerの恒等式なので２変数にしてしまえばいらない．

さらに　$\varphi = (y_1 y_2)^{-\frac{\nu}{3}} u$ として，u についての微分方程式系を求めると 次のようになる．

$$
(2'')\left\{
\begin{aligned}
\vartheta_1(\vartheta_1+\vartheta_2-\nu-\tfrac{1}{2})\,u &= y_1(\vartheta_1+\tfrac{1}{2})(\vartheta_1+\vartheta_2-\nu)\,u\\
\vartheta_2(\vartheta_1+\vartheta_2-\nu-\tfrac{1}{2})\,u &= y_2(\vartheta_2+\tfrac{1}{2})(\vartheta_1+\vartheta_2-\nu)\,u\\
y_1(\vartheta_1+\tfrac{1}{2})\vartheta_2\,u &= y_2\vartheta_1(\vartheta_2+\tfrac{1}{2})\,u
\end{aligned}
\right.
$$

これは Appell の超幾何函数 $F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y)$ のみたす微分方程式系になっている．　ところで　この函数は次のようにして定義される．（［２］参照）

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y) := \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)(\beta',n)}{(\gamma,m+n)\,m!\,n!} x^m y^n$$

（ただし $(\alpha,m)=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+m-1)$ ）

この函数のみたす微分方程式系は

$$
(3)\left\{
\begin{aligned}
\vartheta_x(\vartheta_x+\vartheta_y+\gamma-1)\,u &= x(\vartheta_x+\vartheta_y+\alpha)(\vartheta_x+\beta)\,u\\
\vartheta_y(\vartheta_x+\vartheta_y+\gamma-1)\,u &= y(\vartheta_x+\vartheta_y+\alpha)(\vartheta_y+\beta')\,u\\
x(\vartheta_x+\beta)\vartheta_y\,u &= y\,\vartheta_x(\vartheta_y+\beta')\,u
\end{aligned}
\right.
$$

ただし　$\vartheta_x = x\frac{\partial}{\partial x}$，$\vartheta_y = y\frac{\partial}{\partial y}$

また，次のような積分表示が知られている．

$$F_1(\alpha,\beta,\beta',\gamma;x,y) = \int_0^1 u^{\alpha-1}(1-u)^{\gamma-\alpha-1}(1-ux)^{-\beta}(1-uy)^{-\beta'}du$$

（ただし　$\mathrm{Re}\,\alpha > 0$,　$\mathrm{Re}(\gamma-\alpha) > 0$　）

(3) の解の次元は3である．　それらはみな F_1 をつかってあらわすことができる．

さて (2″) は (3) で　$\alpha = -\nu$, $\beta = \beta' = \frac{1}{2}$, $\gamma = -\nu + \frac{1}{2}$ とした形になっている．　$F_1(\alpha, \beta, \beta', 1+\alpha+\beta+\beta'-\gamma; 1-x, 1-y)$ も (3) の解になっているので

$$u = F_1(-\nu, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}; \tfrac{3}{2}, 1-y_1, 1-y_2)$$

は (2″) の解である．　$\cancel{\varphi =}$

$$\varphi_\nu = (y_1 y_2)^{-\frac{\nu}{3}} F_1(-\nu, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{3}{2}; 1-y_1, 1-y_2)$$

は，$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 1$, のとき $y_1 = y_2 = 1$ となるから　$\varphi = 1$ となる．　これは　φ_ν が帯球函数であることを意味する．

(2′) の3コの独立解として　φ_ν の他に次の2つをえらぶこともできる．

$$(y_1 y_2)^{-\frac{\nu}{3}} F_1(-\nu, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\nu+\tfrac{1}{2}; y_1, y_2)$$

$$y_1^{\frac{2}{3}\nu} y_2^{-\frac{\nu}{3}} F_1(-\nu, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, -\nu+\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{y_1}, \tfrac{y_2}{y_1})$$

とくに ν が整数のときは　次が成立つ．

<u>Prop.</u> $\left[(1-\tau_1\zeta)(1-\tau_2\zeta)(1-\tau_3\zeta)\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{3}{2}, n)}{n!} \varphi_n \zeta^n$

