数理解析研究所講究録
第267巻 1976年 79-92

線形常微分方程式に関する2点接続問題

東京農工大　　福原満洲雄

1. 係数が満足する差分方程式

$x=0$を確定特異点，$x=\infty$を1級の不確定特異点とするn階微分方程式

(1.1)　$$A[y]\equiv A_0[y]+xA_1[y]+\cdots+x^nA_n[y]=0$$

について考える；ここで

$$A_h[y]=a_{h,0}x^{n-h}y^{(n-h)}+a_{h,1}x^{n-h-1}y^{(n-h-1)}+\cdots+a_{h,n-h-1}xy'+a_{h,n-h}y,$$
$$(h=0,1,\cdots,n)$$

$a_{h,k}$はすべて定数である。

$$A_h[x^\rho]=f_h(\rho)x^\rho$$

とおけば，

$$f_h(\rho)=a_{h,0}\rho(\rho-1)\cdots(\rho-n+h+1)+a_{h,1}\rho(\rho-1)\cdots(\rho-n+h+2)+\cdots+a_{h,n-h}$$

$$A[x^\rho]=(f_0(\rho)+xf_1(\rho)+\cdots+x^n f_n(\rho))x^\rho$$

となる。

$x=0$は確定特異点であるから，(1.1)は

(1.2) $$y=\sum_{m=0}^{\infty} c_m x^{m+\alpha}\ ,\quad (c_0\neq 0)\ ,$$

のように展開される解をもつ。αは決定方程式

(1.3) $$f_0(\alpha)=0$$

の根である。この方程式の2根の差は整数にならないものとする。

c_0の値をきめると，その他の係数c_mは

(1.4) $$f_0(m+\alpha)c_m+f_1(m+\alpha-1)c_{m-1}+\cdots+f_m(\alpha)c_0=0,\ (m<n)$$

(1.5) $$f_0(m+\alpha)c_m+f_1(m+\alpha-1)c_{m-1}+\cdots+f_n(m+\alpha-n)c_{m-n}=0$$
$$(m\geqq n)$$

によってただ一通りにきまる。(1.3)に整数差の根がないという仮定により$f_0(m+\alpha)\neq 0$。

(1.6) $$f_0(x+\alpha)\varphi(x+n)+f_1(x+\alpha-1)\varphi(x+n-1)$$
$$+\cdots+f_n(x+\alpha-n)\varphi(x)=0$$

と初期条件$\varphi(n)=c_0$および

(1.7) $$f_0(m+\alpha)\varphi(m+n)+f_1(m+\alpha-1)\varphi(m+n-1)$$
$$+\cdots+f_n(m+\alpha-n)\varphi(m)=0\ ,$$
$$(m=n+1,\ n+2,\ \cdots,\ 2n-1)$$

を満足すれば, $c_m=\varphi(m+n)$ となる。

$\psi(x+n)=\Gamma(x+1)\varphi(x+n)$ が満足する差分方程式を

(1.8) $$P_0(x)\psi(x+n)+P_1(x)\psi(x+n-1)+\cdots+P_n(x)\psi(x)=0$$

とすれば

$$P_0(x)=f_0(x+\alpha)/x, \quad P_1(x)=f_1(x+\alpha-1), \cdots,$$
$$P_h(x)=f_h(x+\alpha-h)(x-1)(x-2)\cdots(x-h+1), \cdots$$
$$P_n(x)=f_n(x+\alpha-n)(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

と書ける。これらは高々 $n'(=n-1)$ 次の多項式であるから

(1.10) $$P_h(x)=\sum_{k=0}^{n-h} p_{h,k}(x-h+1)(x-h+2)\cdots(x-h+n'-k)$$

と書くことができる。特に $p_{h,0}$, $p_{h,1}$ は次の式で与えられる:

