数理解析研究所講究録
第267巻 1976年 55-78

菊池の関数 $x^{\alpha}\omega^{-\beta}(1-\omega)=N$ $(0<\omega<1)$ について, II

神戸大 理 林 喜代司

$$
(1)\quad \begin{cases} \ddot{y} = -y^{-\frac{1}{2}}\{2x\dot{y} + 4\lambda(1-y)\} \equiv f(x,y,\dot{y}) \\ y(0)=0,\quad y(\infty)=1\ ;\ 0<y(x)<1 \text{ for } 0<x<\infty \end{cases}
$$

(1) の解を得るには、次の条件を満たす関数 $y=\omega(x)$ $(0<x<\infty)$, $\overline{\Lambda}(x,y)$ $(0<x<\infty,\ \omega(x)\leqq y\leqq 1)$ がみつかればよい。

$$
(2)\quad \overline{\Lambda}_x(x,y)+\overline{\Lambda}_y(x,y)\,\overline{\Lambda}(x,y) > f(x,y,\overline{\Lambda}(x,y))
$$

$$
(3)\quad \underline{\Lambda}_x(x,y)+\underline{\Lambda}_y(x,y)\,\underline{\Lambda}(x,y) > f(x,y,\underline{\Lambda}(x,y))
$$

$$
(0<x<\infty,\quad \omega(x)\leqq y<1)
$$

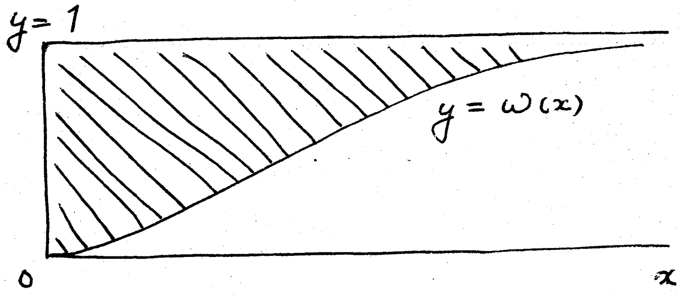
$$
(4)\quad \underline{\Lambda}(x,\omega(x)) \geqq \omega'(x)
$$

このうち、(2) は

$$
\overline{\Lambda} = L\,y/x \qquad ;\ L \text{ は 正定数}
$$

の形で容易に満たされるから、本質的なのは、(3), (4) を同時に満たす $\underline{\Lambda}$ (以下 Λ と書く) と $\omega(x)$ の発見である。

(3) $k \equiv \Omega_x + \Omega_y \Omega - f > 0$ は $\omega(x) \leqq y < 1$ の範囲で満たされればよい。



たとえば

$$\Omega = 2xy^{-\frac{1}{2}}(1-y)$$

$$(0<y<1)$$

とおけば

$$k = 2y^{-\frac{1}{2}}(1-y)\left\{1+2\lambda - x^2 y^{-\frac{3}{2}}(1-y)\right\}$$

となるから

$$x^2 < \frac{(1+2\lambda)\,y^{\frac{3}{2}}}{1-y}$$

のところで $k > 0$ となる。そこで、この式の成り立つギリギリのところを x の関数 $y=\omega(x)$ で解けば、$\omega(x) \leqq y < 1$ で $k \geqq 0$ が成り立つことになる。

$$y = \omega(x) \quad \longleftrightarrow \quad x^2 = \frac{(1+2\lambda)\,y^{\frac{3}{2}}}{1-y}$$

これが標記の菊池の関数 $x^\alpha y^\beta (1-y) = N$ の元来の形である。両辺 y で微分して

$$(5) \quad 2x\frac{dx}{dy} = \frac{1+2\lambda}{2}\,\frac{y^{\frac{1}{2}}(3-y)}{(1-y)^2} > 0$$

しかも

$y \to 1$ のとき $x \to \infty$

であるから $y = \omega(x)$ は $0 < x < \infty$ で定義される関数である。

条件(3)は $k > 0$ でないといけないが、それは次のように解釈する。

いま1つの λ_0 で $y = \omega_0(x)$ をつくれば、

$\omega_0(x) \leqq y \leqq 1$ で $k_0 = \cdots \{1 + 2\lambda_0 - \cdots\} \geqq 0$

そのとき $\lambda > \lambda_0$ なる λ に対し Ω (これは λ に無関係) と $y = \omega_0(x)$ を使えば

$k = \cdots \{1 + 2\lambda - \cdots\} > k_0 \geqq 0$

つまり、1つの λ_0 で壁 $\underline{\Omega}$, ω_0 をつくれば、その λ_0 に対しては(3)は成り立たないが、同じ壁 $\underline{\Omega}$, ω_0 で、$\lambda > \lambda_0$ なる λ に対しては、(3)が成り立つ。

あと (4) $\Omega = 2xy^{-\frac{1}{2}}(1-y) \geqq \dfrac{dy}{dx}$ $(y = \omega(x))$

を満たすために、

$$2x\frac{dx}{dy} \geqq \frac{y^{\frac{1}{2}}}{1-y} \qquad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} > 0\right)$$

