数理解析研究所講究録
第 267 巻 1976 年 1-6

Elliptic Fixed Points の安定性について.

慶応大. 工. 石井一平

1. D を $\mathbb{R}^2$ の原点を含む領域とし. T を D から $\mathbb{R}^2$ の中への diffeomorphism で原点を fix するものとする。即ち. $(x_1, y_1) = T(x, y)$ は

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + O_2 \quad ; \quad \begin{array}{l} A \in GL(2, \mathbb{R}) \\ O_2 \text{ ; 2次以上の項.} \end{array}$$

と書けるものとする。 λ_1, λ_2 を A の固有値とする. このとき. $|\lambda_j| = 1 \ (j = 1.2)$ ならば. 原点は T の elliptic fixed point であるという。ここでは. elliptic fixed point に於ける安定性について考える。そこでまず. いくつかの定義を述べる。

定義

(I) T が原点 O において stable

$\Longleftrightarrow$ 任意の O の近傍 U に対し. $T(V) = V$, $V \subset U$ となる O の近傍 V が存在する。

(II) T が 0 において <u>unstable</u>

$\Longleftrightarrow$ ある 0 の近傍 U が存在して，任意の $a \in U$ $(a \neq 0)$ に対し，$T^n(a) \notin U$ となる整数 n がとれる。

(III) T が 0 において <u>mixed</u>

$\Longleftrightarrow$ T が 0 において stable でも unstable でもない。

(IV) T が 0 において <u>正（負）に asymtotic</u>

$\Longleftrightarrow$ 任意の 0 の近傍 U に対し，$T(V) \subset U$，$\bigcap_{n\geq 0} \overline{T^n(V)} = \{0\}$ $\left(\bigcap_{n\leq 0} \overline{T^n(V)} = \{0\},\ T^{-1}(V) \subset U \right)$ となる 0 の近傍 V が存在する。

Remark. 定義(I),(II),(III) は [2] に従ったものであるが，"unstable" が "stable" の否定ではないことに注意。又，定義(IV) において，正又は負に asymtotic であることを，単に asymtotic であるという。

以上のような定義を与えると，次の定理が得られる。

定理： $|\lambda_j| = 1$ $(j=1,2)$ とする。このとき，$\lambda_j^n \neq 1$ for $\forall n \in \mathbb{Z}$ $(j=1,2)$ ならば，次のいずれかが起こる。

1) T は 0 において unstable ではない。

2) T は 0 において asymtotic である。

この定理の証明は省略するが、それは Birkhoff が [1] において twist map に関して行なっている証明と類似の方法によってなされる。尚、twist map については、よく知られているように、後に Moser が stable であることを証明している。[2]。

この定理によって、例えば T が保測的である場合には、2) は起り得ないから、A の固有値が 1 の巾根でないということだけから、T は 0 において unstable ではないことがわかる。次の節でこの定理の顕著な応用例であるところの holomorphic iteration を調べてみよう。

2. holomorphic mapping

$$z_1 = f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots \quad ; \quad |\lambda| = 1$$

を考える。まず一つ定義を与える。

定義: f に対する Schröder series $\varphi(\zeta) = \zeta + b_2\zeta^2 + \cdots$ とは $f(\varphi(\zeta)) = \varphi(\lambda\zeta)$ の formal solution のことである。

λ が 1 の巾根でなければ、f に対する Schröder series は必ず存在する。

holomorphic iteration については次のことがわかっている。

(A) $\lambda^n = 1$ かつ f は 0 において stable

$\Longleftrightarrow$ $f^n(z) \equiv z$.

(B) $\lambda^n = 1$ かつ $f^n(z) \not\equiv z$

$\Longrightarrow$ f は 0 において mixed.

(C) $|\lambda| = 1$, $\lambda^n \neq 1$ for ${}^{\forall}n \in \mathbb{Z}$ のとき.

f が 0 において stable

$\Longleftrightarrow$ f に対する Schröder series が収束.

(D) $|\lambda| = 1$ かつ ある $c, \nu\,(>0)$ に対し.

$|\lambda^n - 1| > c n^{-\nu}$ が任意の自然数 n について成り立つ.

$\Longrightarrow$ f は 0 において stable.

(E) $|\lambda| = 1$, $\lambda^n \neq 1$ for ${}^{\forall}n \in \mathbb{Z}$ で. Schröder series が発散するような f は存在する。

以上によって. λ が 1 の巾根でなく. f に対する Schröder series が発散する場合を除いては. 0 が stable, unstable, mixed のうちどの場合であるかは. 完全に決定されている. そして. Schröder series が発散する場合でも. stable ではないということはわかる。従ってこの場合に. unstable mixed のいづれであるかを決定することができれば. holomorphic iteration の stable, unstable, mixed への分類は. 完了することになる。前節の定理を応用すれば.

次の結果を得る.

命題：$|\lambda|=1$ かつ λ は 1 の巾根ではないとする. このとき. f に対する Schröder series が発散.
$\Longrightarrow$ f は 0 において mixed.

∵) 前節の定理 I.(C) により. f が 0 において. asymtotic ではないことを示せば十分である。
そこで f が 0 で正に asymtotic であるとして矛盾を導く。正に asymtotic とすると. 定義により. 0 の近傍 U と自然数 n が存在して. $\overline{f^n(U)} \subset U$ となる。簡単の為 $n=1$ とする。いま.

$$f_r(z) = (1+r)\lambda z + a_2 z^2 + \cdots \qquad (r \in R)$$

と f_r を定義すれば. $|r|$ が十分小ならば $\overline{f_r(U)} \subset U$ が成り立つ。一方 $r<0$ のとき. f_r は 0 において負に asymtotic である. 従って. $f_r(V) \supset V$, $V \subset U$ となる 0 の近傍 V がとれる。すると. $\overline{f_r(U)} \subset U$ 及び $f_r(V) \supset V$ より, $V \subset D \subset U$, $f_r(D) = D$ となる. D の存在がわかる。D を simply connected, open として. 一般性を失わないことはすぐわかる。そこで D を.

$\{|z|<1\}$ に写し、且つ 0 を fix する holomorphic map を φ とすると、$\varphi \circ f_r \circ \varphi^{-1}$ は $\{|z|<1\}$ をそれ自身に写す holomorphic map。従って

$$\varphi \circ f_r \circ \varphi^{-1}(z) = \mu z \qquad (|\mu| = 1)$$

でなければならない。ところが、

$$\varphi \circ f_r \circ \varphi^{-1}(z) = (1+r)\lambda z + \cdots$$

であるから、これは矛盾である。

f が負に asymptotic とした場合にも、同じ方法で矛盾に到達する。

References

[1]. G.D. Birkhoff, Surface transformations and their dynamical applications, Acta Math. vol 43 1-119 (1920)

[2]. C.L. Siegel, J.K. Moser, Lectures on celestial mechanics, Springer (1971).