$$p_{h,0}=a_{h,0}, \quad p_{h,1}=a_{h,1}+(\alpha-n')(n-h)a_{h,0}.$$

2. 差分方程式の解の漸近表示

差分方程式の理論でよく知られているように, 方程式(1.8)は定積分

(2.1) $$\psi(x)=\int_0^{\xi} t^{x-n}u(t)\,dt$$

によって満足される。u は Fuchs 型微分方程式

(2.2) $$\sum_{k=0}^{n'} Q_k(t)\,u^{(n'-k)}(t)=0, \qquad (n'=n-1)$$

の解で，ξはこの微分方程式の特異点すなわち$Q_0(t)$の零点である。$Q_k(t)$は次の式で与えられる：

$$(2.3)\qquad Q_k(t)=(-1)^k\sum_{h=0}^{n-k}p_{h,k}\,t^{n-h-k}$$

したがって

$$(2.4)\qquad g_0(t)=\sum_{h=0}^{n}a_{h,0}\,t^{n-h}\ ,\qquad g_1(t)=\sum_{h=0}^{n'}a_{h,1}t^{n-h-1}$$

とおけば

$$(2.5)\qquad Q_0(t)=g_0(t),\qquad -Q_1(t)=g_1(t)+(\alpha-n')g_0'(t).$$

定積分(2.1)の上端ξはすでに注意したように$Q_0(t)$の零点であるが，(2.5)により$g_0(t)$の零点でもあるから，それは(1.1)の∞における特性指数である。このn個の指数も互いに異なるものとする。したがって$Q_0(t)$の零点ξの位数は1である。(2.2)の確定特異点ξにおける決定方程式は明らかに$0,1,\cdots,n-2$を根とする。もう一つの根をκとすれば

$$(2.6)\qquad \begin{aligned}\kappa&=n'-1-Q_1(\xi)/Q_0'(\xi)\\&=\alpha-1+g_1(\xi)/g_0'(\xi).\end{aligned}$$

(2.2)の解で，$t=\xi$において$u\sim(\xi-t)^\kappa$となるものをu_ξとし，これに対応する

$$(2.7)\qquad \psi_\xi(x+n)=\int_0^\xi t^x u_\xi(t)\,dt$$

を考える。

$u_\xi(t)$ の初項だけとって計算すると

$$\int_0^\xi t^x(\xi-t)^\kappa dt = \xi^{x+\sigma}\frac{\Gamma(x+1)\Gamma(\sigma)}{\Gamma(x+\sigma+1)}$$

$$\sim \Gamma(\sigma)\xi^{x+\sigma}x^{-\sigma}, \quad (\sigma=\kappa+1).$$

ここで漸近式は

$$|\arg x|<\pi-\delta, \quad x\to\infty$$

のとき有効である。δ はいくらでも小さくとれる正の数である。

$u_\xi(t)$ の展開式から初項だけ取り去った剰余を $U_\xi(t)$ と書けば $0, \xi$ を結ぶ線分上で

(2.8) $$|U_\xi(t)| \leqq K|(\xi-t)^\sigma| = K|\xi^\sigma|(1-s)^{\sigma'}, \quad (t=\xi s)$$

となるように定数 K がとれる。ここで $\sigma'=\mathrm{Re}\,\sigma$ である。

$$\int_0^\xi t^x U_\xi(t)dt = \xi^{x+1}\int_0^1 s^x U_\xi(\xi s)ds.$$

$x'=\mathrm{Re}\,x>-1$, $\sigma'>-1$ ならば

(2.9) $$\left|\int_0^\xi t^x U_\xi(t)dt\right| \leqq K|\xi^{x+\sigma+1}|\frac{\Gamma(x'+1)\Gamma(\sigma'+1)}{\Gamma(x'+\sigma'+1)}$$

$$\sim K\Gamma(\sigma'+1)|\xi^{x+\sigma+1}|x'^{-\sigma'-1}, \quad (x'\to+\infty)$$

$|\arg x|<\frac{\pi}{2}-\delta$ では $x\to\infty$ のとき $x=O(x')$ であるから，

(2.10) $$\psi_\xi(x+n)\sim\Gamma(\sigma)\xi^{x+\sigma}x^{-\sigma}.$$

このψ_ξに対応する

$$\varphi_\xi(x+n)=\psi_\xi(x+n)\Gamma(x+1) \tag{2.11}$$

は

$$\varphi_\xi(x+n)\sim\frac{\Gamma(\sigma)}{\sqrt{2\pi}}\xi^{x+\sigma}e^x/x^{x+\sigma+1/2} \tag{2.12}$$