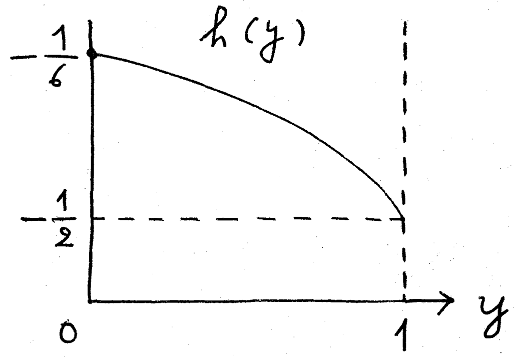
がいえればよい。

これは (5) から

$$\lambda \geqq -\frac{1}{2} + \frac{1-y}{3-y} \equiv h(y)$$

と同値であり

$$\sup_{0<y<1} h(y) = -\frac{1}{6}$$



であるから、先の議論から

$$\lambda > -\frac{1}{6}$$

に対し (1) の解が得られる。

$y = \omega(x)$ に対し $1-y = (1+2\lambda) y^{\frac{3}{2}} x^{-2}$
であるから $x \longrightarrow \infty$ のとき

$$1-y \sim c_0 x^{-2}$$

一方、(1) の algebraic type の解の order は

$$1-y \sim c_0 x^{2\lambda}$$

であることがわかっているから、$2\lambda > -1$ である限り（実際 それは十分満たされる）いまの方法では、この algebraic type の解は つかまっていない。

このように、一たん Λ の形を $2xy^{-\frac{1}{2}}(1-y)$ ときめれば、必然的に $\lambda > -\frac{1}{6}$ まで到達する。

そこで

(6) $\Lambda = 2xy^{-\frac{1}{2}}(1-y)\,u(y)$

という形から出発すれば、λ に関していかなる評価を得るかをしらべ、どういう方針で $u(y)$ を構成すべきかをみることにする。

$u \equiv 1$ の場合は、$\lambda > -\frac{1}{6}$ のときになる。

このとき k は

(7) $k = 2y^{-\frac{1}{2}}(1-y)u\left\{1+\frac{2\lambda}{u} - x^2 y^{-\frac{3}{2}}(1-y)v\right\}$

ここに $v(y) = 1 + \frac{1+y}{1-y}(u-1) - 2yu'$

$u \equiv 1$ のとき $v \equiv 1$

いま u に条件

(8) $u \geqq 1, \quad u' \leqq 0$

を課すと

(9) $v \geqq 1$

この条件は必ずしも必要ないが、あると便利だし、いままでつくった $u(y)$ はすべてこの条件を満たしているので以下、仮定する。

さて、$k=0$ の陰関数は

$$(10)\quad y=\omega(x) \longleftrightarrow x^2=\frac{y^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{2\lambda}{u}\right)}{(1-y)v}$$

で決められる。

両辺を y で微分して

$$2x\frac{dx}{dy}=\frac{y^{\frac{1}{2}}}{(1-y)u}\left\{\frac{g(y)}{v}\left(\lambda-h(y)\right)+1\right\}$$

ここに

$$g(y)=\frac{3-y}{1-y}-2y\left(\frac{u'}{u}+\frac{v'}{v}\right)$$

$$h(y)=\frac{1}{g(y)}\left\{v+u\left(y\frac{v'}{v}-\frac{3-y}{2(1-y)}\right)\right\}$$

これが (3)

$$\Lambda=2xy^{-\frac{1}{2}}(1-y)u \geqq \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

$$\Longleftrightarrow\quad 2x\frac{dx}{dy}\geqq\frac{y^{\frac{1}{2}}}{(1-y)u}$$

を満たすには $g(y)>0$ とともに

$$\lambda \geqq h(y) \qquad 0<y<1$$

を満足すればよい。

つまり $\lambda > \sup_{0<y<1} h(y)$ を得る。

v には u' が含まれているので、h は u'' まで関係する

$$h(y) = h(y; u, u', u'')$$

そこで、$u(y)$ を構成する方針は

$$\sup_{0<y<1} h(y) = \sup_{0<y<1} h(y; u, u', u'')$$

をできるだけ小さくするようにということになる。

$g(y) > 0$ は容易に満たされる。

u のだいたいの形は、次のようにして決められる。

u は元来 $u \equiv 1$ の場合の拡張だから、1 に近いと考える。

$y = 0$ の近くでは、$y u'$ のような量は 0 に近いと考えると

$$h(0) = -\frac{u(0)}{6}$$

となる。

そこで、$u(0)$ をできるだけ大きくするというのが、当面の目標となる。$\lambda > -0.1988$ を得るには、$u(0) \geq 1.1928$ でなければならない。

$y=1$ の近くでは、やはり $(1-y)u'$ は小さいと考えると、$y=\omega(x)$ を決める

$$x^2 = \frac{y^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{2\lambda}{u}\right)}{(1-y)+(1+y)(u-1)-2y(1-y)u'}$$

において、u は1に近く、λ はせいぜい -0.3 くらいだとみると、分子は0にいかない有限の量であるので、$y=\omega(x)$ が $0<x<\infty$ で定義できるためには分母 $\to 0$ as $y \to 1$ でなければならないので、$u(1)=1$ が要求される。

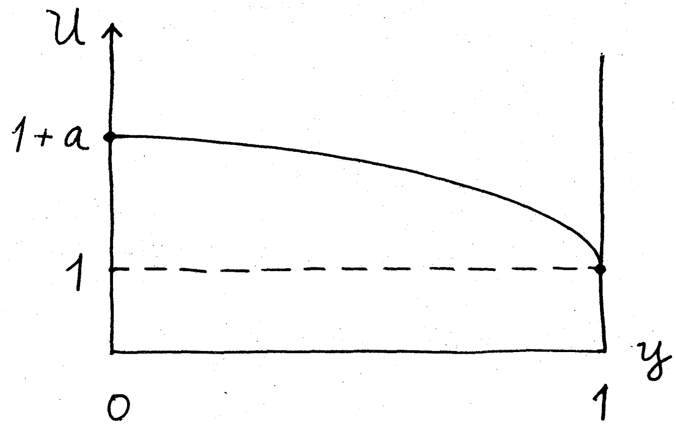
u が1に近いという制限をとれば、分子に $2\lambda/u$ の項があるので、$y\to 1$ のとき、$u\to 0$ でもよいことになる。実際その可能性のあることを、あとで述べる。