とするとき　φ_n は帯球函数である．

これは　Legendre　の多項式の母函数の類似である．すなわち，次のことは知られている．

$$[(1-\tau_1\zeta)(1-\tau_2\zeta)]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\zeta^n$$

（ただし $\tau_1\tau_2=1$, $z=\frac{\tau_1+\tau_2}{2}$　τ_1, τ_2 は $SL(2;\mathbb{R})$ の max. torus $A=\left\{\begin{pmatrix}\sqrt{\tau_1} & 0\\ 0 & \sqrt{\tau_2}\end{pmatrix};\ \tau_1>0, \tau_2>0\right\}$ の座標）

上の母函数より次の漸化式は容易に示せる.

(4)　$(\nu+1)\psi_{\nu+1}-(\nu+\frac{1}{2})\alpha_1\psi_\nu+\nu\alpha_2\psi_{\nu-1}-(\nu-\frac{1}{2})\psi_{\nu-2}=0$

（ただし　$\psi_\nu=\frac{(\frac{3}{2},\nu)}{\nu!}\varphi_\nu$,　$\alpha_1=\tau_1+\tau_2+\tau_3$, $\alpha_2=\tau_1^{-1}+\tau_2^{-1}+\tau_3^{-1}$.）

§3　$SL(3;\mathbb{R})$ の帯球函数のみたす漸化式

$$\alpha_1=\tau_1+\tau_2+\tau_3, \quad \alpha_2=\tau_1^{-1}+\tau_2^{-1}+\tau_3^{-1} \quad (\tau_1\tau_2\tau_3=1)$$

を変数として, 不変微分作用素の基 Δ_2, Δ_3 を書きかえると

$$\Delta_2=4(\alpha_2-\tfrac{1}{3}\alpha_1^2)D_1^2+4(3-\tfrac{1}{3}\alpha_1\alpha_2)D_1D_2+4(\alpha_1-\tfrac{1}{3}\alpha_2^2)D_2^2 -\tfrac{10}{3}\alpha_1D_1-\tfrac{10}{3}\alpha_2D_2-1$$

$$\begin{aligned}\Delta_3=\ & 8(1-\tfrac{1}{3}\alpha_1\alpha_2+\tfrac{2}{27}\alpha_1^3)D_1^3+8(\alpha_1-\tfrac{2}{3}\alpha_2^2+\tfrac{1}{9}\alpha_1^2\alpha_2)D_1^2D_2\\ & -8(\alpha_2-\tfrac{2}{3}\alpha_1^2+\tfrac{1}{9}\alpha_1\alpha_2^2)D_1D_2^2-8(1-\tfrac{1}{3}\alpha_1\alpha_2+\tfrac{2}{27}\alpha_2^3)D_2^3\\ & -\tfrac{14}{3}(\alpha_2-\tfrac{1}{3}\alpha_1^2)D_1^2+\tfrac{14}{3}(\alpha_1-\tfrac{1}{3}\alpha_2^2)D_2^2+\tfrac{35}{27}\alpha_1D_1-\tfrac{35}{27}\alpha_2D_2\end{aligned}$$

となる.

$$(5)\left\{\begin{aligned}\Delta_2\varphi &= (\lambda_2\lambda_3+\lambda_3\lambda_1+\lambda_1\lambda_2)\varphi\\ \Delta_3\varphi &= \lambda_1\lambda_2\lambda_3\varphi\end{aligned}\right. \qquad (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0)$$

の解を $\varphi_{\mu\nu}=\varphi_{\mu\nu}(\alpha_1,\alpha_2)$　$(\varphi_{\mu\nu}(3,3)=1)$ とする. ただし　$\mu=\frac{\lambda_2-\lambda_1-1}{2}$　$\nu=\frac{\lambda_3-\lambda_2-1}{2}$

§2 で求めた帯球函数は　$\varphi_{\mu 0}$, $\varphi_{0\nu}$ などである.