となる。

$\sigma>-1$ を仮定したが，$\sigma\leqq-1$ ならば $\sigma+n>-1$ であるようにnをとり，$u_\xi(t)$の展開式から最初のn個の項を取り去った剰余を$U_\xi(t)$とすれば，上の計算はそのまま適用できるから，(2.10)，(2.12) は $\sigma>-1$ を仮定しないでも導かれる。

3．0で与えられた解の∞における漸近式

$$\nu=\sigma-\alpha=g_1(\xi)/g_0'(\xi) \tag{3.1}$$

はξだけに依存し，αには関係しない。

∞においては(1.1) は形式解

$$y\sim e^{\xi x}x^{-\nu}\sum_{m=0}^{\infty}d_m x^{-m},\qquad (d_0\neq 0) \tag{3.2}$$

をもつ。∞における特性指数ξは$g_0(t)$の零点で，それは(2.2)の特異点と一致している。νは(3.1)で与えられる値と同じ。

φ_ξおよび

$$\Phi_\xi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_\xi(m+n)x^{\alpha+m} \tag{3.3}$$

はαにも依存するから，$\varphi_{\alpha\xi}$，$\Phi_{\alpha\xi}$ と書くことにする。

$$\sum_{\xi} \gamma_{\alpha\xi}\varphi_{\alpha\xi}(k+n)=C_k\ ,\ (k=0,1,\cdots,n-1) \tag{3.4}$$

で$\gamma_{\alpha\xi}$をきめると，(1.2)で定義される解$Y_\alpha(x)$に対して

$$Y_\alpha(x)=\sum_{\xi}\gamma_{\alpha\xi}\Phi_{\alpha\xi}(x) \tag{3.5}$$

となる。すなわちすべての整数$m\geqq n$に対して

$$C_m=\sum_{j}\gamma_{\alpha\xi_j}\varphi_{\alpha\xi_j}(m+n) \tag{3.6}$$

となるから，$\xi_1,\cdots,\xi_n$のうち絶対値が最大となるものをξと書くならば，$m\to\infty$に対して

$$\gamma_{\alpha\xi}=\frac{\sqrt{2\pi\xi}}{\Gamma(\sigma)}\lim C_m e^{-m}(m/\xi)^{m+\sigma+1/2} \tag{3.7}$$

である。

$\xi_1,\cdots,\xi_n$が凸多辺形の頂点になっている場合には，任意の番号kに対して，$|\xi_1-\beta|,\cdots,|\xi_n-\beta|$のうち最大のものが$|\xi_k-\beta|$であるように$\beta$がとれる。$z=e^{-\beta x}y$に関する微分方程式を考えることにより$\xi=\xi_k$に対する$\gamma_{\alpha\xi}$を求めることができる。

(3.4)で$\gamma_{\alpha\xi}$を定義すると，(1.2)で定義される解$Y_\alpha(x)$に対して補題7（後述）により，$\arg(\xi x)=0$, $x\to\infty$のとき

$$Y_\alpha(x)\sim\gamma_{\alpha\xi}\Gamma(\alpha+\nu)x^{-\nu}e^{\xi x}. \tag{3.8}$$

ここでνはξだけできまり，αには依存しない。

4. $\Phi_\xi(t)$の評価

$$\Phi_\xi(t)=\sum_{m=0}^{\infty}\varphi_\xi(m+n)\,x^{\alpha+m}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\psi_\xi(m+n)}{\Gamma(m+1)}x^{\alpha+m}$$
$$=x^\alpha\int_0^\xi u_\xi(t)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(xt)^m}{\Gamma(m+1)}dt=x^\alpha\int_0^\xi e^{xt}u_\xi(t)\,dt.$$