ただし、この場合は、( )の右辺の{ }

$$1+\frac{2\lambda}{u}-x^2y^{-\frac{3}{2}}(1-y)v$$

において、u が0に十分近い正数値をとる y のところで $1+2\lambda/u<0$ となるので、$k=0$ を満たすところで x^2 の係数は正。従って $\omega(x)\leqq y<1$ で $k\leqq 0$ となるので、条件(3)を満たさず、壁としては不適合である。

あと、$u \geqq 1$, $u' \leqq 0$ を考慮して、実際に少し計算してみれば、yが大きくなるに従って u' の絶対値は大きい感じなので、$u(y)$ は図のようなものをとればよさそうである。



そこで、まず

$$u(y) = 1 + a(1-y)^{b} \qquad 0<b<1$$

の形で

$$u = 1 + 0.18(1-y)^{\frac{1}{3}}$$

とすれば

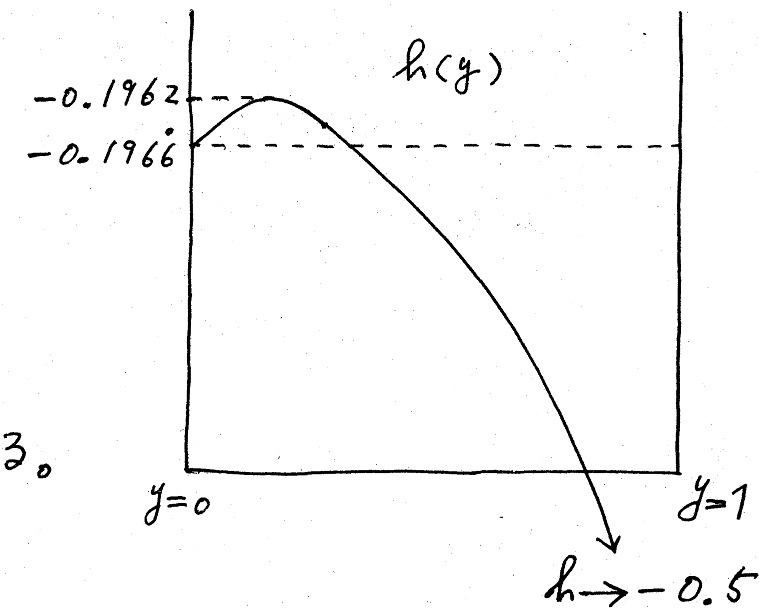
$$\lambda > -0.1962$$

を得る。

$y=0$ では

$h = -1.18/6$

$= -0.196\dot{6}$



$y=1$ で

$h = -0.5$ である。

さらによい評価を得るために

$$u = 1 + a(1-y^b)^{c+dy}$$

とおいて、a, b, c, d を動かして、比較的よい値

$a = 0.192$

$b = 1.087$

$c = 0.2535$

$d = -0.008$

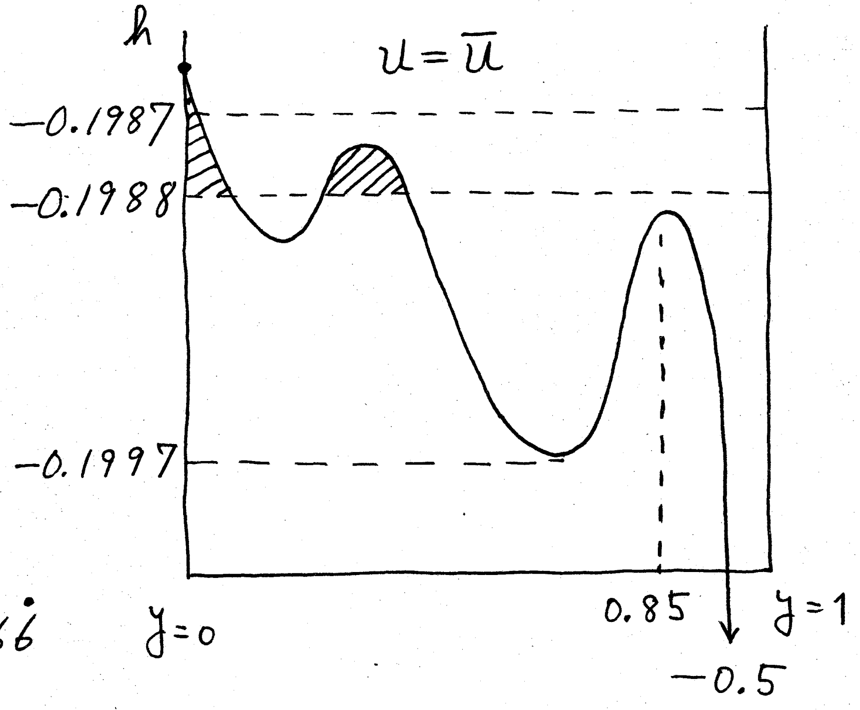
を得る。

この関数を

$\overline{u}$ と書く。

このとき

$\lambda > -0.1986\dot{6}$



h のグラフには、だいたい u の parameter の数ぐらいの"山"があらわれるようである。parameter の数を多くするには、指数のところを y の2次式にしたり、こういった形のものを2つ加えたり、多項式だけでなく、sin, cos を使ったり、いろいろ方法があるだろうし、事実、それでいくらかの成果を上げることができるかも知れないが、ここでそういった方向はやめて、もっと h の