μ, ν が~~正~~非負整数のとき $\varphi_{\mu\nu}(\alpha_1, \alpha_2)$ は α_1, α_2 の多項式である．実際 $\varphi_{\mu\nu}$ は次のような形をしている．

$$\varphi_{\mu\nu}(\alpha) = \sum C_{pq}\, \alpha_1^p \alpha_2^q$$

ただし (p, q) は ~~$m+2n$~~ $\mu+2\nu \equiv p+2q \pmod 3$

$p+q \leqq \mu+\nu$ という格子を動く．それは

$$\Delta_2 \alpha_1^m \alpha_2^n = (\lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 + \lambda_1\lambda_2)\alpha_1^m \alpha_2^n + m(m-1)\alpha_1^{m-2}\alpha_2^{n+1} + 3mn\alpha_1^{m-1}\alpha_2^{n-1} + n(n-1)\alpha_1^{m+1}\alpha_2^{n-2}$$

などからわかる．$\Phi_{\mu\nu}(\alpha) = c\,\varphi_{\mu\nu}(\alpha)$ を $\alpha_1^\mu \alpha_2^\nu$ の係数が 1 となるように定める．

$$\Phi_{\mu\nu}(\alpha) = \alpha_1^\mu \alpha_2^\nu - \frac{2\mu(\mu-1)}{2\mu-1}\alpha_1^{\mu-2}\alpha_2^{\nu+1} - \frac{2\nu(\nu-1)}{2\nu-1}\alpha_1^{\mu+1}\alpha_2^{\nu-2} + \cdots$$

さて $\varphi_{\mu\nu}(\alpha)$ $(\mu, \nu \in \mathbb{N})$ は $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 1$ のとき 1になるものだから 帯球函数であり，したがって $\{\varphi_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu\in\mathbb{N}}$ は ヒルベルト空間の直交基になっている．したがって $\{\Phi_{\mu\nu}\}_{\mu,\nu\in\mathbb{N}}$ についても同様である．そのヒルベルト空間の内積を $(\ ,\ )$ としたとき，それは次のような性質をもつ．

① $(\Phi_{\mu_1\nu_1}, \Phi_{\mu_2\nu_2}) = 0$ if $\mu_1 \neq \mu_2$ or $\nu_1 \neq \nu_2$

② $(\alpha_1 \Phi_{\mu_1\nu_1}, \Phi_{\mu_2\nu_2}) = (\Phi_{\mu_1\nu_1}, \alpha_2 \Phi_{\mu_2\nu_2})$

③ $\alpha_1^p \alpha_2^q$ は $\{\Phi_{\mu_1\nu_1}\}$ の $\mathbb{R}$上有限1次結合であらわせる．しかも (μ_1, ν_1) は次のようなものだけでよい．すなわち $\mu_1+\nu_1 \leq p+q$，$p+2q \equiv \mu_1+2\nu_1 \pmod 3$

Prop. $\{\Psi_{mn}\}_{m,n\in\mathbb{N}}$ の間には 次の関係式が成立つ.

$$\Psi_{mn}=\alpha_1\Psi_{m-1,n}-\frac{(2m-2)^2}{(2m-3)(2m-1)}\Psi_{m-2,n+1}-\frac{(2m+2n-1)^2}{(m+n)(m+n-1)}\frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)}\Psi_{m-1,n-1}$$

mとnをおきかえてα_1とα_2をおきかえても同様な式が成立つ.