そこで$u_\xi(t)$の展開式の初項だけとれば

$$x^\alpha\int_0^\xi e^{xt}(\xi-t)^\kappa dt=x^{-\nu}\int_0^y e^{y-s}s^\kappa ds$$
$$=x^{-\nu}e^y\left\{\int_0^\infty e^{-s}s^\kappa ds-\int_y^\infty e^{-s}s^\kappa ds\right\},\quad(\xi-t=s/x,\ y=\xi x)$$

となるから，$|\arg(x\xi)|<\frac{\pi}{2}-\delta$，$x\to\infty$のとき

$$x^\alpha\int_0^\xi e^{xt}(\xi-t)^\kappa dt\sim\Gamma(\sigma)x^{-\nu}e^{\xi x}$$

また

$$x^\alpha\int_0^\xi e^{xt}\,U_\xi(t)\,dt=x^\alpha\int_0^1 e^{y-s}\,U_\xi(\xi-s/x)\,dt.$$

ここで不等式(2.8)を利用すれば

$$\left|x^\alpha\int_0^\xi e^{xt}\,U_\xi(t)\,dt\right|\leqq K\left|x^{-\nu-1}e^y\right|\left|\int_0^1 e^{-s}s^{\sigma'}ds\right|$$
$$<K\,\Gamma(\sigma'+1)\left|x^{-\nu-1}e^{\xi x}\right|.$$

したがって $|\arg(\xi x)|<\frac{\pi}{2}-\delta$，$x\to\infty$ のとき

(4.1) $$\Phi_\xi(t) \sim \Gamma(\alpha) x^{-\nu} e^{\xi x}.$$

$0, \xi$を結ぶ線分の上では
$$|u_\xi(t)| \leqq H|(\xi-t)^\kappa|$$
が成り立つように定数Hがとれるから，同様な計算で
$$|\Phi_\xi(t)| \leqq H\Gamma(\alpha+1)|x^{-\nu} e^{\xi x}|$$
を得る。これは$|\arg(\xi x)| \leqq \pi$において成り立つ。

$\alpha > -1$を仮定したが，そうでない場合には，$u_\xi(t)$の展開式を最初のn個の項の和と剰余に分けて同様な計算をすることにより，一般に$|\arg(x\xi)| < \frac{\pi}{2} - \delta$，$x \to \infty$のとき(4.1)が，$|\arg(\xi x)| \leqq \pi$，$x \to \infty$のとき

(4.2) $$\Phi_\xi(x) = O(x^{-\nu} e^{\xi x})$$

が成り立つことがいえる。

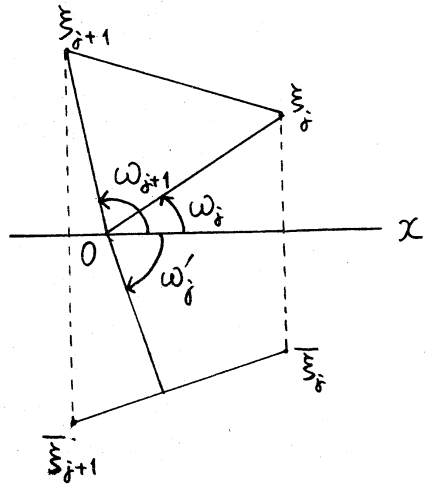
5. ∞において漸近的に定義される解

$\omega_j = \arg \xi_j$とおく。x軸となす角θが

(5.1) $$|\xi_j| \cos(\theta + \omega_j) = |\xi_k| \cos(\theta + \omega_k)$$

を満足するとき，x軸と角θをなす方向を番号j, kに関する特異方向という。特に番号を指定しないで単に特異方向ということもある。特に$\xi_1, \cdots, \xi_n$は0を内部に含む凸多辺形の頂点で，周上にこの順に並んでいる場合を考える。したがって$\omega_1 < \omega_2 < \cdots < \omega_n < \omega_1 + 2\pi$とすることができる。