値を control しやすい方法を 採用することにする。

それは、いま得た関数

$$\overline{u} = 1 + 0.192\left(1 - y^{1.087}\right)^{0.2535 - 0.008y}$$

を base にして、それに 微小関数 Δu をかぶせて、

$$u = \overline{u} + \Delta u$$

をつくり、$h(y; \overline{u}, \overline{u}', \overline{u}'')$ の値を修正していこうとするものである。

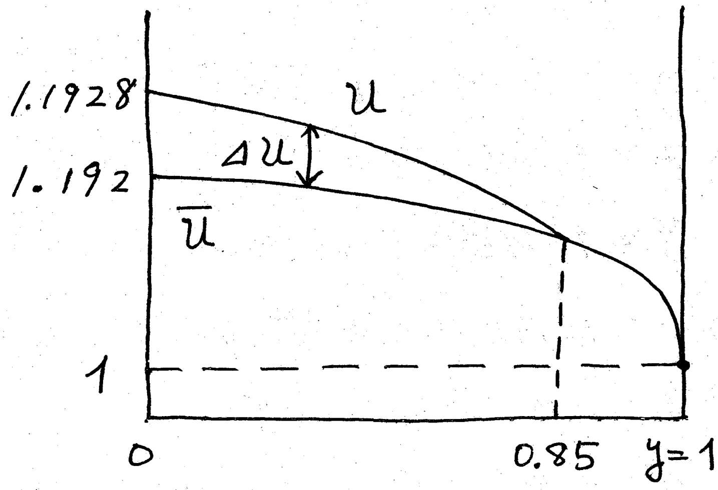
$y = 1$ の近くは、$x \to \infty$ をここに押し込んでいるのだから、かなり微妙であって、人工的な関数ではなかなかうまくいかない。

たとえば $u = (1-y)^{\alpha}$ $0 < \alpha < 1$ の order では、どうしても $h \to -0.5$ となってしまう。

これは無駄であるので（h は $\equiv -0.1988$ に近いほど、効率がよいと思われる。完全に $\equiv -0.1988$ にしようと思えば、u に関する 2 階の常微分方程式を解くことになる。）$y = 1$ の近くでも ~ -0.1988 にしようと思うのだが、うまくいかない。しかし証明は h を上からおさえればいいのだから $\to -0.5$ となっていてもさしつかえない。

しかも、$\overline{u}$ に対応する h のグラフを見ると、$-0.85 \leqq y \leqq 1$ では $h < -0.1988$ であるから、この部分では $\overline{u}$ をそのまま採用し、$0 \leqq y \leqq 0.85$ で -0.1988 より上に出ている部分をなくそうとする。ちょうどその右に、大きくへこんだ部分があるので、そこに埋めるような感じである。

$y = 0.85$ から左へ Δu をつくってかぶせるのであるが、おおよその方針は次の通り。



$y = 0$ で

$$h(0) = -\frac{u(0)}{6}$$

であるから、$\overline{u}$ では $-0.1986\dot{6}$ の評価しか得られなかったのであり、-0.1988 を得ようとすれば、

$u(0) = 1.1928$ でなければならない。

そこで Δu は、できるだけ大きくなるようにする。

h の値に余裕があるところで、できるだけ Δu を大きくしておき、h が -0.1988 を越えているところでは、やむを得ず少し下がる。

こうして、$y = 0.85$ から出発して左へのばしていって

$y=0$ に到達できればよいのであるが、必ず到達できるかどうかは わからない。

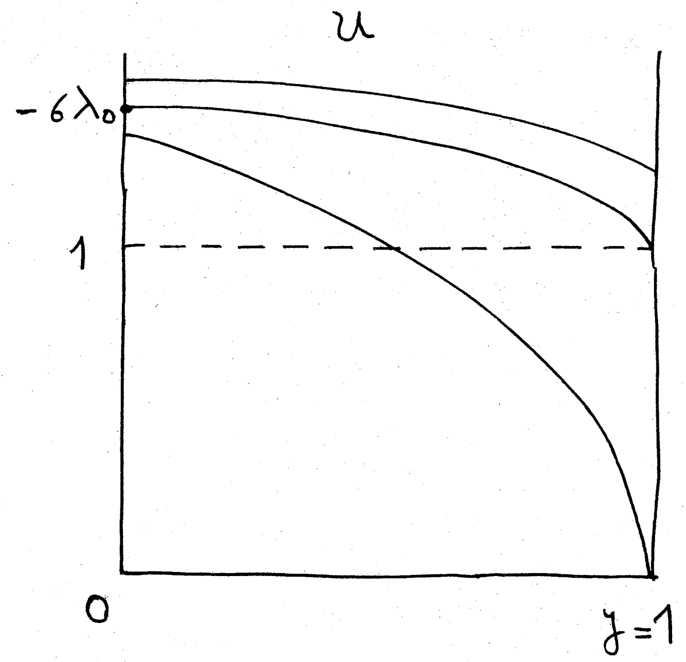
$h \equiv \lambda_0$ ($= -0.1988$ for example) は u に関する非線型の2階常微分方程式であるから、$y=0.85$ で $\bar{u}$ に等しい初期値を与え（それで C' で接続できる $\bar{u}(0.85)=\lambda_0$ なら C^2。証明には C' までしか要請されない）左に解いていけば、0 に達する前に発散するかも知れない。