証) $\Psi_{mn}-\alpha_1\Psi_{m-1,n}=\sum A_{pq}\Psi_{pq}$ $(^\exists A_{pq}\in\mathbb{R})$

ただし和は $m+2n\equiv p+2q \mod 3$, $p+q<m+n$ にわたる. (p,q) がこのようなとき

$$\begin{aligned}A_{pq}&=(\Psi_{mn}-\alpha_1\Psi_{m-1,n},\ \Psi_{pq})\\&=-(\alpha_1\Psi_{m-1,n},\ \Psi_{pq})\\&=-(\Psi_{m-1,n},\ \alpha_2\Psi_{pq})\qquad(②より)\end{aligned}$$

このことから ③より

$$A_{pq}=0\qquad \text{if}\ (p,q)\neq(m-2,n+1),(m-1,n-1)$$

ゆえに

$$\Psi_{mn}-\alpha_1\Psi_{m-1,n}=A_{m-2,n+1}\Psi_{m-2,n+1}+A_{m-1,n-1}\Psi_{m-1,n-1}$$

$A_{m-2,n+1}$, $A_{m-1,n-1}$ は実際計算すればよい. //

$$\Phi_{mn}(\alpha):=\frac{(m+n)!(2m-1)!!(2n-1)!!}{(2m+2n+1)!!m!n!}\Psi_{mn}(\alpha)$$

とおくと

$$(\Phi_{mn},\ \Phi_{mn})=\frac{m+n+1}{(2m+1)(2n+1)}$$

がわかり, 上の式は次のようになる.

$$(5)\begin{cases} (m+n+\frac{3}{2})(m+1)(n+\frac{1}{2})\Phi_{m+1,n}-(m+n+1)(m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})\alpha_1\Phi_{mn} \\ +(m+n+1)m(n+1)\Phi_{m-1,n+1}+(m+n+\frac{1}{2})(m+\frac{1}{2})n\Phi_{m,n-1}=0 \\ (m+n+\frac{3}{2})(m+\frac{1}{2})(n+1)\Phi_{m,n+1}-(m+n+1)(m+\frac{1}{2})(n+\frac{1}{2})\alpha_2\Phi_{mn} \\ +(m+n+1)(m+1)n\Phi_{m+1,n-1}+(m+n+\frac{1}{2})m(n+\frac{1}{2})\Phi_{m-1,n}=0 \end{cases}$$

(5) より 次の漸化式が得られる.

$$(4') \quad (m+\tfrac{1}{2})(m+\tfrac{3}{2})\Phi_{m+1,0}-(m+\tfrac{1}{2})^2\alpha_1\Phi_{m,0}+m^2\alpha_2\Phi_{m-1,0}-(m-1)m\Phi_{m-2,0}=0$$

この式を $\frac{(\frac{3}{2},m)}{m!}\Phi_{m,0}$ についての漸化式におきかえると (4) が得られる. したがって (4′) は帯球函数 $\varphi_{m,0}$ のみたす漸化式である. これから逆に (5) が帯球函数のみたす漸化式になっていることは容易にわかる.

(5) は Legendre の多項式のみたす漸化式

$$(n+1)P_{n+1}-(2n+1)xP_n+nP_{n-1}=0$$

の類似である. (5) は m, n を任意のパラメータにした時も成立つと予想される.

さて μ と ν は独立なパラメータとして帯球函数 $\varphi_{\mu\nu}$ を考えてきた. ここで $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ と μ, ν との間の関係を再記すると

$$\lambda_1=-\frac{2}{3}(2\mu+\nu)-1,\quad \lambda_2=\frac{2}{3}(\mu-\nu),\quad \lambda_3=\frac{2}{3}(\mu+2\nu)+1$$

$$\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3;\alpha_1,\alpha_2) := \varphi_{\mu\nu}(\alpha_1,\alpha_2)$$

と便宜上かくことにする. $\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ であらわすと (5) は見やすくなる. 前のように

$$\Delta(\lambda) = \lambda^3 + \lambda\Delta_2 + \Delta_3 \quad (\Delta_1 = 0 \text{ に注意}!!)$$