ξ_j, ξ_{j+1} を通る直線に垂直な方向が x 軸となす角を ω_j とすれば (5.1) は $\theta=\omega_j'$, $k=j+1$ に対して成り立つから，ω_j は $j, j+1$ に関する特異方向が x 軸となす角である。



任意の整数 m に対して

$\omega'_{j+mn}=\omega'_j+2m\pi$ と書くことにし，

$$D_j=\{x;\ \omega'_{j+1}<\arg x<\omega'_j\},$$

$$D'_j=\{x;\ \omega'_{j+1}<\arg x<\omega'_{j-n}\},$$

$$D''_j=\{x;\ \omega'_{j+1}<\arg x-\pi<\omega'_j\}$$

と定義すれば

$$(5.2)\qquad D_j, D_{j-1}, \cdots, D_{j-n}, D''_j \subset D'_j$$

である。D'_j に含まれる半直線に沿って $x\to\infty$ のとき漸近的に

$$(5.3)\qquad y\sim x^{-\nu_j}e^{\xi_j x}$$

となる解はただ一つ存在し，この漸近的関係は D'_j の内部において成り立つ。この解を $Z_j(x)$ で表わす。

$Z_j(xe^{2\pi i})$ の漸近式

$$Z_j(xe^{2\pi i})\sim x^{-\nu_j}e^{\xi_j x-2\pi i\nu_j}$$

は

$$D'_{j+n}=\{x;\ \omega'_{j+1}<\arg x+2\pi<\omega'_{j-n-1}\}$$

の内部で成り立つ。したがって

(5.4) $$Z_{j+n}(x)=e^{2\pi i\nu_j}Z_j(x)$$

となる。

$$D'_0\cap D'_1\cap\cdots\cap D'_{n-1}=\{x;\ \omega'_1<\arg x<\omega'_{-1}\}$$
$$\supset D_{-1}\cup D_0$$

であるから，$Z_0(x), Z_1(x), \cdots, Z_{n-1}(x)$ に対して共通領域D_0において(5.3)のような漸近表示が有効であり，このことからそれらが互いに1次独立であることがいえる。

6．接続係数

決定方程式(1.3)の根を$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}$とし，$\alpha=\alpha_j$に対応する$Y_\alpha(x)$を改めて$Y_j(x)$と書く。

(6.1) $$Y_j(x)=p_{j0}Z_0(x)+\cdots+p_{j,n-1}Z_{n-1}(x),\quad (j=0,1,\cdots,n-1)$$

の係数p_{jk}あるいは

(6.2) $$Z_k(x)=g_{k0}Y_0(x)+\cdots+g_{k,n-1}Y_{n-1}(x),\quad (k=0,1,\cdots,n-1)$$

の係数g_{jk}が接続係数である。

$x\in D''_j$, $x\to\infty$ のとき

(6.3) $$Y_j(x)\sim S_{jk}x^{-\nu_k}e^{\xi_k x}$$

とすれば，この漸近的関係はD'_jにおいて成り立ち，(3.8)より

(6.4) $$S_{jk}=\gamma_{\alpha\xi}\Gamma(\sigma),\qquad (\sigma=\alpha+\nu)$$

そこで

(6.6) $$s_{0k}g_0+s_{1k}g_1+\cdots+s_{n-1,k}g_{n-1}=\begin{cases}0 & (k>0)\\ 1 & (k=0)\end{cases}$$

によって $g_0, g_1, \cdots, g_{n-1}$ をきめる。

(6.7) $$Z(x)=g_0Y_0(x)+g_1Y_1(x)+\cdots+g_{n-1}Y_{n-1}(x)$$

は $Z_0(x), Z_1(x), \cdots, Z_{n-1}(x)$ の1次結合であるが，(6.6)で $k=n-1$ とした等式により $Z(x)$ は $Z_{n-1}(x)$ に関係しない。そこで $k=n-2$ とした等式(6.6)から $Z(x)$ は $Z_{n-2}(x)$ に関係しない。以下同様にして $Z(x)$ は $Z_1(x), \cdots, Z_{n-1}(x)$ に関係しないことがいえる。さらに(6.6)で $k=0$ とした等式から $Z(x)=Z_0(x)$ となる。