実際に $\lambda > -0.1988$ を得たのは、$y=0$ から出発しあらたに $u(y)$ をつくっていって、$\bar{u}$ に十分近づいたところで C' で接続する方法である。

u を微分方程式 $h \equiv \lambda$ を解いて求めたとする。yu', y^2u'' が $y \to 0$ のとき $\to 0$ とすると

$u(0) = -6\lambda$

である。

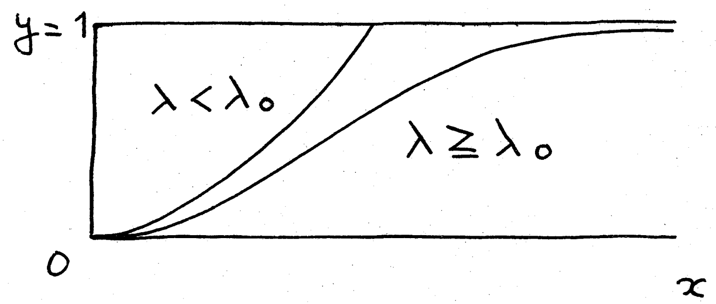


後述するが、$y=0$ から右へのばせば、発散することなく $y=1$

まで達する。(u', u'' は $y\to 1$ のとき発散するかも知れない。)

(1) が解を持つギリギリの λ (存在することはわかっている) を λ_0 とすれば

$$\left.\begin{array}{lll} \lambda > \lambda_0 & \text{のとき} & u \to 0 \\ \lambda = \lambda_0 & \text{のとき} & u \to 1 \\ \lambda < \lambda_0 & \text{のとき} & u \to 1 + \rho_\lambda \quad (\rho_\lambda > 0) \end{array}\right\} \text{as } y \to 1$$



このことは、

$y(0) = 0$

$y'(0) = 0$

なる初期値をもつ

(1) の解が

$\lambda > \lambda_0$ のとき $x \to \infty$ で $1-y \downarrow 0$

(algebraic type)

$\lambda = \lambda_0$ のとき 〃 (exponential type)

$\lambda < \lambda_0$ のとき x: 有限で $y=1$ に達する

であることにそれぞれ対応している。

$x\to\infty$ のときの $1-y$ の order の違いが、$u(y)$ の $y \to 1$ のときの挙動に微妙な影響をおよぼす。

これらのことは 次のようにして わかる 。

$h = h(y;\, u, u', u'') \equiv \lambda$ という u に関する

2階常微分方程式の解 $u(y)$ がいま与えられたとする。

この $u(y)$ で Λ を ( ), $y = \omega(x)$ を ( ) で定義すれば

$y = \omega(x)$ は $k = \Lambda_x + \Lambda_y \Lambda - f = 0$ の陰関数

であり、$h \equiv \lambda$ は その定義から $\Lambda = dy/dx$ 。

すなわち 次の2式が 成り立つ

$$(11)\quad \Lambda_x(x, \omega(x)) + \Lambda_y(x, \omega(x))\Lambda(x, \omega(x)) = f(x, \omega(x), \Lambda(x, \omega(x)))$$

$$(12)\quad \Lambda(x, \omega(x)) = \omega'(x)$$

(12) の両辺を x で微分して

$$\begin{aligned}
\omega''(x) &= \Lambda_x(x, \omega(x)) + \Lambda_y(x, \omega(x))\,\omega'(x) \\
&= \Lambda_x(x, \omega(x)) + \Lambda_y(x, \omega(x))\,\Lambda(x, \omega(x)) \\
&= f(x, \omega(x), \Lambda(x, \omega(x))) \\
&= f(x, \omega(x), \omega'(x))
\end{aligned}$$

これは $y = \omega(x)$ が もとの方程式の解 である

ことを 示している。

また逆に (1) の解 $y = \varphi(x)$ が与えられたとき x と y に 1-1 の対応がついていれば (12) で $u(y)$ を定義することもできる。((6) の形は変えない)

その意味で方程式 $h \equiv \lambda$ は本質的にもとの方程式 (1) と同値である。

(1) の解の $y \to 1$ のときの挙動がある程度わかっているから $u \to 0$ or 1 というようなことが出てくる。

実際 もとの 3 階の方程式

$$x''' + 2xx'' + 2\lambda(1 - x'^2) = 0$$

の解 $x(t)$ の $t \to \infty$ のときの挙動は

exponential type

$$\begin{cases} 1 - x' \sim C_0 t^{-1-2\lambda} \exp(-t^2 - c_1 t) \\ x'' \sim 2t(1 - x') \end{cases}$$

algebraic type

$$\begin{cases} 1 - x' \sim C_0 t^{2\lambda} \\ x'' \sim -2\lambda C_0 t^{-1+2\lambda} \end{cases}$$

であり $y = y(x) = x'^2$ であったから $\dfrac{dy}{dx} = 2x''$

$x'(t) \to 1$ as $t \to \infty$ から $x \sim t$

$$1 - y = 1 - x'^2 = (1 + x')(1 - x') \sim 2(1 - x')$$

また

$$u(y)=\frac{y^{\frac{1}{2}}\frac{dy}{dx}}{2x(1-y)}\sim\frac{2x''}{4x(1-x')}$$

そこで

exp. $\quad u\sim\dfrac{4t(1-x')}{4x(1-x')}\longrightarrow 1$

alg. $\quad u\sim\dfrac{2(-2\lambda)C_0t^{-1+2\lambda}}{4xC_0t^{2\lambda}}\sim\dfrac{-\lambda}{x^2}\to 0$