とおくと 帯球函数 $\varphi_{\mu\nu}$ の間の "昇降" 漸化式が成立つ

$$(7)\left\{\begin{aligned}
&\Delta\left(\frac{\lambda_1}{2}+\frac{1}{3}\right)\left[\alpha_1\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\right] = -\left(\frac{\lambda_3-\lambda_1+1}{2}\right)\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2-1}{2}\right)\psi\left(\lambda_1-\frac{2}{3},\lambda_2+\frac{1}{3},\lambda_3+\frac{1}{3}\right)\\
&\Delta\left(\frac{\lambda_2}{2}+\frac{1}{3}\right)\left[\alpha_1\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\right] = -\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2+1}{2}\right)\left(\frac{\lambda_2-\lambda_3-1}{2}\right)\psi\left(\lambda_1+\frac{1}{3},\lambda_2-\frac{2}{3},\lambda_3+\frac{1}{3}\right)\\
&\Delta\left(\frac{\lambda_3}{2}+\frac{1}{3}\right)\left[\alpha_1\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\right] = -\left(\frac{\lambda_2-\lambda_3+1}{2}\right)\left(\frac{\lambda_3-\lambda_1-1}{2}\right)\psi\left(\lambda_1+\frac{1}{3},\lambda_2+\frac{1}{3},\lambda_3-\frac{2}{3}\right)\\
&\Delta\left(\frac{\lambda_1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left[\alpha_2\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\right] = \left(\frac{\lambda_3-\lambda_1-1}{2}\right)\left(\frac{\lambda_1-\lambda_2+1}{2}\right)\psi\left(\lambda_1+\frac{2}{3},\lambda_2-\frac{1}{3},\lambda_3-\frac{1}{3}\right)\\
&\Delta\left(\frac{\lambda_2}{2}-\frac{1}{3}\right)\left[\alpha_2\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\right] = \left(\frac{\lambda_1-\lambda_2-1}{2}\right)\left(\frac{\lambda_2-\lambda_3+1}{2}\right)\psi\left(\lambda_1-\frac{1}{3},\lambda_2+\frac{2}{3},\lambda_3-\frac{1}{3}\right)\\
&\Delta\left(\frac{\lambda_3}{2}-\frac{1}{3}\right)\left[\alpha_2\psi(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)\right] = \left(\frac{\lambda_2-\lambda_3-1}{2}\right)\left(\frac{\lambda_3-\lambda_1+1}{2}\right)\psi\left(\lambda_1-\frac{1}{3},\lambda_2-\frac{1}{3},\lambda_3+\frac{2}{3}\right)
\end{aligned}\right.$$

"昇降"漸化式 (7) は 微分方程式 (5) と漸化式 (6) を使って 導くことができる.

§4　$SL(n,\mathbb{R})$の帯球函数についての注意.

§2で求めた帯球函数は $SL(3;\mathbb{R})/P$（P：極大放物部分群）上の Poisson 核を K で平均したものである.

$SL(n;\mathbb{R})$ のときも同様な場合には Lauricella の超幾何函数で表わすことができる.

一般に帯球函数の積分公式は次のようである.

$$\varphi_\lambda(a) = \int_K e^{-(\lambda+\rho)H(a^{-1}k)}\,dk$$

$$= \int_{\bar{N}} e^{-(\lambda+\rho)H(a^{-1}\bar{n})}\, e^{(\lambda-\rho)H(\bar{n})}\,d\bar{n}$$

$SL(n;\mathbb{R})$ の極大放物部分群として次をとる.

$$P = \left\{ \begin{array}{cc} \overbrace{\ }^{1} & \overbrace{\qquad}^{n-1} \\ \left[\begin{array}{c|c} * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}1 \\ \}n-1 \end{array} \end{array} \right\}$$

$P = M_P A_P N_P$　Langlands 分解

$$M_P = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & g' \end{array}\right] ; g' \in SL(n-1;\mathbb{R}) \right\}$$

$$A_P = \left\{ \left[\begin{array}{c|ccc} a & & 0 & \\ \hline & b & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & b \end{array}\right] ;\quad a b^{n-1} = 1 \right\}$$

$$N_P = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} 1 & {}^t x \\ \hline 0 & 1_{n-1} \end{array}\right] ;\ {}^t x = (x_2, \cdots, x_n) \right\}$$

$$g = a^{-1}\bar{n} \in SL(n;\mathbb{R}) \qquad a = \left[\begin{array}{c|c} a_1 & 0 \\ \hline 0 & a' \end{array}\right],\ \bar{n} = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline u & 1_{n-1} \end{array}\right]\ a' = \begin{pmatrix} a_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & a_n \end{pmatrix}\ u = \begin{bmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