ゆえに，ここに得られた $g_0, g_1, \cdots, g_{n-1}$ が実は $g_{00}, g_{01}, \cdots, g_{0,n-1}$ であることがわかる。

一般に $g_{k0}, g_{k1}, \cdots, g_{k,n-1}$ を求めるには(6.1)を

$$Y_j(x)=p_{jk}Z_k(x)+\cdots+p_{j,k+n-1}Z_{k+n-1}(x)$$
$$(j=0, 1, \cdots, n-1)$$

で置き換えて同様に論ずればよい。

7. 補題

(7.1) $$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^{\lambda+n}$$

の係数C_nが$n\to\infty$のとき

(7.2)
$$C_n \sim e^n/\sqrt{2\pi}\, n^{n+\lambda+1/2}$$

を満足するならば，$\arg x=0$，$x\to\infty$のとき$\varphi(x)\sim e^x$となる。

[証]
$$f(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} x^{\lambda+n}/\Gamma(\lambda+n+1)$$

の収束半径は∞であり，$y=f(x,\lambda)$をxの関数と考えると，それは微分方程式

$$y'=y+x^{\lambda-1}/\Gamma(\lambda)$$

の解で，$x\to 0$のとき$y\sim x^\lambda/\Gamma(\lambda)$であるから，$\mathrm{Re}\,\lambda>0$ならば

$$f(x,\lambda)=\frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^x t^{\lambda-1}e^{x-t}dt.$$

しかし右辺において有限部分をとることにすれば，この等式はλのすべての値に対して成り立つ。

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}e^{x-t}dt=\Gamma(\lambda)e^x,$$

$$\int_x^\infty t^{\lambda-1}e^{x-t}dt=x^{\lambda-1}\int_0^\infty\left(1+\frac{s}{x}\right)^{\lambda-1}e^{-s}ds\sim x^{\lambda-1}$$

であるから，$|\arg x|<\frac{\pi}{2}-\delta$，$x\to\infty$のとき$f(x,\lambda)\sim e^x$.

次に$x>0$として，$f(x,\lambda)$と

$$g(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} x^{\lambda+n}e^n/\sqrt{2\pi}\,n^{\lambda+n+1/2}$$

を比べる。$\varepsilon>0$ に対して N を大きくとって，$n \geqq N$ ならば

$$\left|1-\Gamma(\mu+n+1)e^{n}/\sqrt{2\pi}\, n^{\mu+n+1/2}\right|<\varepsilon,$$

$$\left|1-\sqrt{2\pi}\, n^{\lambda+n+1/2}/e^{n}\Gamma(\lambda+n+1)\right|<\varepsilon$$

とする。ただし $\mu=\mathrm{Re}\,\lambda$ である。

$$g(x,\lambda)=f(x,\lambda)+\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n x^{\lambda+n}$$

$$\psi_N(x)=\sum_{n=N}^{\infty}\varepsilon_n x^{\lambda+n}$$

とおけば，

$$\begin{aligned}|\psi_N(x)| &\leqq \varepsilon\sum_{n=N}^{\infty}\left|x^{\lambda+n}e^{n}/n^{\lambda+n+1/2}\right| \\ &< \varepsilon\sum_{n=N}^{\infty}x^{\mu+n}e^{n}/n^{\mu+n+1/2} \\ &< \varepsilon(1+\varepsilon)\sum_{n=N}^{\infty}x^{\mu+n}/\Gamma(\mu+n+1) \\ &= \varepsilon(1+\varepsilon)(1+o(1))e^{x}.\end{aligned}$$

一般に $\varphi(x)$ の場合には，同様な計算で，$\varphi(x)$ と $g(x,\lambda)$ を比べる。

文　献

N. E. Nörlund, Leçons sur les équations linéaires aux différences finies. Gauthier-Villars, Paris, 1929.

M. Hukuhara, Sur les points singuliers des équations différentielles linéaires, III. Mem. Fac. Sci. Kyūshū Imp. Univ., 2 (1942), 125-137.