となる。

整理すれば、$u(0)=-6\lambda$ からはじめて 微分方程式 $h=\lambda$ を解いていけば、(1) の解があるギリギリの λ を λ_0 とするとき

$\lambda=\lambda_0$ ならば $\quad u\to 1 \quad$ as $\quad y\to 1$

$\lambda>\lambda_0$ ならば $\quad u\to 0 \quad$ 〃

となる。

それは、u に対応する解 $y=\varphi(x)$ は このとき $\varphi'(0)=0$ であるからである。そのような解が exponential type になるのは $\lambda=\lambda_0$ のときに限られる。

$\lambda>\lambda_0$ のときは algebraic type. $\lambda<\lambda_0$ のときは 有限の x で $y=1$ にぶつかる

この $u(y)$ に対し、解 $y=\varphi(x)$ は

$$x^2 = \frac{y^{\frac{3}{2}}\left(1+\frac{2\lambda}{u}\right)}{(1-y)+(1+y)(u-1)-2y(1-y)u'}$$

で implicit に与えられる。

このように $h=\lambda$ を解いていくことは、もとの方程式を解くのと同じことなのであるが、実際に $h=\lambda$ を等号で解いていくのは不可能である。理論的には常微分方程式の基本定理からもちろん可能であるが、実際に式につくって見せるわけにいかない。

ところが、いま $u(y)$ を式でつくって h を λ から、あまりはずれないようにできたとき（はずれていてもかまわないのだが、それでは効率が悪い）解は得られたことにならないが、h の上限を λ_0 とするとき $\lambda>\lambda_0$ なる λ に対して、(1) の解の存在を言うことができる。

ここにこの方法の意味がある。

そこで $h=-0.1988$ を近似的に解いていく。

$u(0)=-6\lambda=1.1928$ であればよいが、誤差を考えて

$u(0) = 1.192803$ とする。

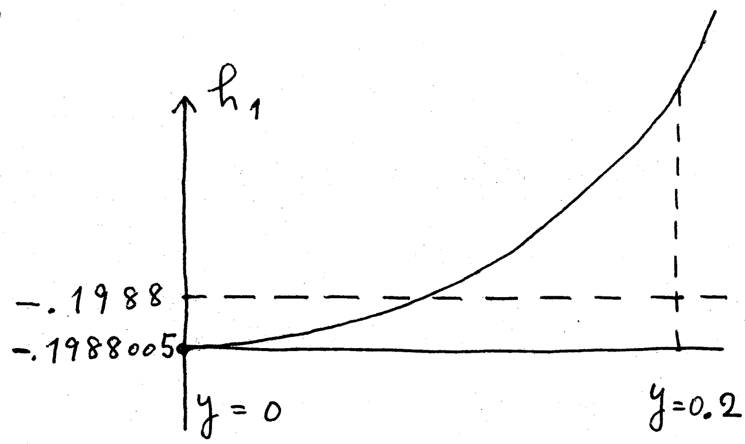
$u(y)$ は、最初2次式として

$$u_1(y) = 1.192803 + ay + by^2$$

とする。このとき係数 a, b は

$$h'(0) = 0, \quad h''(0) = 0$$

として決められる。

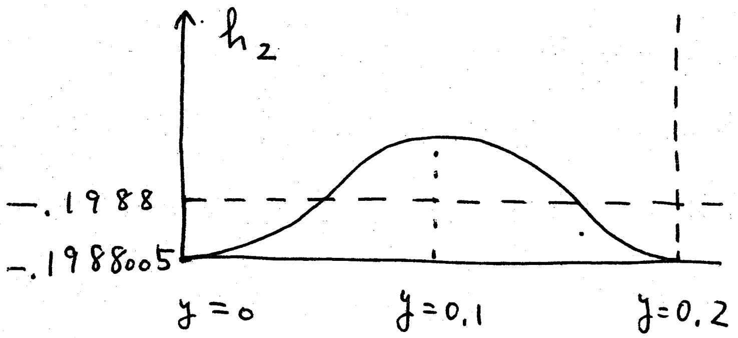


u_1 に対応する h_1 は、実際計算してみれば、右図のようになっている。

そこで、3次式

$$\Delta u = \alpha y^3$$

をかぶせて、$y=0.2$ において、h の値を修正する。



係数 α は、次のように決められる。

$u_2 = u_1 + \Delta u$ とおくと

$$h_2 = h(y; u_2, u_2', u_2'')$$

$$= h(y; u_1+\Delta u, u_1'+\Delta u', u_1''+\Delta u'')$$

$$\fallingdotseq h(y; u_1, u_1', u_1'') + \partial h/\partial u \, \Delta u + \partial h/\partial u' \, \Delta u' + \partial h/\partial u'' \, \Delta u''$$

$$= h_1 + h_u \Delta u + h_{u'} \Delta u' + h_{u''} \Delta u''$$

そこで

$$\alpha \times (h_u \times 0.2^3 + 3 h_{u'} \cdot 0.2^2 + 6 h_{u''} \cdot 0.2)$$

$= y=0.2$ における h_1 と理想値の差

によって α が決められる。

このやり方では、$y=0.2$ のところではよくなるが、そのかわり $y=0.1$ あたりでまたはずれてくる。しかし、全体としてのはずれは、やはり小さくなっている。