$g \in P$ だから，これをLanglands分解する．

$$g = m_P a_P n_P \qquad a_P = \begin{bmatrix} \alpha & & 0 \\ & \beta & \\ 0 & & \beta \end{bmatrix} \qquad \alpha\beta^{n-1} = 1$$

すると　$\alpha^2 = a_1^{-2} + {}^t u a'^{-2} u = a_1^{-2} + a_2^{-2} u_2^2 + \cdots + a_n^{-2} u_n^2$

上の積分表示と同様に　$SL(n;\mathbb{R})/P$ 上のPoisson核から帯球函数がえられる．　具体的には

$$\varphi_\lambda(a) = \int_{\bar{N}_P} (a_1^{-2} + a_2^{-2} u_2^2 + \cdots + a_n^{-2} u_n^2)^{-\frac{1}{2}(\lambda + \frac{n}{2})} (1 + u_2^2 + \cdots + u_n^2)^{\frac{1}{2}(\lambda - \frac{n}{2})} d\bar{n}_P$$

$$= a_1^{-2m} F_D\left(-m, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2}, \frac{n}{2}; 1 - \frac{a_1^2}{a_2^2}, \cdots, 1 - \frac{a_1^2}{a_n^2}\right)$$

ここで F_D は

$$F_D(\alpha, \beta_1, \cdots, \beta_n, \gamma; x_1, \cdots, x_n) = \sum \frac{(\alpha, \nu_1 + \cdots + \nu_n)(\beta, \nu_1) \cdots (\beta, \nu_n)}{(\gamma, \nu_1 + \cdots + \nu_n)\ \nu_1! \cdots \nu_n!} x_1^{\nu_1} \cdots x_n^{\nu_n}$$

で定義される．

これから　次のこともすぐにわかる．

$$\left[(1 - a_1^2 \zeta) \cdots (1 - a_n^2 \zeta)\right]^{-\frac{1}{2}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\frac{n}{2}, \nu)}{\nu!} \varphi_\nu(a) \zeta^\nu$$

これは　帯球函数の母函数展開である．　ただし $a_1 \cdots a_n = 1$

以上は $SL(n;\mathbb{R})$ の極大放物部分群から得られる帯球函数について調べたのだが，一般の半単純Lie群の場合に

も同様なことが言えそうである．例えば $Sp(n;\mathbb{R})$ の場合を考えてみる．その極大輪環部分群を $A=\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1 & 0\\ 0 & \alpha_1^{-1}\end{pmatrix};\ \alpha_1=\begin{pmatrix}a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_n\end{pmatrix}\right\}$ とする．そのとき極大放物部分群から得られる帯球函数は

$$\varphi_\lambda(a)=a_1^{-2m}F_D\left(-m,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2},n;1-a_1^4,1-a_1^2a_2^2,\cdots,1-a_1^2a_n^2,1-\frac{a_1^2}{a_2^2},\cdots,1-\frac{a_1^2}{a_n^2}\right)$$

ただし $m=-\frac{1}{2}(\lambda+n)$

これは $SL(2n;\mathbb{R})$ の帯球函数に変数の間に関係をいれた形になっている．

文献

[1] K. Aomoto : Sur les transformations d'horisphère et les équations intégrales qui s'y rattachent. J. of the faculty of Sci. Univ. of Tokyo

[2] P. Appell, et J. Kampé de Fériet : Fonctions hypergéométrique et hypersphériques.

[3] F.A. Berezin et F.K. Karpelevič : Zonal spherical functions and the Laplace operator in the Riemannian symmetric spaces. Doklady Akad. Nauk. 118

[4] G. Warner : Harmonic Analysis on Semi-Simple Lie Groups II

[5] 犬井鉄郎：球函数，円壔函数，超幾何函数

[6] 森口，宇田川，一松： 数学公式 III