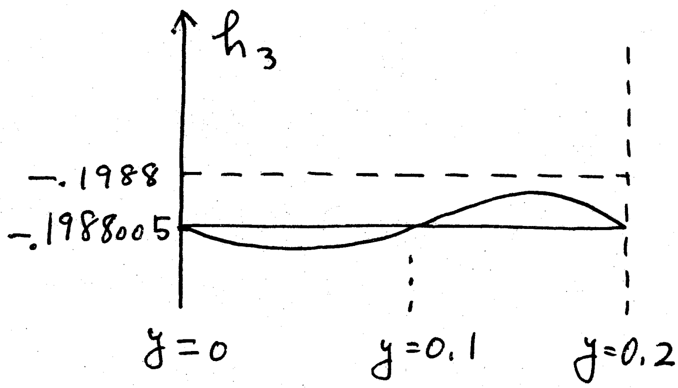
これを修正するには、上と同じ方法で $y=0.1$ のところだけでやろうとすると、また $y=0.2$ あたりではずれてくる可能性があるので、$y=0.1$ と $y=0.2$ で同時に修正する。

それには $\delta u = \beta y^3 + \gamma y^4$

と parameter を2つにする。

$$u_3 = u_2 + \delta u = u_1 + \Delta u + \delta u$$

β と γ は、上とほとんど同じ方法で連立1次方程式を解いて得られる。



u_3 に対応する h_3 は図のようになり、ようやく

$h \leqq -.19880$ のレベルにおさえられる。

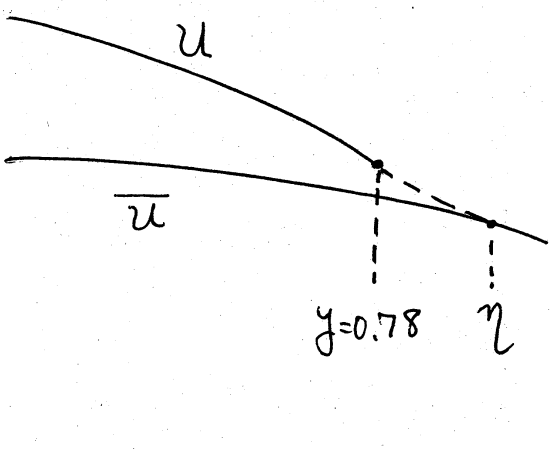
$y=0.2$ から右は、いまの u_3 からはじめて、やはり

$\Delta u = \alpha(y-0.2)^3$ で1度修正し、

$\delta u = \beta(y-0.2)^3 + \gamma(y-0.2)^4$

で、さらに細かく修正する。

このようにしてどんどんのばしていけば $y=0.78$ あたりで $\overline{u}$ にかなり近づくので、そこで C^1 を保つように接続する。これは2次式でよい。



$\eta = 0.866\cdots < 1$

このとき h の値はむしろよい方にくずれ

$h \leqq -0.19880$

とすることができた。

$u(y)$ は、結局 次のような 関数である。

$$u = u_1 = 1.192803 - 0.043576\, y - 0.018938\, y^2 - 0.010436\, y^3 - 0.011921\, y^4 \quad (0 \leqq y \leqq 0.2)$$

$$u = u_2 = u_1 + 0.000128\,(y-0.2)^3 - 0.012599\,(y-0.2)^4$$

$$u = u_3 = u_2 + 0.0010388\,(y-0.32)^3 - 0.0222989\,(y-0.32)^4$$

$$u = u_4 = u_3 - 0.0000747\,(y-0.44)^3 - 0.0409591\,(y-0.44)^4$$

$$u = u_5 = u_4 + 0.0019263\,(y-0.52)^3 - 0.080957\,(y-0.52)^4$$

$$u = u_6 = u_5 + 0.0064752\,(y-0.6)^3 - 0.193242\,(y-0.6)^4$$

$$u = u_7 = u_6 + 0.0054272\,(y-0.68)^3 - 0.431317\,(y-0.68)^4$$

$$u = u_8 = u_7 + 0.0015922\,(y-0.74)^3 - 0.825141\,(y-0.74)^4$$

$$u = u_9 = u_{10} + a\,(y-0.78)^2 + b\,(y-0.78) + c$$

$$u = u_{10} = 1 + 0.192\,(1 - y^{1.087})^{0.2535 - 0.008\,y}$$

$$c = u_8(0.78) - u_{10}(0.78), \quad b = u_8'(0.78) - u_{10}'(0.78)$$

$$a = b^2 / 4c$$

$$\eta = -2c/b = 0.866\cdots$$

$$u = u_i \quad \text{for} \quad y \in I_i \quad (i = 1, 2, \cdots, 10)$$

$I_1 = [0, 0.2]$, $I_2 = [0.2, 0.32]$, $I_3 = [0.32, 0.44]$

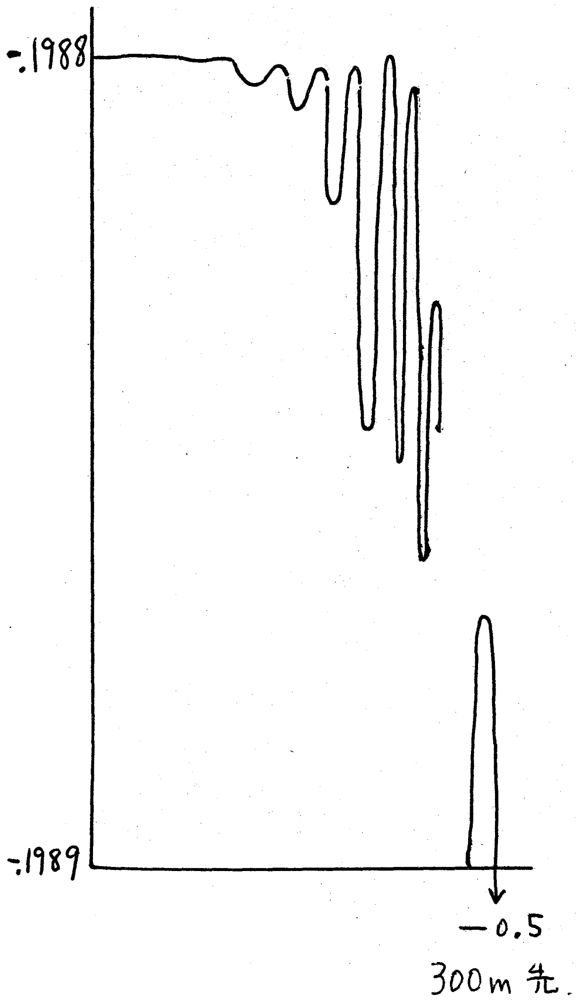
$I_4 = [0.44, 0.52]$, $I_5 = [0.52, 0.6]$, $I_6 = [0.6, 0.68]$

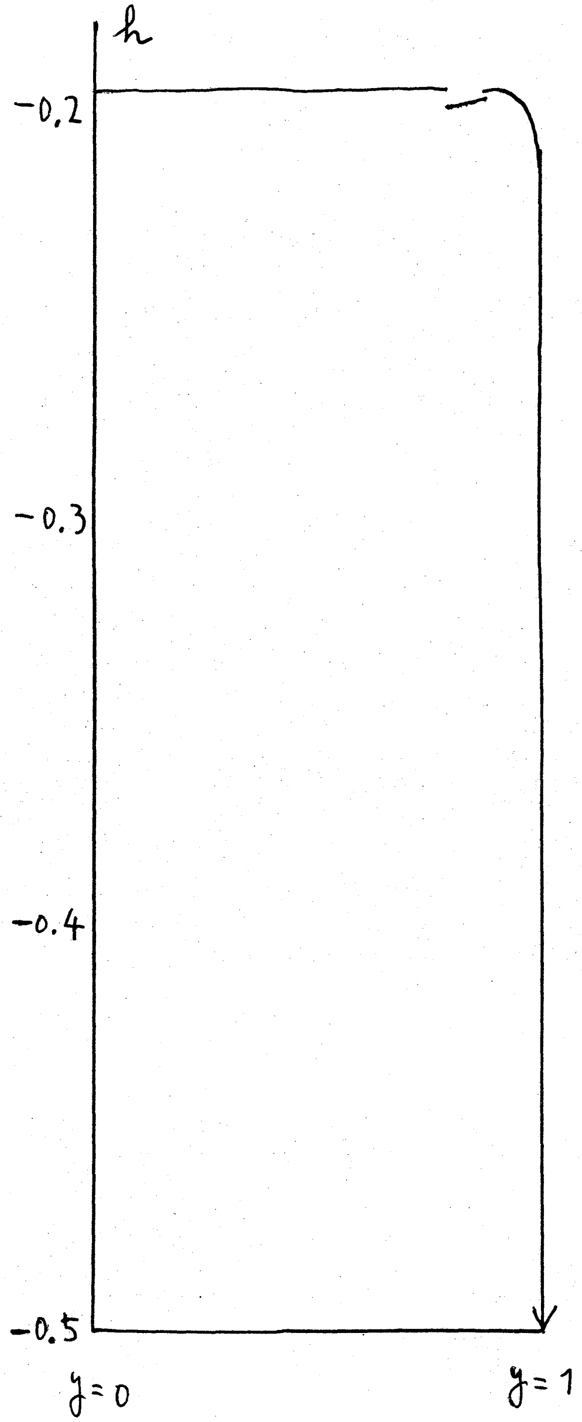
$I_7 = [0.68, 0.74]$, $I_8 = [0.74, 0.78]$

$I_9 = [0.78, \eta]$, $I_{10} = [\eta, 1]$

最終的な $h(y)$ のグラフは、下図のようである。

$\overline{u}$ と接続するとき、
C^1 までしか要請
しなかったので、h
はその点で不連続
になっている。





$$h(y) \leqq -0.19880 \qquad 0 \leqq y \leqq 1$$

であるので

$$\lambda > -0.19880$$

に対して (1) の解の存在が言える。

この $u(y)$ は、(8) $u \geqq 1$, $u' \leqq 0$ を満たしているので (9) $v \geqq 1$ も成り立つ。

従って (10) $y = \omega(x)$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 = \frac{y^{\frac{3}{2}}\left(1 + \frac{2\lambda}{u}\right)}{(1-y)\, v}$$

から

$$0 < 1-y \leqq x^{-2}$$

であるので、やはり algebraic type の解はつかまっていない。

また、$y \to 0$ のとき $y \sim C_0 x^{\frac{4}{3}}$

であるが、$\lambda_0 = -0.19880$ とするとき

$$C_0 = \left(\frac{u_0}{1 + \frac{2\lambda_0}{u_0}}\right)^{\frac{2}{3}} = (9 \times 0.19880025)^{\frac{2}{3}}$$

従って $\lambda > \lambda_0$ に対し $C_0 > (-9\lambda)^{\frac{2}{3}}$

となる。